



SHOUT
SHARE IT

MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO V.



VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
M. DCC. XC.

MEMORIE
D
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETA ITALIANA
DI SCIENZE E LETTERE





CATALOGO

D E M E M B R I

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA.

P R E S I D E N T E

ANTONMARIO LORGNA Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari. *VERONA.*

S O C J A T T U A L I.

GIOVANNI ARDUINO Professore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Soprintendente alle cose agrarie dello Stato Veneto. *VENEZIA.*

CARLO BARLETTI delle Scuole Pie, Professore di Fisica generale nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA.*

TEODORO BONATI Professore d' Idrostatica nell' Università Pontificia di Ferrara, ed Inspettore dei fiumi del Ferrarese. *FERRARA.*

ANTONIO CAGNOLI Astronomo, e Secretario perpetuo dell'Accademia di Agricoltura, Commercio ed Arti. *VERONA.*

LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Primario Professore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell' Università di Padova. *PADOVA*.

SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze. *BOLOGNA*.

* ANGELO ABATE DE CESARIS Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano. *MILANO*.

PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

FELICE FONTANA Cavaliere del Sacro Romano Impero, Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Professore di Matematica Superiore nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

ALBERTO ABATE FORTIS Professore di Storia Naturale. *NAPOLI*.

* Stava preparando questo Socio una memoria intorno all' aberrazione ed alla velocità della luce attraverso un cannocchiale di vetro lungo sei piedi

pieno d'acqua. Per disavventura rimasero interrotte le di lui osservazioni a compimento della memoria, essendogli spezzato il detto cannocchiale.

VITTORIO FOSSOMBRONI Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toscana. *AREZZO.*

MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia. *PARMA.*

* MARSILIO LANDRIANI Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toscana, e Regio Professore di Fisica Sperimentale. *MILANO.*

VINCENZO MALACARNE Professore Primario di Istituzioni cerusiche, e dell' Arte Ostetricia nella R. I. Università di Pavia, e Cerusico Pensionario di S. M. Sarda. *PAVIA.*

GIOVANNI FRANCESCO Malfatti Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. *FERRARA.*

CARLO LODOVICO CONTE MOROZZO Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *TORINO.*

PIETRO MOSCATI Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *MILANO.*

BARNABA ABATE ORIANI Astronomo nel Reale Osservatorio di Milano. *MILANO.*

* A motivo de' lunghi viaggi intrapresi per sovrane commissioni, non ha potuto questo Socio dar l' ultima

mano ad una memoria da lui destinata per questo tomo.

PIETRO PAOLI Professore di Matematica nella Regia
Università di Pisa. *PISA*.

ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Professore di Storia
Naturale. *MILANO*.

PIETRO ROSSI Professore di Logica nella Regia Univer-
sità di Pisa, e Naturalista. *PISA*.

LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Ve-
neti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari.
VERONA.

GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore di Astro-
nomia nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

LAZARO ABATE SPALLANZANI Professore di Storia
Naturale nella R. I. Università di Pavia, e Soprintendente
al Pubblico Museo della medesima. *PAVIA*.

SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica,
e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. *PA-
DOVA*.

GIOVANNI BATTISTA ABATE VENTURI Professore
di Matematica nell' Università di Modena. *MODENA*.

ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale
nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico. *VERONA*.

S O C J E M E R I T I

DOMENICO CIRILLI Professore di Medicina Teorica
nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

DOMENICO COTUNIO Professore di Anatomia nella Re-
gia Università di Napoli. *NAPOLI*.

LODOVICO DE LA GRANGE Presidente Onorario dell'
Accademia delle Scienze di Torino. *PARIGI*.

GIUSEPPE ANGELO CONTE SALUZZO Gentiluomo di
Camera di S. M. il Re di Sardegna. *TORINO*.

GIROLAMO SALADINI Patrizio Lucchese, Canonico nel-
la Metropolitana di Bologna. *BOLOGNA*.

ANTONIO SCARPA Professore di Anatomia, e di opera-
zioni Chirurgiche nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

GIUSEPPE VAIRO Professore di Chimica nella Regia
Università di Napoli. *NAPOLI*.

S O C J O N O R A R J

LUIGI CACCIANEMICI PALCANI Professore Primario
di Geografia, e di Nautica nell'Istituto, e di Fisica nel-
la Pontificia Università di Bologna. *BOLOGNA*.

ANGELO MONSIGNORE FABRONI Presidente della R.
Università di Pisa, e Priore nell'incl. Ordine di Santo
Stefano di Toscana. *PISA*.

IPPOLITO MARCHESE PINDEMONTÉ Patrizio Veneto, e Cavaliere Gerosolimitano. *VENEZIA*,

S O C J S T R A N I E R I.

M. ACHARD. *BERLINO.*

M. BAILLY. *PARIGI.*

M. BONNET. *GINEVRA.*

M. LE COMTE DE BORN. *VIENNA.*

- - - - -

M. CAMPER. *AMSTERDAM.*

M. CAMPOMANES. *MADRID.*

M. LE MARQUIS DE CONDORCET. *PARIGI.*

- - - - -

M. NARVOYSZ. *WILNA.*

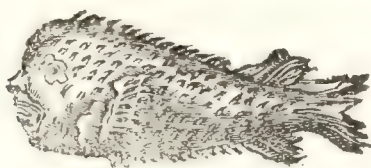
M. PALLAS. *PIETROBURGO.*

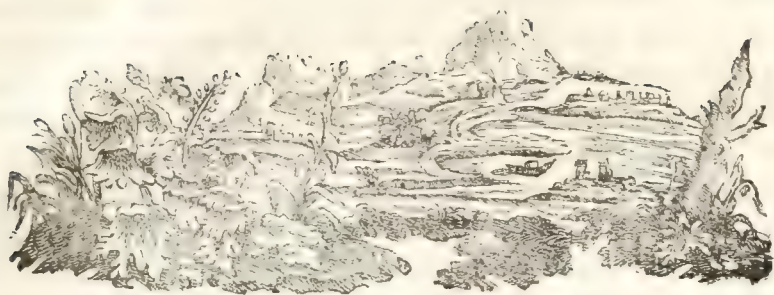
M. PRYESTLEY. *LONDRA.*

S E C R E T A R J

AGOSTINO ABATE VIVORIO Professore di Geografia, e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario perpetuo, e Amministratore. *VERONA.*

GIUSEPPE ABATE TOMMASELLI Vice-Secretario, e Direttore della Stampa. *VERONA.*





ELOGIO

DI LEONARDO XIMENES

SCRITTO

Dal Sig. LUIGI CACCIANEMICI PALCANI

SE quelle cose medesime, che a sè traggono l'ossequio, e la riverenza del volgo, sembrassero ai filosofi egualmente grandi e magnifiche, non potremmo incominciare l'elogio di *Leonardo Ximenes* senza tener lungo ragionamento della nobiltà della sua patria, dell' antichità di sua stirpe, e del nome, e della fama di quell' inclita compagnia, a cui egli con sacri vincoli si legò. La Sicilia il produsse, terra gloriosa, perchè ivi pur nacque Archimede: i suoi maggiori furono in Trapani chiari e pregiati: ancor fanciullo diè segni di sottile intelletto, di felice memoria, di naturale attitudine alla virtù: gli parvero vanissimi i sentimenti, e le sollecitudini del secolo: bramò di uscirne: lo annoverò tra' suoi una società religiosa, che da saggi ed avveduti uomini istituita,

Tom. V.

b

già eran due secoli, protetta dai Pontefici, accolta benignamente dai Re, venerata dai popoli, dopo essersi rapidamente propagata per lo antico mondo, e pel nuovo, dopo avere conseguiti sommi onori in tutte le corti, e in tutte le università, coltivata ogni maniera di liberali discipline, prefeduto alla pubblica educazione, ed essersi resa arbitra delle opinioni, e dei costumi degli uomini, potè finalmente esser spenta; ma non potrà essere obbliata giammai. Ma il volgo è uo di conoscere gli oggetti confusamente, nè ben distingue ciò che loro è proprio, da ciò che v'aggiunge egli stesso. Così aggrandisce le stelle di un chiarore, che in loro non è, ma nell'occhio, che le riguarda. E ben la fama di molti verrebbe meno, e scemerebbe, se restasse il popolo d'ingannarsi. *Leonardo Ximenes*, risoluto, com'era, di non ricevere fra' suoi pregi, se non quelli che a ragione eran suoi, sdegnerebbe una lode, di cui poscia doveste saper grado o alla fortuna, benchè propizia, o ad un errore, quantunque comune, o alla dignità stessa, e alla grandezza d'altrui.

Firenze, che lo accolse ancor giovinetto, veggendolo indelfso nelle fatiche, ardentissimo ad investigare la verità, avido di vera gloria, concepì di lui quelle speranze, che poi si compierono largamente. In quella città nobilissima nè gli mancarono dotti maestri, che lo instruissero, nè preclari esempj, che lo stimolassero allo studio delle scienze matematiche. Non andò lungo tempo che ne divenne maestro egli stesso, e le sue cure scolastiche, e i suoi elementari insegnamenti siccome la nostra gratitudine in singolar guisa meritavano, così hanno diritto alla ricordanza de' posteri. La scienza della Geometria, che uscì dalle greche scuole schietta, e purissima, e adorna d'immutabili verità in maraviglioso ordine disposte, fu dopo molti anni da un perturbatore importuno delle migliori discipline contaminata, e corrotta. Que' nobilissimi pregi, di che l'aveva Euclide arricchita, rimutò, e

cambiò il ramo, e per evidenza , e certezza ambiguità , e dubbio rendè . L'amore di novità accecò molti. Gli *Arnaldi*, i *Lamy*, i *Malezieu*, e più altri, avvifandosi anch'essi d'ingentilire, e di riordinare le proposizioni d' *Euclide*, ne guastarono la sodezza. Moltiplicaronfi le istituzioni geometriche, e il vigore della Geometria indebolì. Gli Algebristi la vestirono di formole, e di equazioni, e liberali essendole d'estranej ornamenti le tolsero i suoi. Nel che per avventura non molto provvidero ai comodi dell' arte loro, cui niuno coltiverà degnamente , se prima non abbia avvezzo l' animo, e quasi domesticato alla sintesi . Tanta vanità di studj, e di metodi indusse il *Volfo* a credere , che senza traviar bruttamente niuno abbandonar poteva le orme segnate per *Euclide*.

Io non dirò tanto, di *Simpson* massimamente ricordandomi: e poichè di ciò si compiacciono, e se ne vantano, concederò ai novelli geometri la gloria di condurre i loro discepoli agiatamente, e per via facile e piana, dove gli antichi non li avrebbero scorti senza fatica, ed affanno. Ma duolmi che i geometri abbiano preso a favorir la pigrizia; nè so bene, se questi giovani che ora tanto delicatamente si costumano, e quasi formansi alla mollezza, varranno poi a scorrere il difficil campo delle scienze matematiche, e a sostenere il travaglio di tanti problemi, e a comprendere, e a svolgere, e ad aggiungere tante verità, non rade volte varie e molteplici, spesso intralciate, ed oscure, sempre lontane e recondite. Non uscirono certamente gli atleti da *Seplasia*, e da *Capua*. Una incredibile pazienza delle fatiche, e un lungo uso della lotta e del corso gli educò alle vittorie, ed alle palme. I teneri e delicati, non che le percosse degli avversarj, non avrebbero sofferto il sole, e la polvere dello stadio. Ben però fece *Ximenes*, che ritrasse i geometri verso il loro principio, e questi quasi degenerati Spartani ricondusse alla disciplina del loro *Licurgo*. Nè fu rigido in tal manie-

ra, che non volesse da niuna pena, e da niuna sollecitudine quantunque inutile liberarli; ma tanta gliene diè solamente, quanta fu necessaria a provvedere alla stabilità della Geometria, e a conservarne l'integrità. Quindi egli non la l'ipotesi di Euclide, non l'ordine dei teoremi, non la severa forma di argomentare, che ad *Euclide* piacque, mutò; ma con opportuni proemj drizzò, e apparecchiò la via al conoscimento di quelle mirabili dottrine, e molti luoghi per strettezza, e brevità oscuri dilatò, e fece chiari, e ciò che più valse ad eccitare gl'ingegni ancor lenti, elegantemente e con bel modo spiegò quanto giovi ogni libro d' *Euclide* allo scoprimento delle fisiche verità: ed ecco, egli dice, questo teorema insegnò alla Geografia la misura delle terrestri latitudini, e della terra medesima; e questo descrisse all' *Optica* il viaggio della luce. ed arricchì la *Meccanica* delle leggi del moto riflesso; senza questa proposizione la militare e la civile *Architettura* rimarrebbero confuse, e senza quella mal potrebbe l' *Astronomia* mostrarne il cielo, e i varj cerchi, che in quello disegna, e l'ardita *Nautica* sul mare smarrirebbe pure il suo coraggio. L'aspetto giocondissimo di tante utili verità fece i giovani solleciti, nè li lasciò annichittire, ed essere oziosi. Eglino s'affannarono volentieri, e tanto meno sentirono l'asperità dei mezzi, quanto più loro sembrò bello e dilettevole il fine. Molte e nobilissime scuole d' *Italia* la nuova maniera d'interpretare gl' insegnamenti d' *Euclide* approvarono, e seguirono, e *Francesco Maria Zanotti* solea dire, ch' egli avea già veduta la Geometria quando rustica e selvaggia, quando scorretta, e licenziosa, e ch' ora per un raro accoppiamento di due eccellenti qualità la vedea pudica insieme, e gentile.

L'onore, che per tutta *Italia* si rese a' suoi *Elementi* geometrici, accrebbe nel nostro *Ximenes* vaghezza di lode. Che di vero non era egli tanto ignaro del proprio valore, che sè

nè conoscesse pronto ad opere vie più rare ed illustri, nè d'animo così abbietto, che sostener non potesse la speranza di maggior gloria. Quindi tra sè rivolgendò le varie parti delle scienze matematiche, quantunque ciascuna dolcemente lo allettasse, pure intese alle miste più che all'altre; o il traesse la maggiore utilità, che quelle promettono, o il maggior uopo, che hanno, di essere favorite, ed accresciute. E certamente la sublime Geometria, e l'Algebra, e le altre facoltà occupate a investigare i segreti del mondo intelligibile, sono oggimai a tanta altezza salite, che non sembrano molto lontane da quella perfezione, a cui può recarle ingegno mortale; ma quelle scienze, che legansi colla Fisica, e nel mondo reale stanziano, e tentano di penetrare i nascondigli della natura, lentamente avanzano, e a stento aggrandiscono. Del che tutta la colpa risiede in que' principj, che sono fondamento, e sostegno di ogni geometrico magistero. E veramente in un problema astratto niuna ipotesi s'intromette, che non ve l'abbiano eglino stessi introdotta i matematici; laddove i problemi fisici costretti sono a ricevere, e a comprendere tutte quelle supposizioni, che la natura richiede, e che poi essa medesima agli sguardi dei filosofi sembra studiosamente nascondere. Se un meccanico sia voglioso di sottoporre a calcolo il movimento di corpi, cui niun ostacolo raffreni, ed arresti; egli dalla impenetrabilità, e dalla inerzia loro dedurrà moltissimi teoremi, e bellissimi, e ne spiegherà gli equilibrij, e i vicendevoli incontri, e segnerà il cammino, ch'essi fanno, altri ugualmente traendosi, altri afforzandosi, od impigrendo. Nè lo spaventeranno le sottigliezze; poichè il *Torricelli*, e il *Cartesio*, e il *Maupertuis*, e il *Courtieron*, e più altri gli saranno cortesi di utilissime regole, che in mezzo alle difficoltà lo sostengano, e lo confortino, e il *Galileo* gli porgerà il principio delle velocità virtuali, quindi nuovo filo d'Arianna, che lo scorga sicuramente per le più tortuo-

se, e più dubbie vie delle meccaniche speculazioni. Ma la natura, che l'universo creando non pensò al comodo dei matematici, e alla facilità dei calcoli, e si propose altri fini altissimi, e più degni di sè, oppose molti impedimenti al moto dei corpi, nè li formò lisci, e puliti, come si fingono dai meccanici, ma con infiniti pori ne interruppe la tessitura, e li fornì di cavità, e d'asprezze, e di prominenze, e quasi di squame, sparse per tutto, e l'una sopra l'altra confusamente accumulate. Il perchè movendosi un corpo sopra di un piano, o sfrofinandosi comunque ad altro corpo, non può innanzi procedere, senza che vinca queste asprezze, o piegandole, se flessibili sono, o soverchiandole, se dure, o sminuzzandole, e rompendole. Intanto quell'impeto, onde il corpo fu sospinto dapprima, si trattiene tra via, e s'arresta, e va sfremendosi a poco a poco, finchè s'annienti. Nè questa resistenza fu ignorata dal volgo, che anzi ora crescendola ad arte, or menomandola alla propria utilità la rivolse, ed ora il bisolco lega, e figge le ruote al suo carro, perchè questo dall'erta balza non piombi, e lentamente strisciando discenda, ed ora spalma il perno, e secondo suo potere l'appiana, perchè reso il fregamento men ruvido sia la conversion delle ruote meno impedita. I dotti uomini, che precedettero *Amontons*, non ebbero vantaggio dal volgo. Quegli prima d'ogni altro tentò di ridurre lo sfropicciamento de' corpi a leggi perpetue, ed immutabili, e quasi all'obbedienza della Fisica. Lo seguirono *Camus*, e *Belidoro*: *Muschembroeck* gli contrastò: s'accesero molte contese. L'Accademia di Parigi esortando i fisici, e premj, ed onori proponendo, invogliò molti a far nuove ricerche sopra una tanto grave questione, e a provvedere, quant'era in loro, al comodo dell'arti, e alla perfezione della Meccanica: ma niuno di questi soddisfece interamente al desiderio dell'Accademia, e la promessa corona stette in prima sospesa, poi divisa a più fronti

non mostrò che alcuno avesse toccato la meta , ma che molti s' erano destramente adoperati per arrivarla. La diligenza, che a ragione fu chiamata figlinola della fatica, e del tempo , non lasciò spazio al nostro *Ximenes* di venire innanzi al cospetto de' giudici Parigini. Si proferì la sentenza quando ancora non erano condotte a fine le molteplici e laboriose esperienze, ch' egli avea studiosamente intraprese. Le compìè ciò non pertanto, e al pubblico giudizio le sottopose. Così l' attenta cura, che gli tolse l' onore di un cimento, lo animò poscia ad offerirsi ad un altro, e a non temere il paragone del primo, ed egli potè riguardarsi come l' atleta di riserbo, destinato a combattere coi vincitori. Non è ragione, che io l' anteponga ad ogn' altro, un' autorità usurpando che male mi si avverrebbe. Appartiene agli agonoteti, e non al volgo spettatore il distribuir le corone. Pur chiederò, se altri mai, dal nostro Matematico in fuori, formasse, e mettesse ad opera un Tribometro tanto grande, e tanto vigoroso, che sostener potesse il grave peso di cinque mila libbre, se più frequentemente di lui reiterasse le stesse prove, se le variasse con maggiore sagacità, se ne inferisse leggi o più stabili, e ferme, o più accomodate a dirigere le operazioni, che si fanno dall' arte, o a spiegar quelle, che si producono dalla natura. E queste medesime leggi quanto nuove sembrarono, e maravigliose, e inaspettate! Niuno farebbesi dato a credere giammai, se moltissimi esperimenti non lo avessero dimostrato, che le resistenze rispettive tanto più scemano, quanto è maggiore la gravezza de' corpi, che strofinansi. Niuno sapea, che se le macchine sieno aggravate in prima da piccolissimi pesi, indi più, e più questi s' aumentino, le resistenze sul principio vanno oltre, e aggrandiscono, poi successivamente scadono, e declinano senza modo. Forse l' ignoranza di queste leggi difficoltà già, e turbò più d' ogni altra cosa gli studj e le diligenze dei mate-

matici. Ma il nostro *Leonardo* non lasciò luogo a dubitarne; e la gradazione delle resistenze, che tanto decregono, quanto le pressioni stringono i corpi, e li gravano, per mezzo di un ramo iperbolico asintotico ingegnosamente espresse, e col favore di questa nobilissima curva ragion fece di tutte le resistenze, che a differenti pesi rispondono, e i tanti casi, che non avea potuto cogli esperimenti comprendere, coll' animo abbracciò. Nè gli fu difficile sottomettere a' suoi precetti e conj, e burbere, ed argani, e taglie, e molt' altri macchinamenti e semplici, e composti, ed assicurare le arti nelle intraprese più animose, o voglian esse i porti difendere, e trasportare immense scogliere, o pesantissime navi lanciar nell' acqua, o imitando l' egizio lusso, e il romano, rizzare piramidi, ed obelischi. Laonde il suo nome, per quel ch' io simo, farà caro, ed in pregio, finchè l' uso, e l' esperienza signoreggino le arti. I matematici, che fioriranno per lo innanzi, procederanno forse più oltre, e sopra questa materia bellissime cose, e fino ad ora inudite per gran ventura insegneranno; benchè il *Lambert* ne levi ancora la speranza, e i fisici si daranno briga or d' inventare or di perdere sistemi, varj così, ed instabili, com' è volubile, e incostante l' immaginazione, che li crea; ma in tanta o copia di felici invenzioni, o vicende di pensieri, e d' ipotesi non potrà mancar di lode giammai, chi palesò il primo una legge, o consuetudine della natura, che tanto fu malagevole a discoprirsì, quanto più ne torna il conoscerla.

Nè solamente la Meccanica de' corpi solidi ricevè da lui accrescimento, e splendore, ma l' Idrometria eziandio tanto gli deve, quanto a pochissimi. Quest' arte, che veggiamo ancora imperfetta oltre modo e manchevole, è per avventura tra quelle che antichissimamente gli uomini coltivarono. O il vantaggio della pesca, e il comodo dell' umore vicino gli invitasse a fondare i loro abituri lungo le sponde di quei ri-
vi,

vi, ch' eran opera della natura, o piacesse loro la stanza di qualche alta, e rilevata sommità; la soprabbondanza delle piene, che ben sovente avvenivano, dovette recar loro noja, e travaglio. Eglino videro i fiumi traboccare ad ora ad ora dai loro confini, e aprendosi nuovi sentieri, e in più parti diramandosi perdere, e desolare i frutti sperati delle coltivate campagne, intrometterfi tra casa e casa, e interromperne la comunicazione, e separare, e dividere famiglie, che un vicendevole bisogno, od altro istinto avea accostate insieme, e fortemente congiunte. L'industria innata negli uomini per lo incitamento del vicino pericolo si destò, e l'imitazione dei canali naturalmente fatti supplì in qualche guisa il difetto della Fisica, e della Geometria. Cresciuta indi la popolazione, diboscato per ogni parte il terreno, perfezionata la società, assicurate le signorie, e i dominj, nacque l'arte delle misure, e più regolatamente or si scavarono, or s'allargarono i letti dei fiumi, or se ne rialzarono le sponde, or s'abbatterono i dossi, che le cadenti acque ritenevano, e stagnavano, e s'aprì a queste una strada più breve a qualche palude, o ad altro maggior fiume, od al mare. Pervennero i regni e le repubbliche a ricchissimo stato e grandissimo, e maravigliose opere idrometriche si compierono, superandosi ogni difficoltà per l'immensità dei tesori, e per la fermezza del dispotismo. La rozzezza, o piuttosto barbarie dell'età susseguenti, che ingrossò gl'ingegni, e spense la filosofia, ed ogni maniera di buoni studi, non potè annientare quell'attitudine, che gli uomini all'esercizio dell'arti naturalmente hanno: quindi non impedì che non si formassero talvolta utilmente, e non si dirigessero, e non s'infrenassero i fiumi con opportuni argomenti. Il nostro secolo, che tutte le nobili facoltà non pur richiamò all'antica loro grandezza, ma le abbellì ancora, e le illustrò, non si prese poca sollecitudine della Idrometria; alcuni eziandio s'adope-

raiono ad accrescerne la dignità, e s'invogliarono d'innalzarla al grado di scienza. A' quali però, se contesi fossero i ritrovamenti, e gli artificj di *Leonardo Ximenes*, poco rimarrebbe per avventura di che gloriarsi. E fo bene, che se vorremo all'Algebra chiedere delle leggi, che il movimento dell'acque governano, essa ne porrà innanzi certi suoi calcoli, quasi altrettanti enigmi, che segretamente le racchiudono: ma dov'è un Edipo, che gl'interpreti, e li dichiari? Que' medesimi, che ben si conoscono di equazioni, e di formule, non valsero a trarre giammai da quelle misteriose espressioni la vera legge, che la natura a' fiumi prescrisse, e poterono solamente inferirne, ch'erano fallaci ed ingannevoli quelle molte, che già piacquero a' Geometri assai dettissimi. e lungamente esercitarono l'ingegno dei *Castelli*, e dei *Gulielmini*, dei *Grandi*, e dei *Bonati*. Quindi si levò l'errore, non si levò l'ignoranza, e la meccanica dell'acque rimase ignuda, e sfornita di teoria. Il perchè, se d'investigare ne piaccia o la velocità, o la quantità dell'acqua, che in una determinata parte di qualche fiume scorre; a cui avremo ricorso fuori che ad esperimenti, ed a macchine? Tra le quali ben è la ventola, ritrovata per lo *Ximenes*, di tanto pregio, e di tanta eccellenza, ch'io non so qual altro macchinamento dovesti a buona equità anteporle. Nè crederò che o la caraffa, o il quadrante idrometrico, o la turba moltiforme delle ritrometriche aste sia così orgogliosa, che di maggioranza contenda con esso lei. Nè il tubo pure di *Pitot*, quantunque e di eleganza si vanti, e di utilità, può mettersi ad opera, senza che più Matematici abbiano quistioni coi *Michelotti*, e co' *Scarella*; nè quelle esperienze possono interamente appagarci, che muovono tante discordie, e altercazioni. Con quanta sottigliezza l'emisfero idraulico misura la velocità dell'acque, e fa ragione di quell'impeto, per cui esse spingono i corpi, che incontrano dirittamente? Ben lo

stesso *Ximenes* il concedea, e quel macchinamento l'ellissimo altamente onorava; pur tenea che da lui avesse la ventola qualche vantaggio, nello estimare gli urti, di cui le cadenti acque percuotono gli obliqui ritegni. Nel che se altri crederà ch'egli andasse errato, e vorrà pure uguagliare l'emisfero, e la ventola, non io avrò vaghezza di contraddirli; che temerei quasi di finimuire la gloria del nostro Matematico, opponendomi ad un così onorevole paragone; e ben farò pago, se alcuno riguarderà un *Lorgna*, e uno *Ximenes*, come due consoli colleghi, che alla Repubblica idrometrica prescrivano leggi, e divieti.

Ma non è dato entro un breve spazio tutte le fatiche comprendere, che il nostro *Leonardo* in pro dell'Idrometria sostenne; nè queste spiegar si potrebbero degnamente senza un fastidioso apparecchio d'imagini topografiche, di livellazioni, e di profili: nelle quali cose la forma del presente ragionamento sdegnerebbe d'essere avviluppata. E certo appena v'ha stato, o provincia d'Italia, che non gli addomandasse intorno a gravissime questioni idrometriche avvertimenti, e consigli. A lui commise il Gran-Duca di Toscana la riduzione delle marcemme Sanesi; lui intorno al regolamento della Brenta interrogarono Veneziani: a lui raccomandaronfi Lucchesi, studiosi di togliere loro terre alle frequenti inondazioni del lago di Bientina; nol dimenticarono Genovesi, solleciti di riparare i loro aquidotti, e i loro porti; vollero udirlo i Romani Pontefici prima che o decretassero l'inalveazione dell'acque Bolognesi, o col disseccamento delle Volsche paludi prendessero ad emulare, o a sorpassare piuttosto *Teodorico*, e *Ceteo*. Ben possiamo da tante, e tanto gloriose destinazioni argomentare e un raro sapere, e un'infaticabile vigilanza, e una singolare integrità, e conosciuto avendo, quant'egli fosse onorato, conoscere altresì, quant'egli meritò d'esserlo. Nè punto mi turbano le querele d'alcuni, che misurando la

rettitudine dei consigli dalla prosperità del riuscimento, che ebbero, non si chiamano contenti appieno di certi lavori idrometrici, mandati ad esecuzione pel nostro Matematico. E potrei ben' io a poche disavventurose operazioni molte, e felicissime contrapporre; e richiamando anzi alla memoria l'antico stato di quelle stesse provincie, ch'essi dicono desolate ancora, e malfane, indicar loro e messe più copiosa, che già non era, e pesca più abbondante, e navigazione più agevole, e la ricchezza ne' privati accresciuta, e la condizione migliorata di ville, e di castelli. Ma una così fatta risposta sembrar potrebbe artificiosa, ed io per natura, e per mia professione sono alienissimo da ogni artificio. Ben dirò, che se il divisare un utile provvedimento procede dall'ingegno, e dalla dottrina, il condurlo al suo intero fine sembra il più delle volte rimesso nell'arbitrio della fortuna; tanti, e sì varj sono gli ostacoli, che ai meglio ordinati disegni s'oppongono, e li contrastano: dirò, che niuno, quantunque asprissimo riprenditor fosse, incolpò mai *Leonardo Ximenes* d'altro, che di errore, colpa spesse volte incerta, e per la fralezza delle cose umane più di mercè degna, che di biasimo, e di rampogna: dirò, che niuna insidia mai colse, e niuna lusinga piegò la sua schiettezza, e lealtà, e se le sue intraprese furono interrotte, nol furono, come quelle di *Lucullo*, dall'incontro dell'oro, ma, come le spedizioni di *Alessandro*, dalla nativa loro difficoltà. E i posterì leggendo i molti volumi, che le sue consultazioni idrometriche racchiudono, sì gli sapranno grado di tanti, e tanto fruttuosi problemi, ond'egli mirabilmente le fregiò; nè senza lode rammenteranno le sue speculazioni, che la teoria degli edifizj idraulici affinano, e rischiarano. Alcuni eziandio tra loro si meraviglieranno della molteplicità stessa dei lavori, e delle osservazioni, e crederanno appena che un uomo solo bastasse a tanto; non essendo massimamente la pratica idrometrica un' arte agiata, e

comoda, che esercitar si possa nel tranquillo ritiro delle stanze, e nell'ombra erudita delle accademie. Essa naturalmente irrequieta, e affannosa move i suoi coltivatori a dure, e disastrose peregrinazioni, ed or li tragge per balze, e per dirupi alle prime sorgenti dell'acque, or li sforza a correre immense campagne, a visitar opere, a livellar piani, a inerpicarli per argini, e per rialti, or li conduce a respirare un torbido aere, e insalubre in mezzo a bassi gorghi, ed a fangose paludi. Che se dopo tante noje concede loro, che si accolgano finalmente alle città, non pur li travaglia colla molestia dei calcoli, e colla difficoltà dei sistemi; ma li turba, e li grava di contrasti, e di risse, li trasporta innanzi ai tribunali, e li costringe ad affrontarsi coll'ignoranza, e col pregiudizio, incontro a cui rado è che la ragione non perda sue prove, e a combattere la privata cupidigia, che sembra quasi certa di prevaler sempre alla pubblica utilità.

Leonardo Ximenes non pur valse a sostenere per ben trent'anni tanto disagio, e a compiere tanti uffizj con maravigliosa attività; ma eziandio intese all'Astronomia ed alle meteorie per modo, che pareva che ad un mortale, tanto in questo genere adoperandosi, non fosse lecito d'occuparsi d'altro. Le *Efemeridi* dei movimenti celesti in lunga, e penosa opera lo tennero, e le osservazioni, ch'ei fece e del Sole, e delle stelle, e de' pianeti, e de' fenomeni dell'aere, altamente lo affaccendavano. Nè fu già di quelli, che in ciò esercitandosi, poco servonli della ragione, nè quasi d'altro usano, che degli occhi; ma s'adoperò ancora per inventar nuove teorie, e per ridurre a perfezione le antiche. Un *Alone*, che egli con somma diligenza guardò, lo mosse a credere, che *Ugenio* non avesse assai ragionevolmente di quelle apparenze l'origine dichiarata. A misurare prontamente lo spazio, di cui le Aurore Boreali dalla terra s'allontanano, migliorò un celebre problema di *Mayer*. Riformò, ed emendò accortamen-

te gli argomenti , per cui solevano gli astronomi delle età passate calcolare le paralassi della Luna . Rivolse l'animo alle forze della Luna , e del Sole , che la maréa commovono , e gonfiano , nè parvero affatto inutili queste sue cure a que' medesimi , che pur si rammentavano di *Enlero* , di *Maclaurino* , e di *Bernulli* . Ma queste industrie occupazioni , quantunque di lode non indegne , tralascio ben volentieri ; le magnifiche-rei con parole , quando mi fossi proposto di ragionare d' altr' uomo . Nei funerali di quei Consoli , che loro soldatesche impiegarono nel correre i monti della Liguria , nel combattere alcuni masnadieri , e nell'espugnare qualche infelice castello , avranno , cred' io , gli oratori minutamente annoverato ogni vinto nemico , ed ogni casolare distrutto ; ma se l'invidia non impedì che fosse onorato con giusta lode il sepolcro di *Scipione* , dovette senza più l'oratore accennar *Zama* , ed *Anni-bale* , nè curar d'altro . E certo non di breve spazio allargò il nostro *Leonardo* i confini dell'Astronomia , quando sottilmente definì la secolare diminuzione di quell'angolo , che fa l'equatore coll' eclittica . Un gnomone altissimo , che *Paolo Toscanelli* segnò nella Metropolitana di Firenze , era non so come caduto dalla memoria degli uomini . Niuno ponea mente ad un marmo , che serbava effigiata l' imagine , in cui se stesso ritrasse il Sole nell'estivale solstizio dell'anno mille cinquecento dieci . Questo rarissimo avanzo d' antica dottrina fuggì , non che gli sguardi altrui , quelli del *Galileo* , cui sembrava che l'Astronomia medesima ricercasse , bramosa di palesarsi a lui , e di svelarli i più ascosi segreti del Sole , e delle stelle . Ben se ne avvide lo *Ximenes* , e in ardentissimo desiderio si accese di restaurare , e d'aggrandire questo monumento nobilissimo d'Astronomia ; ma le grandi opere non vengono a fine giammai , ove non le sostenga , e non le invigorisca la protezione dei Sovrani : quindi ne parlò con *Emanuele* di *Richemont* , che allora governava la Toscana : ne

scriveffe all'Imperadore *Francesco*, e lo invaghiffe di un lavoro utile ai buoni studj, decoroso a Firenze, a lui gloriosissimo; niuna cosa essere così grande, ch'egli non dovesse prometterfi dall'ottima indole di quel Principe: perciò vivrebbe mai sempre il nome di *Richecourt* nella lunghezza del tempo avvenire: si rammentasse di *Meccenate*, e di *Colbert*. Indi comunicò il suo ritrovamento al *Condamine*, che viaggiava per Italia a que' dì: questi agevolmente concorse in una stessa brama, ne tenne presso il Governatore lungo discorso, e l'animo di lui o dubbio dell'intrapresa rassicurò, o lento nel compierla sollecitò, e punse. Fu riparato, ed amplificato l'antico gnomone; s'aperse largo campo allo *Ximenes* di nobilitare l'Astronomia con pregevolissime osservazioni. Tra le quali, siccome dicemmo, quelle singolarmente sono degne della memoria de' posteri, che ne insegnano la secolare vicenda, a cui soggiace l'obliquità dell'ecclittica. Niuna cosa per avventura era tanto necessaria a sapersi, quanto la variazione di un cerchio, a cui e pianeti, e comete, e stelle si riferiscono, e niuna tanto occulta, e tanto confusamente impacciata di svariate opinioni. Non pur gli antichi Astronomi, che voleano persuaderne della immutabilità de' cieli, ma *Gassendo*, e *Riccioli*, e *Monnier*, la inclinazione dell'ecclittica all'equatore ferma credettero, e permanente. *Louville*, *Eulero*, la *Caille*, la *Lande*, e più altri non dubitavano che quell'angolo in processo di tempo non si cambiasse; ma quando poscia si davano a misurare la grandezza di una tale mutazione, mal convenivano i pareri, e nascea grave, ed infinita discordia. Il nostro Matematico dichiarò, che l'angolo dell'ecclittica per ciascun secolo di trentaquattro minuti secondi menomava: ebbe contraddittori; ma questi rinnovandogli i cimenti, non altro fecero, che moltiplicargli i trionfi. E sì veramente quali erano l'arme, onde s'avvisassero gli Astronomi di tenerli fronte, e di combatterlo? Forse le of-

servazioni loro? Ma queste avean duopo d'essere afforzate da altre più antiche, delle quali essi erano sforniti. Niun *Paolo Toscanelli* s'era, due secoli prima, adoperato a loro vantaggio. Senza che i loro strumenti sembravano grandi a chi non avea contezza del *Gnomone* Fiorentino, che i tre amplissimi di Parigi, di Bologna, e di Roma, quando pur insieme s'unissero, forpassava d'affai. O dovea forse il nostro *Leonardo* temer quegli Astronomi, che null'altro gli contrapponevano, fuorchè ipotesi, e teorie? Ma ella è proprio una sconvenevolezza l'accomodare la natura delle cose ai sistemi: questi da quella debbono prender forma, e qualità. Nè riputerò false le osservazioni diligentissime, che l'obliquità dell'eclittica ne palesarono, perchè forse non si confanno coll'opinione, che della densità di Venere ebbero *Eulero*, e la *Grange*. Onoro, siccome debbo, non che i ritrovamenti verissimi, le immaginazioni ingegnose di questi uomini singolari, e degnissime le credo di commendazione, e di plauso; ma egli no colle ipotesi loro supplir vollero alle verità, che pienamente non conoscevano, non ostar a quelle, che l'esperienza avesse fatte palesi. E so bene, che *Newton* bilanciò la massa, e calcolò la spessezza di quei pianeti, intorno a cui alcun astro minore si rivolga, e formò un sistema, che parve indubitato, e perciò quasi non ebbe sembianza di sistema. Ma se un pianeta sia privo dell'onore di aver seguaci; è forza che gli Astronomi vogliosi pur di conoscere, quanto sia fitta la sostanza di lui, inciampino, e s'avvolgano in supposizioni incerte, e fallaci. Or la Venere, che gli Astronomi contemplan, è ben altra da quella, che fingono i Poeti. Questa non mai in parte alcuna si spazia, senza che le grazie l'accompagnino, e i Dei la seguano, e le tacciano corteggio gli Amori; quella s'aggira pel cielo scompagnata, e sola, e invano di un pianeta, che le teneffe dietro, e insieme si movesse con lei, sospetto ebbero *Cassini*, e gli *Acca-*

demici di Limosin . Il perchè ben giustamente stringea i suoi avversarj lo *Ximenes* : non ordissero favole , nè una fittizia densità di Venere alle sue osservazioni opponessero ; ma più tosto da queste argomentassero , quanto strettamente le parti di quel pianeta si tenessero insieme . Benchè non di ciò solo quelle osservazioni ne ammaestrano , ma la via ne aprono a misurare più squisitamente , che prima non si faceva , quella forza mirabile , che spinge la Luna a rotare intorno alla Terra , e i fondamenti assodano , e fiancheggiano della Newtoniana astronomia . Così *Leonardo Ximenes* le sue osservazioni difendendo , e il pregio mostrandone , e tutta la scienza del cielo , coll' ajuto loro , accrescendo , passò gli estremi anni suoi , e nobilissimi frutti di queste sue meditazioni alla Società Italiana offerì , che ben era degna di un dono così preclaro . Morì nel quarto giorno di Maggio dell' anno mille settecento ottantasei . Ad utilità de' Professori , che l' Idraulica , e l' Astronomia in Firenze spiegassero , la sua ricca biblioteca , e i suoi ordigni astronomici , e buona parte del suo non iscarso patrimonio lasciò . Visse anni sessantanove , età , se il corso della natura si riguardi , mezzanamente lunga , se il desiderio de' buoni , assai breve , se le cose fatte , lunghissima .

Benchè nello studio delle scienze matematiche fosse continuo , pur si compiacque d' altre nobili facoltà , e rivolse loro non radamente parte delle sue cure . Coltivò con gran senno le scienze sacre , non per ostentazione d' ingegno , ma per conforto di sua religione ; molte astrusità , e sottigliezze teologiche , eccitatrici di lunghissime gare , inutili , o piuttosto nocevoli al Cristianesimo abborrì . Prendeava singolare diletto della storia , perchè questa , come solea dire , grandi cose grandemente raccontasse . Quindi tenea conto di *Livio* , e moltissimi luoghi della terza Decade , parola per parola , piacendogli , ridea : que' tanti ammassi di nomi oscuri , e

di fatti frivoli, e d'inezie, e di cavilli genealogici, a cui si è dato per alcuni il nome di Storia, non senza qualche asprezza condannò, chiamandoli vani trastulli d'una femminile curiosità. Non rassomigliò punto quello spiacevole Geometa che fece beffe e strazio dell' *Ifigenia di Racine*, nulla di pregevole, a suo giudizio, essendo in un libro, in cui nulla era dimostrato rigorosamente; anzi ebbe un perfetto, e fino discernimento in ogni maniera di Poesia, e scrisse versi latini egli stesso, e il più delle volte con urbanità e grazia. Niuno, che abbia letto i libri di lui, gli negherà lode di eloquenza, considerando e la copia, e la chiarezza, e la bontà di stile, che gli adornano; nè i maestri stessi di Retorica negli scritti dogmatici sogliono desiderare più oltre. Ma ne' suoi ragionamenti apparivano, quasi per poco, tutte le virtù che sono proprie degli Oratori. Il suo dire quando vezzoso e piacevole, quando veemente, e gagliardo, sempre ornato, e splendido, e sparso di sentenze grandi e luminose intratteneva soavemente, e signoreggiava gli animi degli ascoltanti. Però nelle stesse familiari adunanze, e nei conviti niuno era, che volentieri non si tacesse per udir lui; niuno, che alle sue parole porgendo orecchio non se ne tenesse per soddisfatto. Ebbe molti amici. Non li mancò il favore dei Principi, che regnarono in Toscana. L'Imperadore *Francesco* gli concesse una cattedra nella Università di Firenze, e il titolo di suo Geografo; e premj ed onori gli accrebbe *Pietro Leopoldo*, che nel dominio di quella provincia all' Augusto suo padre succedendo, rinnovò presso noi gli esempj già disusati di *Marcaurelio*, e di *Traiano*. Più, e più stranieri per dignità, e per dottrina ragguardevoli l'ebbero caro, ed in pregio; e gli Accademici di Parigi, e quelli di Pietroburgo lo ascrissero nel loro numero. L'invidia non l'obblì; nè il poteva. Quando Erse divien graziosa agli Dei, v'ha sempre un' Aglauro che se ne duole. Sen-

za che le arti, che pur vagliono alcun poco ad ammanfar quella fiera, o ad infralirne almeno la crudeltà, o il nostro Matematico non seppe, o sapendole rifiutò. L' animo di lui nè altiero, nè orgoglioso, ma schietto, e nobile non poteva con accorte lusinghe, o con inganni piacevoli, o con abjezioni fervili, quasi con opportuno velame, temperare la grandezza della sua luce, perchè questa sofferta fosse dal livido sguardo de' suoi rivali. Nè dissimulò pure abbastanza il suo desiderio di gloria, nè credette che questa passione fosse poi tanto rea, che dovesse, in compagnia del vizio, nel silenzio nascondersi, e nella oscurità. Si vergognino coloro di sè medesimi, che lodi eligono, ed onori contro ragione, poichè non cercano di méritarli; ma qual colpa è nell' aspirare ad un premio nobilissimo, quando è giusta cosa, e ragionevole l' ottenerlo? Che altro ha in ciò, se non generosità, e grandezza d' animo? La quale chi togliesse agli uomini, non li farebbe egli e molli, e miseri di cuore, e pigri, o piuttosto ritrosi alla virtù? La gloria oggetto di tanti voti, e di tante speranze, e di fatiche sì lunghe, e sì gravi, è pur l' unico riparo, e conforto di nostra debole mortalità. Essa ne incendie gli animi, ne infiamma le menti di pensieri altissimi, di onestissimi desiderj; a lei rivolgono ogni loro cura Capitani, e Conquistatori, lei riguardano, lei seguono Legislatori, e Politici; da lei prendono consiglio, e norma e Letterati, ed Artefici. Non più degli altri *Leonardo Ximenes* la sospirò; ma non seppe, come tant' altri, all' ansietà di conseguirla l' affettazione congiungere di sprezzarla. Il che niuno certamente attribuirà a malvagità, nè a reato; alcuni eziandio vorranno ascrivere a candidezza e verità; i più fastidiosi chiameranno difetto, e imperfezione; ma quando fu in alcun tempo, od è per essere negli uomini una interissima, e per conseguenza più che umana virtù? Il sapiente degli Stoici è in così alta parte locato, che appena è con-

ceduto ai Metafisici di vagheggiarlo. Ma nel mondo fisico siccome nè robustezza, nè altra qualità del corpo fu mai tanto grande, che non lasciasse luogo al desiderio di una maggiore, così nè pure la virtù; nè questa somma, e divina perfezione credettero i Poeti verisimile nei figliuoli medesimi degli Dei. Tutto che sia forte, e magnanimo, e valoroso, e pio Enea: pur teme talvolta nei pericoli, e si duole, e d' amorosa fiamma s' accende; e Achille fervido, e impetuoso più che una severa Filosofia non vorrebbe, odio prende, e si sdegna.





MEMORIE

DI

MATEMATICA E FISICA

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

FATTE IN VERONA NEGLI ANNI 1788, 1789

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

Nelle Tabelle dopo il presente breve Discorso stan compendiate da circa 9000 osservazioni meteorologiche. Sono state fatte regolarmente tre volte al giorno: generalmente parlando, la prima al levar del Sole, che è il momento del maggior freddo; l'altra ad una o due ore dopo il mezzodì nel punto del maggior calore; e la terza due ore avanti mezzanotte.

Il termometro di cui mi servo è a mercurio: lo tengo esposto a tramontana in altezza di 69 piedi dal suolo: e l'intervallo tra il punto del ghiaccio fondente e quello dell'acqua bollente, presa mentre il barometro segnava pollici 28, vi è stato diviso in 80 parti o gradi.

La notizia delle osservazioni meteorologiche appartenen-
Tomo V. A

do ad ogni persona quantunque ignara de' simboli algebratici, mi conviene avvertire che il segno — , che ho usato nelle Tabelle , significa abbassamento del mercurio sotto il punto della congelazione; e che i numeri preceduti dal segno + , o non preceduti da alcun segno, additano all'incontro i gradi d'altezza del mercurio sopra il punto della congelazione.

L'altezza media del termometro, tolta dal biennio, va a gradi $10\frac{1}{4}$; quantità che si deve creder peccante per eccesso, in grazia del lungo estivo ardore, che abbian sofferto nel 1788. Tra l'equinozio di Autunno e quello di Primavera l'altezza media è dedotta dalle due prime osservazioni d'ogni giorno soltanto, esclusa la terza. Negli altri sei mesi, secondo accadeva ritardo nella prima osservazione per una e due ore dopo il levar del Sole, prendevo in surrogato la terza, onde avere il grado medio più esattamente.

L'altezza del mercurio nel barometro è espressa in pollici, linee, e centesime di linea del piede Parigino. Il mio barometro è a livello costante, diviso in quarti di linea, che vengono suddivisi dal nonio in venticinque parti. E' istromento di finissima costruzione del Sig. *Mégnié*: ed ha tutte le facilità per essere trasportato ed usato con ogni comodo e sicurezza.

L'altezza media del barometro data dal biennio è di 27 pollici, 9 linee, 94 centesime; che si scrive 27 9,94. Ridotta con accurate esperienze a livello dell'Adige in acqua mezzana, diviene 27 11,35; posta l'altezza media del termometro $10\frac{1}{4}$ giusta l'osservato finora. L'acqua mezzana nel nostro Fiume, cioè quella che meglio serve alla navigazione, batte, al dir di questi naviganti, all'incirca sul segno di piedi 4 nella pietra che vedesi a S. Salvar Corte Regia. Allora la sommità del muro di parapetto alle Beccarie d'Isolo è alta piedi parigini $10\frac{1}{2}$ sul pelo dell'acqua. Ho prescelto questo muro e questo sito, per trasportare a livello dell'Adige le osservazioni barometriche fatte nella mia Specola; posciachè il muro è solidissimo e può servir di confronto per secoli, e il sito è appresso poco nel mezzo della lunghezza del canale rinchiuso dalla Città.

Come poi l'altezza del barometro a livello del mare, adottata anche dal chiarissimo *Abate Oriani* (Tom. II. degli

Atti dell'illustre Società patriotica di Milano), è di 28 2, 23 ; così l'altezza del pelo dell' Adige nell' accennato sito dal livello del mare , tenendo conto della dilatazione prodotta dal calore con le regole del Sig. *de Luc* , verrebbe a stare in piedi 220. Ma questa determinazione non può esser molto sicura (fatta astrazione dalle discordanze possibili ne' barometri), finchè non sia ricavata da diverfi anni di osservazioni l'altezza media del barometro in Verona.

Debbo avvertire, che le mie osservazioni barometriche sono tutte prese , non dall' apice della colonna mercuriale , ma dagli orli della sommità . So che molti Filici prescrivono il contrario: ma come la superficie del mercurio, per l' adesione al vetro, si fa convessa quando si alza , e concava quando si abbassa ; così mirando a conseguire una compensazione mi sono attenuto ai labbri.

Il numero delle volte che fu osservato spirare ogni vento è come segue.

	<i>L.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>P.</i>	<i>Gr.</i>	<i>T.</i>	<i>O.</i>	<i>G.</i>
1788	385	334	268	262	203	168	144	135
1789	380	277	241	251	298	173	117	133

Le lettere iniziali dei venti significano: *L.* Levante , *M.* Maestro , *S.* Scirocco , *P.* Ponente , *Gr.* Greco , *T.* Tramontana , *O.* Ostro , *G.* Garbino .

Il numero de' giorni sereni, varj, nuvolosi e di pioggia fa duopo che intendasi nel modo seguente . Tre essendo le osservazioni fatte ogni giorno, bisogna dunque il numero di tre osservazioni per costituire un giorno . Per esempio l'esser notato nel mio registro tre volte pioggia costituisce un giorno di pioggia , ancorchè queste tre annotazioni siano forse state fatte in due od in tre giorni diverfi . Però li giorni, ne' quali ha piovuto o poco o molto , saranno stati senza dubbio assai più di 60 nel corso dell' anno 1788 ; ma il 60 vuol dire che sonovi nel mio libro 180 misure prele di pioggia caduta . Allo stesso modo s' intenda il numero de' giorni sereni, varj e nuvolosi : ma non così per quelli di nebbia , mentre sono veramente 16 nel 1788 , e 20 nel 1789 li giorni ne' quali v' è stato della nebbia.

Anche l'altezza della pioggia è espressa in pollici, linee,

e centesime di linea. Si deve però avvertire, ch'è stata raccolta in uno elevato piedi 71 dal suolo : poichè siccome le gocce in cadendo via via s'ingrossano sempre più, così la quantità della pioggia caduta sul terreno è da giudicarsi alquanto maggiore.

Si osservi che il mese d'Aprile è quello, nel quale è piovuto meno, così in un anno come nell'altro. Il mese di Luglio è stato il più abbondante di pioggia nel 1788, e quello di Ottobre nel 1789. Ciò non ostante la campagna nel primo anno ha patito molto per siccità, perchè la pioggia non fu generale ed è venuta in pochi tratti dirottamente.

Benchè il numero de' temporali del 1788 sia doppio di quello del 1789, le rovine della grandine sono state estremamente maggiori nell'ultimo. La più spaventosa nel 1788 fu quella che cadde nel dopo pranzo del dì 9 di Maggio per lo spazio di ben venti minuti: ma ancorchè folta e grossa recò pochissimi danni, perchè non accompagnata da vento, e ristretta prelo che solamente dentro il circuito della Città. All'incontro nel 1789 quella dei 29 di Giugno seminò la desolazione nella massima parte del nostro Territorio.

Non essendovi stato luogo nelle Tabelle per la neve, riferisco qui, che il Novembre 1788 ha avuto 4 giorni, e 3 il Dicembre, ne' quali è caduto neve abbondantemente, in altezza di pollici 15 $\frac{1}{2}$ in tutto. L'anno 1789 ebbe poi 3 giorni di neve in Gennajo in altezza di sei pollici; 3 in Marzo, ed uno in Aprile, in poca quantità.

L'anno 1788 sarà memorabile, per li contrarj eccessi del caldo e del freddo. Il suo inverno proprio è veramente stato mitissimo, non essendosi abbassato il mercurio nel termometro, se non che a gradi $4 \frac{1}{2}$ sotto la congelazione; nè vi fu stalla di neve. Ma il caldo è poi stato insopportabile, specialmente per la sua lunga pertinacia. Il maggiore alzamento del mercurio nel termometro non passò veramente i gradi 28 $\frac{1}{2}$; però si tenne da 24 Maggio a 28 Luglio, salvo due giorni, senore di sopra dei 20 gradi sulle due ore circa dopo il mezzodì. La lunghezza ed intensità del caldo appariscono pure dal calor medio, o sia temperato, desunto dalla somma delle osservazioni di tutto l'anno, e che oltrepassa i gradi 11. Finalmente l'anno andò a termine con acutissimo straor-

dinario freddo, che incominciò li 14 Dicembre, e durò fino al 12 del susseguente Gennajo, essendoli abbassato il termometro nella notte penultima dell'anno fino a 12 gradi sotto la congelazione. Il Sig. *Flaugergues* di *Viviers* fa vedere (*Journal des Sçavans pour le mois de Mai de 1789*), che questo freddo sta del pari con quello degli anni 1709, 1716, almeno in Parigi. Riducendo ad uno stesso modulo li termometri antichi a spirito di vino con li moderni a mercurio, trova la scala che segue: 1709; 17°, 57; 1716; 17°, 79; 1788; 17°, 65.

Avanti il plenilunio dei 5 d'Agosto 1789 si son qui sentite due lievi scosse di terremoto: cioè il dì 3 a ore 10 della sera, e il dì 4 a ore 5; mentre il vento spirava da Scirocco-Levante, il mercurio nel barometro stava tra li 28 pollici ed una linea di sopra, nella mia Specola, il termometro segnava 19 gradi, ed il cielo era sereno. La prima scossa fece fermare il mio pendolo.

Nel mese di Ottobre 1789, che fu piovosissimo, l'Adige allagò buona parte della Città, e la massima piena ne' dì 11 e 12 superò di piedi 1 pollici 11 la sommità del muro di parapetto delle Beccarie d'Isolo, che sopra ho preso per punto di comparazione, e per conseguenza li alzò piedi 12 $\frac{1}{2}$ circa dal suo livello mezzano. La proporzione del piede di Parigi a quello di Verona è come 20 a 21 esattamente.

1788 Mesi.	Altezze del Termometro.			Altezze del Barometro.			Venti dominanti.
	Minima.	Media.	Massima.	Minima.	Media.	Massima.	
GENNAJO.	— 4 $\frac{1}{2}$	+ 2 $\frac{1}{2}$	8	27 5,11	27 10,54	28 3,42	M. L.
FEBBRAJO.	— 3 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	12	2,06	8,89	2,86	L. S. M.
MARZO.	+ 1	9 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{4}$	4,50	7,61	0,84	L.
APRILE.	1	13	24 $\frac{1}{2}$	5,37	10,92	3,01	L.
MAGGIO.	7 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{4}$	26 $\frac{2}{3}$	8,50	11,32	1,82	L.
GIUGNO.	12	18 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	7,56	9,91	0,35	M.
LUGLIO.	11 $\frac{1}{4}$	21	28 $\frac{1}{2}$	9,50	10,84	0,79	L. M. Gr.
AGOSTO.	10 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	7,38	10,47	1,02	Gr. L.
SETTEMBRE.	8 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	24	7,81	10,93	0,98	M. P. L.
OTTOBRE.	2 $\frac{1}{2}$	11	21	6,72	11,14	3,25	L. S.
NOVEMBRE.	— 3 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{4}$	13	8,61	11,47	4,19	M. P.
DECEMBRE.	— 12	— 0 $\frac{1}{2}$	9	1,45	6,57	27 11,51	M. P.
ANNO.	— 12	11 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	27 1,45	27 10,05	28 4,19	L. M.

1788 Mesi.	Giorni sereni.	Giorni varj.	Giorni nuvolosi.	Giorni di pioggia.	Giorni di nebbia.	Quantita della pioggia	Numero de' temporali.
GENNAJO.	13	4	8	4	3	POL. 3 4,46	
FEBBRAJO.	7	4	11	6	7	3 10,20	
MARZO.	7	8	12	9		2 6,26	
APRILE.	15	10	4	2		0 6,11	2
MAGGIO.	9	14	7	5		2 8,20	3
GIUGNO.	9	14	5	7		3 5,23	1
LUGLIO.	14	13	2	6		6 2,48	4
AGOSTO.	13	15	1	3		2 5,10	1
SETTEMBRE.	13	9	6	5		3 11,62	1
OTTOBRE.	15	9	4	1		0 6,50	
NOVEMBRE.	6	6	9	6	3	2 11,97	
DECEMBRE.	7	5	12	6	3	3 5,05	
ANNO.	128	111	81	60	16	35 11,18	12

1789 Mesi.	Altezze del Termometro.			Altezze del Barometro.			Venti dominanti
	Minima.	Media.	Massima.	Minima.	Media.	Massima.	
GENNAJO.	— 11 $\frac{1}{2}$	0	8 $\frac{1}{2}$	27 4,08	27 10,63	28 2,94	M. P.
FEBBRAJO.	— 2	3 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{4}$	26 10,07	8,58	2,25	M. S. P.
MARZO.	— 2 $\frac{1}{4}$	5 $\frac{1}{4}$	13 $\frac{1}{2}$	27 1,94	5,98	27 9,42	L.
APRILE.	— 1	13	21	3,72	9,57	28 0,16	L.
MAGGIO.	+ 8 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{2}{3}$	25	7,10	10,56	1,37	L. M. Gr.
GIUGNO.	9	16 $\frac{1}{10}$	26	5,61	9,92	27 11,96	L.
LUGLIO.	10 $\frac{1}{7}$	19 $\frac{4}{5}$	28 $\frac{1}{4}$	6,90	10,36	28 0,98	L.
AGOSTO.	8	18	28	7,42	10,63	1,42	L.
SETTEMBRE.	7	15 $\frac{2}{6}$	24 $\frac{1}{2}$	6,22	10,85	3,27	P.
OTTOBRE.	6	11 $\frac{1}{10}$	21	3,54	9,34	2,70	M.
NOVEMBRE.	— 4 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{5}$	12	2,73	8,75	2,78	L. Gr.
DECEMBRE.	— 5	1	6	3,32	28 0,82	4,32	Gr. P.
ANNO.	— 11 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{2}{3}$	28 $\frac{1}{4}$	26 10,07	27 9,83	28 4,32	L.

1789 Mesi.	Giorni fereni.	Giorni varj.	Giorni nuvolosi.	Giorni di pioggia.	Giorni di nebbia.	Quantita della pioggia.	Numero de temporali.
GENNAJO.	5	3	13	7	11	POL. 2 3,78	
FEBBRAJO.	9	8	8	4		1 9,49	
MARZO.	3	9	15	9		2 9,01	
APRILE.	10	9	11	4		0 6,10	1
MAGGIO.	11	14	4	4		3 6,00	2
GIUGNO.	12	8	9	6		2 0,74	3
LUGLIO.	15	9	5	3		1 8,56	
AGOSTO.	10	11	9	5		2 8,40	
SETTEMBRE.	10	13	5	7		2 8,39	
OTTOBRE.	6	10	8	12	1	6 2,68	
NOVEMBRE.	10	10	8	7		3 10,54	
DECEMBRE.	14	2	6	5	8	0 10,65	
ANNO.	115	106	101	73	20	31 0,34	6

A P P E N D I C E

ALLA MEMORIA INTORNO

L A

DOLCIFICAZIONE DELL' ACQUA DEL MARE

INSERITA NEL III. VOLUME DELLA SOCIETÀ
ITALIANA.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Dopo la mia Memoria pubblicata nel III. Volume della Società Italiana del 1786 intorno all' argomento della dolcificazione dell' acqua del mare, in cui esposi il metodo sicuro di purificare e render bevibile l' acqua marina; molte cose se ne sono dette oltramonte e scritte, ma confusamente, e quasi per relazione; e come se in una parte dell' Europa non tanto sconosciuta, com'è l'Italia, non ne fosse stata fatta appositamente amplissima trattazione. In vece di rifare le sperienze, di ben intendere il semplicissimo artificio, che convien usare perchè l' acqua nello sgelarsi non riprenda in diluizione le sostanze saline precipitate nella congelazione, e di avvertire, che per lo più non si fa compiutamente la separazione nè in uno, nè in due agghiacciamenti, e che bisogna tor via il primo gelo dall' acqua rimasta liquida e carica de' sedimenti, farlo sgelare, e rigelare di nuovo coll' artificio di prima, perchè precipiti al' tra parte di sostanze straniere rimaste nel primo gelo, e poi di bel nuovo tor via questo secondo gelo dall' acqua non rappresa, liquefarlo nuovamente e rigelarlo per la terza volta, e così fino all' intera purificazione: in vece, dico, di sperimentare e far tutto questo, si questiona se alcuni ghiacci de' mari settentrionali trovati dolci, se quei del Sud riconosciuti pur dolci sieno ghiacci d' acqua fluviale, o marina; mentre il problema è deciso fin dal 1786, e basta leggere la Memoria sopraccitata e ritar le sperienze per accertarsene. Almeno il Sig. *Nairne*
dotto

dotto Fisico di Londra mosso da simili discorsi passò al fatto; onde vo' qui tralcrivere il suo procedimento, come sta esposto nel Giornale di Parigi n.º 74 di quest'anno 1789. Avendo preso in un vase dell'acqua di mare „ *l'exposa au grand air dans un endroit où le Thermometre de Pharenheit étoit à 15° (à peu près 7½ de Reaumur au dessous de zero). Le lendemain la plus grande partie de cette eau étoit changée en glace très dure; il posa ce glaçon à une chaleur d'environ 10° de Reaumur. Au but de quelques heures le glaçon . qui étoit réduit à 3½ pouces de longueur sur deux de diametre fut lavé dans un seau d'eau . et placé ensuite sur un tamis pour en separer toute l'eau dans laquelle il avoit été lavé. Cette glace ainsi preparée fut mise ensuite dans un bassin . & exposée à une chaleur très douce; 9 heures après la glace étant toute fondue, l'eau qu' on obtint se trouva parfaitement douce . „*

La natura da per sè con la spontanea congelazione non può subito dolcificare l'acqua marina, perchè il primo agghiacciamento non precipita nè men due terze parti de' sali ch' ella contiene (Veggasi la mia Mem. Vol. III. della Società Italiana pag. 389 390). La onde se i lastroni , e le isole di ghiaccio natanti ne' mari settentrionali , e australi sono perfettamente e rigorosamente dolci, non appartengono certamente all' acqua marina. I primi sono verunilmente acque fluviali congelate, e trasportate in alto mare dalle correnti; e le isole non sembrano essere che nevi sopra nevi stivate a grandi altezze, ed agghiacciate. La neve cadente si ammon-ticchia sopra una grande quantità di lastroni ondulanti pel mare, lega e commette i più prossimi, e fa di loro il primo strato fondamentale della fabbrica sommergendoli a poco a poco profondamente sott' acqua. E vero che anche dopo la prima congelazione, il ghiaccio dell' acqua marina strutto somministra un' acqua assai limpida , e meno disgustosa che non è in istato naturale; ma non è assolutamente dolce, come parve di trovarla al Sig. *Nairne*. E bene sta, che una parte solamente dell' acqua marina da lui adoperata si agghiacciasse, uchè potè farvi precipitazione nel rimanente dell' acqua; altrimenti se tutta si fosse gelata, e poi tutta sgelata, sarebbe tornata nello stato di prima.

Se la cosa non fosse importantissima , mi farei contento

di aver fatto quel passo, che può vedersi nella Memoria men-
tovata, e avrei atteso in silenzio la tarda ma sicura giustizia
che fa il Pubblico agli uomini, che studiano di meritarsela.
Ma non parendomi infruttuoso il promuovere una tale ricer-
ca anche con altri sperimenti, onde confermare sempre più
ciò che ho detto alla pag. 385 intorno all'agghiacciarsi dell'
acqua, e il detto alla pag. 386, che per vie diametralmen-
te opposte viene a capo de' medesimi effetti la natura,
mostrando il fatto, che la perfetta cristallizzazione, e la tran-
quilla evaporazione naturale dell'acqua sono patentemente due
capitali operazioni estreme, le quali convengono insieme nel
disimpegnare e liberare l'acqua da principj stranieri, ravvi-
cinandola per opposti mezzi allo stato di acqua purissima,
alle mie aggiugnerò due sperienze fatte dal Sig. *Vincenzo*
Bozza molto versato nella Chimica, e noto pel raro museo
d'Ictioliti ch'egli possiede. Prima però di esporle sia lecito
di far palese il metodo semplicissimo che or soglio tenere nel-
le reiterate congelazioni, perchè non cada sotto la seconda che
l'acqua sola depurata sotto la prima, e così successivamente,
gettando via di mano in mano i residui liquidi, ove sono
concentrate le posature. Verso il liquore in bocce di piccola
bocca, riempiendone al più tre quarte parti della capacità. Ot-
turo esattamente con sovero, od altro tale turacciolo, e
seppellisco la bocca, e due tre dita della boccia nella sabbia,
sicchè resti fuori col fondo in su la boccia col liquore. Se la
congelazione deve farsi per freddo naturale, basta esporre all'
aria libera la boccia in questo stato; e se la congelazione de-
ve essere artificiale, la sabbia, e la boccia vanno mede in
vase capace, sicchè possa stivarsi intorno alla boccia sopra-
stante il ghiaccio naturale posato su la superficie della sabbia.
Fatto l'agghiacciamento, resta sempre l'acqua difesa dalla
sabbia in istato di liquore, e però sturata la boccia si faccia
escire il medesimo liquore, ritenendo la parte gelata. Questa
è la prima congelazione. Si faccia liquefare il gelo, e il
nuovo liquore o nella stessa, o in altra boccia si sottomet-
ta alla seconda congelazione nel modo di prima, e così suc-
cessivamente, finchè l'acqua si purifichi perfettamente. Così
deve essere praticato coll'acqua del mare, se la si voglia dol-
cificare perfettamente, e si troverà, che nè due, nè tre con-

gelazioni non bastano perchè a prova di tutti i reattivi non dia ella indizio di sostanza straniera in dissoluzione. Ecco ora le mie nuove osservazioni, le quali comprovano il potere efficacissimo della congelazione nel purificare l'acqua.

I. ESPERIMENTO.

Essendo torbidissimo e terroso l'Adige nel mese di Luglio del 1788 oltre misura, riposi in due boccie di quest' acqua fumale, e col metodo qui sopra descritto sottoposi alla congelazione artificiale col ghiaccio e sal marino una di queste due parti d'acqua, serbando l'altra per confronto. Quatt'ore circa dopo, estrarra la boccia, feci uscire la porzion d'acqua rimasta liquida mettendola in un ampolla, e fatto liquefare il gelo, n' ebbi un' acqua, che non aveva sapor terroso al gusto, e ch' era chiara e limpida come l' acqua di fonte. Quella dell' ampolla era incomparabilmente più cupa e limacciofa dell' altra ch' era serbata pel confronto, e questa medesima era niente men torbida di prima, scorgendoti appena nel fondo della boccia un principio di spontanea posatura.

II. ESPERIMENTO.

Versai da un vase più grande in una boccia dell'acqua minerale di Recoaro da 30. ore circa attinta alla fonte. E noto e dalle mie proprie osservazioni pubblicate del 1780, e dalle anteriori degl' illustri Signori *Beccari*, *Arduino*. ed altri dotti Filici, che quest' acqua è marziale, e che contiene in oltre della selenite, e della magnea vitriolata. Esposi pertanto all' artificiale agghiacciamento l' acqua di Recoaro. Il primo gelo tolse all'acqua tutto il sapore acidulo astringente di cui è dotata. Ne sottoposi perciò una porzione all' evaporazione, e vedendo, che lasciava un pò di sedimento sul piattello, tornai a far gelare il rimanente, e con la seconda congelazione, gettando sempre via la parte che restava liquida nelle bocce, ottenni un' acqua inipida, scolorata, e simile all' acqua naturale. E per compiere l' esperimento ne feci in piattelli di porcellana svaporare al sole, e non ne restò che leggermente appannato il fondo. Decomponesi dun-

que quest' acqua minerale con due congelazioni , e si spoglia de' suoi principj , riducendosi alla condizione dell' acqua comune .

III. ESPERIMENTO .

Nel verno rigidissimo del 1788-1789 essendo il Mercurio 12° sotto il gelo nel Termometro di *Reaumur* , esporsi una fiera all' aria aperta in vase di terra verniciata dell' urina umana . La mattina trovai agghiacciato il liquore , e nel muovere il vase accorgendomi che la parte di sotto era rimasta liquida , riconobbi che l' esperimento era a dovere . In fatto praticai un foro nella lastra superiore , ch' era grossa poco men di un pollice , e fattone uscire il liquore sottoposto , l' osservai rosso cupo come il mattone pestato , e denso assai . Estratto il gelo , lo lavai tre volte in acqua pura . Rotto poscia , e messo in vase di vetro lo feci liquefare , e filtrare per doppia carta non collata . Non era che acqua schietta e limpida senza odore , senza sapore , e non distinguevasi dall' acqua di fonte che nell' essere men vivace , sfocia , e non tanto scorrevole .

IV. ESPERIMENTO .

Ma per ottenere un effetto ancor più dimostrativo di questo s' è possibile , mi proposi di purificare di quel liquoraccio giallo-nericcio ch' esce da letamaj e stagna in qualche buca vicina , in cui l' urina animale s' accoppia a molte altre impurità . Siccome mi parve , che dovette difficilmente depurarsi , ne ho distribuito ben dieci libbre in vari separati , e le ho tutte poste a congelarsi di notte sopra una loggia , che guarda tramontana , mentre nello stesso verno intieriva il freddo tra 11. e 12. gradi sotto al zero nel predetto Termometro . Se la sommità del gelo non avesse preso una tinta più languida che non vedevasi nel restante , poco mi sarei consolato dell' esito della prima congelazione . Estratte pertanto le parti gelate , e lavate nell' acqua pura , le feci sgelare , e le tornai a distribuire liquide ne' medesimi vasi , gettati via i residui . Esposte al freddo della notte susseguente , cominciò es-

servarfi il mattino dopo essere men colorato il gelo, e l'acqua poi che ne venne, men fosca, e più scorrevole di prima. Liquefatto di bel nuovo il gelo, l'esposi per la terza volta alla congelazione. N'ebbi un gelo biancastro-cupo. Fattolo sgelare, e riposto in due vasi separati il liquore, tornai per la quarta volta ad esporlo su la loggia al freddo della notte. Il mattino susseguente ebbi il piacere di estrarre due pezzi di gelo, i quali lavati, liquefatti, e filtrati somministrarono un'acqua, che non ebbi nausea di gustare, e che per verità non trovai nauseola. Ma contento di questo non cercai di portarla alla massima purità, con nuove congelazioni, tanto più che me n'era rimasta piccola quantità, e che vedeva patentemente, che l'avrei ridotta cristallina come l'acqua di fonte. Ecco le due sperienze del Sig. *Bozza*.

I. ESPERIMENTO.

Sciolsi, dic' egli, nell'acqua dell'argilla figulina di color grigio delle più tenaci, l'agitai per due giorni di quando in quando perchè le parti più fine si unissero sempre più all'acqua, levando via di mano in mano quella parte, che trovava precipitata al fondo. L'acqua aveva preso un color di paglia cupo, e un sapore terroso sensibilissimo. Versata una porzione di quest'acqua in vase di vetro, e turata la bocca del vase, fortterrai sotto la sabbia con la bocca una parte anche del vase, e circondai di ghiaccio pestato asperso di sale marino la parte soprastante, serbando l'altra porzione per confronto. Dopo alquante ore estratto e sturato il vase raccolli in altro vase separato la parte rimasta liquida, e feci liquefare il puro gelo dopo di averlo ben lavato coll'acqua comune. L'acqua che n'ottenni era quella precisamente che aveva adoperato da principio, pura, cristallina, intipida, e l'altra raccolta separatamente dal ghiaccio era incomparabilmente più fosca della porzione serbata da principio, ed aveva un sapore terroso ingratisimo, che quella non aveva.

II. ESPERIMENTO.

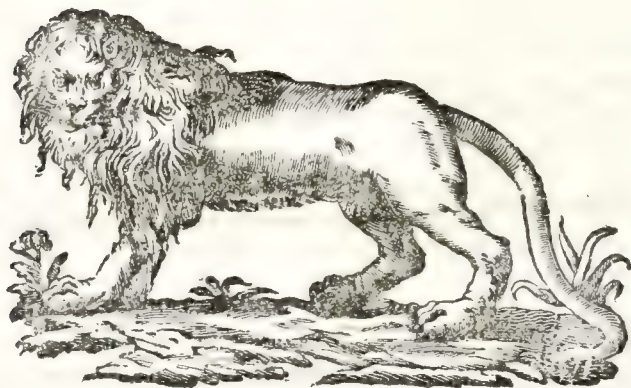
Acidulata, aggiugne egli, in un vafe dell' acqua puriffima con alquante gocce d' acido vitriuolico, v' infusi buona dose di tintura di tornasole. Prese l' acqua un vivaciffimo color di rubino. La sottopofì alla congelazione artificiale feppellendo la bocca e parte del vafe nella fabbia, com' è detto qui sopra, e dopo poche ore eſtratto il vafe, laſciata uſcire la parte liquida, e lavato il gelo con acqua comune, ho riavuto l' acqua limpidiffima di prima.

Non ſembra, che ſia fatto molto caſo per l' addietro di queſto nobiliſſimo magiſtero di Natura, che come ho detto nella memoria ſopraccitata, era in qualche modo conoſciuto e familiare negli aceti concentrati, ne' vini diſacquati per congelazione, e in altri ſimili fenomeni. Ed è appunto dietro a queſte apparenze che mi ſon moſſo a cercare la dolciſificazione dell' acqua marina, parendomi, come ho poi trovato vero, che nel criſtallizzarſi l' acqua, a guiſa de' ſali affettasse l' aggregazione delle proprie parti ſimilari, ed eſcludesse qualunque ſorta di principio ſtraniero.

Ma ficcome la prima congelazione ordinariamente non toglie tutti all' acqua i principj ſtranieri che può ella contenere; e non era trovato ed accertato prima d' ora che biſogna procurare che una parte dell' acqua che ſi vuol depurare reſti liquida, e riceva le poſature dell' altra che ſi gela; e che per una ſeconda congelazione non biſogna adoperare che la ſola parte gelata fatta liquefare, e ſimilmente per una terza, e per tutte l' altre ſucceſſive congelazioni; così ſon nati degli equivoci, delle incertezze, e non ſi ſono poi ſpinte tant' oltre le ricerche come poteva farſi. Non è dunque la ſola dolciſificazione dell' acqua marina, che poſſa ottenerſi con ripetuti agghiacciamenti praticati coll' artificio che ho detto e ridetto di tor via il ſolo gelo in ciaſcuna congelazione, abbandonando il reſtante; ma per queſte nuove ſperienze è luogo a preſumere, che poſſa non averſi acqua impura, e preſogna di ſtranieri principj, la quale non poſſa affrontarſi, e ſcomporti per queſta via. Altro però farà il caſo di dette ſoſtanze chimicamente diſciolte nell' acqua, ed altro ſe non

vi sieno che meccanicamente sospese. Nel secondo caso una o due, e bene spesso una sola congelazione basterà per depurarla perfettamente. All'oppoito nel caso di combinazione, com'è per appunto nell'acque del mare, e in altre simili, sarà sempre mestieri di reiterati agghiacciamenti per condurle ad una completa purificazione, replicando più volte la decomposizione; giacchè sembra dal fatto adoperare l'agghiacciamento a guisa d'intermezzo che s'impadronisce dell'acqua, cioè del dissolvente, onde le sostanze restando abbandonate precipitano necessariamente. E questo, in prova di quanto hanno osservato nelle loro esperienze intorno al ghiaccio naturale gl' illustri Accademici del cimento, fa vedere che non è istantanea la congelazione, e che ha ella un ordine, una successione di rappigliamenti, per cui è luogo all' estrusione de' principj stranieri nell'aggregarli che fanno i principj simili dell'acqua. L'argomento pertanto merita tutta l'attenzione de' Finici, se non erro. Oltre all'uso, che può farlene ne' processi chimici, e in molti bisogni della Finca, può non essere ultimo oggetto di utilità il rendere bevibili per questo mezzo molte acque della terra rifiutate dagli uomini come insalubri, che pur sarebbero comodissime ed opportune per la vicinanza, come accade di molti laghi, stagni. e di non pochi fiumi. Raccogliendo nel verno il gelo superficiale, che vi si forma, almeno lungo le ripe, e riponendolo in cisterne, ed altre tali preparate conserve accessibili all'aria libera, e al calore (non trattandou di formar ghiacciaje), somministrerebbe liquefatto un'acqua molto più pura, scorrevole, e salubre, che non è per avventura in istato naturale. E forse avrebbevi il prezzo dell'opera se quest'acqua dovesse per maggior purificazione congelarsi un'altra volta, purchè fossero disposte le cose in modo che nella congelazione restasse liquida parte dell'acqua sotto il ghiaccio, come ho ben fatto comprendere superiormente. L'acqua procedente da questo gelo liquefatto resta priva di molt'aria, che conteneva ne' suoi interstizj, ed è però che più sfocia, e men vivace apparisce che non era prima della congelazione. Al che può non difficilmente rimediarsi col batterla, e attignerne dalla conserva, e riversarla dall'alto nella medesima, o in altra conserva. E quì fa d'uopo che si rettifichi l'errore

manifesto preso su questo proposito a Pietroburgo da un Medico d'altronde rispettabile della Flotta Russa, il quale (se è vero ciò che ne dicono i pubblici foglj) ha proposto per uso degli uomini di mare di far conserva dell' acqua della Neva presa sotto il ghiaccio, e di farla di bel nuovo agghiacciare, serbando in cisterne l' acqua che resta liquida tra il nuovo ghiaccio e il fondo; precisamente al contrario di quello che va fatto. Una relazione vaga delle sperienze fatte in Italia l' ha indotto probabilmente in errore, non essendo per avventura giunto a quell' epoca all' Accademia Imperiale il III. Volume della nostra Società; del che basti, che non sia fatta menzione in questa Appendice.



MEMORIA

INTORNO

ALLE MAPPE, E ALLA SFERA DI RIDUZIONE
PER L' ARTE NAVIGATORIA.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

CAPITOLO PRIMO

Della Loffodromia, e delle Carte di Riduzione.

§. I.

L'Arte Navigatoria è quella parte della Scienza Navale, che insegna a viaggiar sul mare con un vascello, ben distinta dall'altre che la costruzione del vascello riguardano, e il maneggio del vascello nel navigare. Nel cammino obbliquo, ove non si tratta di correre nè secondo un meridiano, nè per un parallelo, il mezzo facile e più di tutti sicuro che s'è offerto agli uomini, è stato ed è quello di proceder sempre per un dato angolo di direzione da farli co' meridiani successivi, cioè con la direzione de' meridiani mostrata dall'ago calamitato. La traccia pertanto del vascello sul mare segnata sotto un angolo costante i meridiani terrestri è stata detta Loffodromia; e tutta l'arte del navigare versa intorno agli accidenti, e alle condizioni varie di questa linea, secondo ch'è supposta descritta sulla Terra sferica, o non isferica in conseguenza dello schiacciamento che il nostro globo mostra di avere ai poli. E come, per essere la figura fisica della Terra, indipendentemente da qualunque ipotesi, totalmente indeterminata, è stato preso il partito di ricorrere a curva di rivoluzione, e di adottare in ispecialità nel supposto della Terra non isferica, l'ellisse conica familiare, e non molto

Term. V.

C

discordante dal circolo; così altri hanno insegnato a dirigere la navigazione su la Terra sferica, come *Mercator*, *Wright*, *Wallis*, *Perks* ecc., ed altri sull' ellissoidica, come *Waltz*, *Murdoch*, *Maupertuis* ecc. Il Sig. di *Caluso* sta pur tutt' ora occupato intorno alla navigazione sull' ellissoide, del che avremo frutto quanto prima nelle Memorie dell' Accademia Reale di Torino alla virtù proporzionato di questo illustre Geometra Italiano. E certamente mal conoscerebbe l' indole delle curve chi da sè non vedesse, che tutt' altra deve essere la linea lossodromica su la sfera da quella sull' ellissoide. Cade però qui in acconcio di fare una riflessione intorno a queste due ipotesi, che mi pare non ancora avvertita. Si faccia buono un divario sensibile dall' una all' altra ne' risultamenti per una navigazione, come lo vuole il *Maupertuis* (Mem. dell' Acc. R. di Parigi del 1744 pag. 466.). A me sembra che questo divario, quand' anche fosse maggiore, non accrediti punto nè poco la seconda sopra la prima senza fare una tacita supposizione, che la figura ellissoidica sia la vera, o almeno che la figura ellissoidica più della sferica somministri risultamenti prossimi al vero. Ma qual è la norma, quali i limiti del vero in questo argomento, se non si supponga noto ciò ch' è in questione? Qual potrebbe essere la navigazione lossodromica tanto accertata, con cui potessero le due ipotesi, come a pietra di paragone, confrontarsi? Ciò non deroga per alcun modo al merito di tante preziose ricerche, di tante misure di gradi, e di lunghezze del pendolo in diverse parti della Terra. Elle ci fanno vedere a chiare note, che intorno alla figura della Terra non è ancora permesso di prendere accertato e stabile partito; ed altro non permettono a' nostri studj fuorchè di appropriar per ora alla Terra quella figura, che soddisfaccia a tutte insieme più da vicino, cioè accomodata ai fatti attuali senza dar luogo a mentali divisamenti.

§. II.

Come però non dobbiamo stancarci giammai di porger lume ed ajuto all' arte nautica quant' è in potere di somministrarle la scienza, a cui deve ella tutti i suoi progressi; co-

sì, giacchè non v'è dimostrazione severa che obblighi più all' una che all' altra ipotesi , farà sempre utile e prezioso il guidar l' arte sì nell' una che nell' altra ; perchè col fatto , e con la giornaliera esperienza a quella maniera si appigliano i naviganti , che riuscirà loro più sicura e comoda di tutte. M' accingo dunque a due cose

I. A perfezionare le Carte di Riduzione.

II. A proporre per nuovo soccorso nell' arte navigatoria la riduzione della Sfera Artificiale.

E il fo in supposizione della Terra sferica tanto più sicuramente , che vi sono scortato dallo stesso Sig. *Bouguer* , il quale ad onta della parte , e dell' impegno che aveva di conchiudere tra' primi la sferoidità della Terra , non esitò di dire nel suo Trattato di Navigazione alla pag. 47 parlando della compressione ai poli : *On peut aussi se dispenser d' y avoir égard dans la marine , & continuer de considerer la Terre comme un globe parfait.*

§. III.

Le carte di riduzione non possono , nè debbono rigorosamente parlando appartenere alla Geografia , non essendo elle destinate a descriverci in piano le parti superficiali della Terra , *quatenus quante sunt* , ma unicamente a servire all' uso particolare della navigazione . Elle vanno considerate come costruzioni artificiali , come strumenti inventati per risolvere i quesiti del *Pilotaggio* , se così è permesso di denominare nella nostra lingua l' arte del Pilota . Sublime per verità è stato l' assunto de' Sigg. *Euler* (Atti dell' Acc. Imp. di Pietroburgo 1777), e la *Grange* (Mem. dell' Acc. R. di Berlino 1779) di prendere in un ampio senso la rappresentazione di una superficie sferica sopra di un piano etibendo sul piano i punti della sfera secondo qual ti voglia legge ; ond è facile da vederli , che hanno potuto per tal via abbracciare sotto un certo aspetto anche le carte ridotte . Ma l' oggetto non cangia natura per questo . Lodevolissimo per altro è il lavoro di questi grandi Geometri , e l' occasione di differrare intorno alle varie leggi colle quali possono immaginarsi fatte le rappresentazioni ha dato luogo tra mani sì potenti

a molte speculazioni di Analisi finissime . Sembra pertanto che la vera carta idrografica , o marina che voglia dirsi , in senso geografico non altro debba rappresentare che la Mappa di un' estensione reale di mare messa in pianta con isole , porti , litorali ecc. che vi sono compresi ; in cui non entra essenzialmente la lossodromia de' vascelli che vogliono percorrerla . Ma o sieno per qualche verso comprese nella Geografia le carte di riduzione , o debbano esserne escluse , come io credo , avuto riguardo all' uso singolare cui sono destinate ; non è possibile di preparare sopra una carta piana costruzione più bella per l' uso della navigazione di queste carte . Un' imperfezione però restava loro d' intorno nel misurare in fatto sulla carta così le lossodromie , come le così dette miglia di longitudine , o il lato mecodinamico . Una tale imperfezione è tolta interamente in questa Memoria .

§. I V.

Ma non altrimenti che m' è sempre paruto strano , che non si fossero per l' innanzi avvisati gli uomini dotti di sbandire dalla Geografia la Prospettiva , e di rappresentare le parti superficiali della Terra , comunque irregolari , appianate sulle Mappe , non disformate , e ritenenti la loro precisa estensione , che hanno sul globo ; non seppi neppur comprendere perchè , prima di cercare mezzi più composti , non si fosse rintracciato modo di maneggiare sopra un globo artificiale tutta l' arte navigatoria . Così è stato fatto per l' Astronomia , così per la Geografia . La linea lossodromica sarebbe riuscita una spirale com' è di fatto ; i paralleli , i meridiani sarebbero stati come sono sul globo naturale , e così gli angoli lossodromici , quello che debbono essere ; e finalmente l' estensione del mare , i litorali , i porti , le isole ecc. tutto vi sarebbe stato situato com' è naturalmente sul globo terraqueo . All' oggetto della Geografia ho cercato di supplire convenevolmente nel mio libro , che ha per titolo *Principj di Geografia astronomico-geometrica* , presa la rappresentazione delle parti superficiali , qualunque siasi la curva di rotazione generante la figura terrestre , sotto tutt' altro aspetto da quello de' prelodati Geometri . A questo della navigazione mi fo a sod-

disfare pienamente nella presente operetta . Nel che mi basta , che sia ben accolto il desiderio che ho coltivato di porgere , com' era in mio potere , al Pilotaggio un nuovo soccorso , quello finalmente ch' esser doveva in ordine anteriore a tutti .

§. V.

Mi fo pertanto a premettere alcune nozioni preliminari intorno alla loffodromia , note da gran tempo , le quali accoppiate ad altre meno avvertite , hanno dato luogo al soggetto di questa Memoria . Siccome però chi dirige il viaggio nelle grandi navigazioni è sempre versato convenevolmente nell' Arte ; così m' astengo dall' esporre le cose in via elementare : supposte nell' uomo intendente tutte le cognizioni necessarie che ommetto , col proposito di dire soltanto ciò che ho da dir di nuovo in questo argomento .

Rappresenti pertanto (*Fig. 1.*) *PAM* la superficie della Terra ; *P* il polo ; *AM* l' equatore ; *PA* , *PC* , *PD* ecc. i meridiani , *A EFGK* la linea loffodromica segante i meridiani sotto l' angolo costante *PAE* ; *IF* , *HE* ecc. gli archi de' paralleli corrispondenti alle parti della loffodromia *EF* , *FG* ecc.

Proprietà conosciute di questa linea sono , che se sieno i meridiani *PA* , *PC* , *PD* ecc. pochissimo distanti tra di sè , e sieno pur tra sè uguali tutte le distanze de' paralleli *GI* , *FH* ecc. ;

I.

Le parti della loffodromia *GF* , *FE* ecc. sono tra di sè uguali .

I I.

Le lunghezze assolute degli archi de' paralleli *IF* , *HE* , ecc. sono pur tra di sè uguali .

I I I.

Le parti della loffodromia *AE* , *AF* , *AG* ecc. sono tra di sè rispettivamente come le latitudini *CE* , *DF* , *BG* ecc. ; e

le differenze di dette parti loffodromiche come le differenze delle latitudini corrispondenti.

I V.

Le lunghezze assolute degli archi GI IF , come pure degli archi FH HE ecc., e in conseguenza le lunghezze assolute della latitudine GB , e della somma delle lunghezze $IF + HE$ ecc. detta altrimenti lato mecodinamico, sono tra di sè in costante ragione del coseno al seno dell'angolo loffodromico IGF , e sia del seno tutto alla tangente del medesimo angolo.

V.

Similmente le lunghezze assolute delle parti GI GF , FH FE , ecc. e però della latitudine GB , e della linea loffodromica $GF + FE + EA$ sono tra di sè in costante ragione del seno tutto alla secante dell'angolo loffodromico IGF .

V I.

Nelle loffodromie fatte con diversi rombi, ma costituite tra i medesimi paralleli di latitudine, le differenze rispettivamente in longitudine sono tra di sè come le tangenti degli angoli loffodromici.

§. V I.

Ecco poi altre proprietà che più da vicino si attengono all'artificio delle latitudini crescenti, e in conseguenza alle carte ridotte.

I.

Se sia y il seno della latitudine u di qualunque punto della Terra G , GI un archetto elementare du del meridiano PB , dx l'archetto BD dell'equatore compreso tra due meridiani PB , PD infinitamente prossimi, ϕ l'angolo loffodromico IGF , GF l'archetto corrispondente della loffodromia, FI l'archet-

to del parallelo, poichè $GI = du = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, $FI = \frac{dy \text{ tang. } \phi}{\sqrt{(1-y^2)}}$,

e $FI:BD = \cos. u : 1 = \sqrt{(1-y^2)} : 1$, farà $dx = \frac{dy \text{ tang. } \phi}{1-y^2}$,

e integrando (A) $x = \frac{1}{2} \text{ tang. } \phi \log. \frac{1+y}{1-y}$ completamente.

Abbiamo dunque nel valore di x la mutazione AB in longitudine dal punto d' intersezione della loxodromia A coll' equatore fino al punto B del meridiano che passa per l' origine G della loxodromia. Ma lo stesso valore non è che l' assoluta lunghezza dell' arco AB in parti del raggio 1 della sfera.

I I.

Si chiami dt l' archetto IF , e nella carta ridotta l' elemento della latitudine sul meridiano si dica dz , e dr l' elemento del parallelo corrispondente. Per natura delle carte ridotte deve essere, posti simili gli archetti GI , IF

$$dz : dr = GI : IF = du : dt = 1 : \cos. u,$$

e però farà $dz = \frac{dr}{\cos. u}$. Ma dr deve essere costante nelle carte

ridotte, e uguale a du . Dunque $dz = \frac{du}{\cos. u}$. E perchè

$du = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ (art. preced.), e $\cos. u = \sqrt{(1-y^2)}$, farà

$dz = \frac{dy}{1-y^2}$, e $z = \frac{1}{2} \log. \frac{1+y}{1-y}$, equazione finita e completa della latitudine crescente.

I I I.

Pertanto avvicinando questa all' equazione (A) dell' art. I. troviamo pel nostro oggetto della loxodromia, e delle carte ridotte questa prima proprietà

$$1 : \text{tang. } \phi = z : x$$

cioè che la latitudine crescente sta alla mutazione in longi-

tudine sull'equatore come il seno tutto alla tangente dell'angolo loffodromico . In conseguenza posta z la latitudine crescente allorchè $y=a$, x la mutazione in longitudine corrispondente all'angolo ϕ , z' la latitudine crescente quando $y=b$, x' la mutazione in longitudine collo stesso angolo ϕ , avremo $z-z':x-x'=1:\text{tang. } \phi$; e stessamente per altre latitudini crescenti z'', z''' , e corrispondenti mutazioni di longitudine x'', x''' per altro angolo loffodromico ϕ' , farà $z''-z''':x''-x'''=1:\text{tang. } \phi'$. Onde saranno le differenze di due latitudini crescenti alle differenze delle mutazioni in longitudine sull'equatore per un dato angolo loffodromico, come il seno tutto alla tangente del medesimo angolo.

I V.

Ma per proprietà caratteristica della loffodromia (§. V. art. IV.) la latitudine naturale GB essendo al lato mecodinamico, cioè all' aggregato degli archi IF , HE , CA , nella stessa ragione del raggio alla tangente dell'angolo loffodromico IGF , farà per un dato rombo la latitudine crescente alla latitudine naturale, cioè lunghezza assoluta dell'una a lunghezza assoluta dell'altra, come la lunghezza della mutazione in longitudine sull'equatore al lato mecodinamico.

V.

Pertanto la differenza di due latitudini naturali per un dato rombo sta alla differenza de' lati mecodinamici corrispondenti nella stessa ragione del seno tutto alla tangente dell'angolo loffodromico. Ma nella stessa ragione è provato essere (art. III.) la differenza $z-z'$ di dette latitudini poste crescenti alla differenza delle mutazioni corrispondenti $x-x'$ in longitudine sull'equatore. Dunque per un dato angolo loffodromico farà la differenza delle latitudini crescenti alla differenza delle latitudini naturali, come la differenza delle mutazioni in longitudine sull'equatore alla differenza de' lati mecodinamici corrispondenti.

V I.

E di nuovo effendo $1 : \text{tang.}^2 \phi = z^2 : x^2$, farà componendo $1 + \text{tang.}^2 \phi : 1 = z^2 + x^2 : z^2$, cioè $\text{sec.}^2 \phi : z^2 + x^2 = 1 : z^2$, e $1 : \text{sec.} \phi = z : \sqrt{(z^2 + x^2)}$. Ma per proprietà della loffodromia è il raggio alla secante dell'angolo del rombo ϕ , come la lunghezza dell' arco di latitudine naturale alla lunghezza della loffodromia. Costituito dunque un triangolo rettangolo i cui cateti sieno z , x , cioè la latitudine crescente, e la mutazione in longitudine, farà la latitudine crescente, o artificiale, all'ipotenusa di detto triangolo, come la lunghezza della latitudine naturale alla lunghezza della vera loffodromia.

V I I.

E nello stesso modo di sopra (art. V.) si dimostrerà essere per un medesimo angolo loffodromico ϕ la differenza di due latitudini crescenti $z - z'$ alla differenza delle latitudini naturali corrispondenti, come la differenza delle due ipotenuse $\sqrt{(z^2 + x^2)} - \sqrt{(z'^2 + x'^2)}$ alla differenza delle due loffodromie vere corrispondenti.

§. V I I.

Con questi dati possono condursi a perfezione le carte ridotte assai facilmente, come vedremo. Con molta ragione il Sig. *Bouguer* vorrebbe, che sulle carte di navigazione non si tracciassero linee nelle particolari risoluzioni de' quenti nautici; ma a ben giudicare della cosa tali quesiti richieggono tanto necessariamente costruzioni geometriche, che non pare possibile di astenersi dall'imbrattare le carte per ben condursi nelle navigazioni, e dal segnar punti col compasso. Inerendo pertanto al proposito del §. III. di non confondere la carta ridotta con la carta idrografica rappresentante il mare su cui si naviga, parmi che si potrebbe effettuare l'innuazione di quel dottissimo uomo, e supplire a un tempo alla necessità assoluta di tracciar linee su le carte in questo mo-

do . Lasciando intatta la vera carta idrografica la quale indica al Pilota la giusta polizione de' luoghi, che non è tale fu la carta di riduzione, essendo quivi le linee che congiungono due punti le direzioni de' rombi co' quali convien navigare per giugnere dall' uno all' altro, non mai quelle de' cerchi verticali, che li congiungono sul globo, si preparino a parte le carte ridotte corrispondenti, il cui piano per avventura potrebbe essere di carta pecorina, onde lavorarvi di matita, e tracciarvi sopra le linee proprie de' diversi casi, e cancellarvele a piacere. Una di queste carte sia rappresentata dal parallelogrammo *ABCD* (*Fig. II.*) in cui la *AB* sia o l' equatore, o altro parallelo qualunque, la quale sia divisa in parti eguali rappresentanti ciascheduna, per esempio, una sesta parte di grado equatoriale. Sieno poi i meridiani estremi *AC*, *BD*, divisi, com' è costume, coll'addizione continua delle secanti di dieci in dieci minuti, facendo uso della Tavola esibitaci dal Sig. *Bouguer* nel suo Trattato di navigazione, cui ho creduto bene di porre in calce di questa operetta, oppure adoperando la formula analitica delle latitudini crescenti (§. VI. art. II.). Queste latitudini crescenti sieno marcate internamente, come mostra la figura. Del lato esterno si faccia scala di parti eguali alle parti della *AB*, che saranno minuti equatoriali, contrassegnandole di 60 in 60 colla solita marca de' gradi circolari per abbreviamento. Così internamente avremo la scala delle latitudini crescenti, esternamente la misura delle differenze in latitudine naturale, del che vedremo l' uso. La superficie del parallelogrammo farà il piano su cui andranno praticate le costruzioni necessarie nelle risoluzioni de' Problemi di navigazione ne' mari compresi tra i limiti assunti; e ciò sia quanto alla costruzione delle carte ridotte. E quanto all' uso per esser breve risolverò di fatto alcuni Problemi, ov'entrino le correzioni a cui danno luogo le cose qui innanzi dimostrate, e facciano fede della perfezione a cui si conduce la teoria e la pratica di quelle carte: nel che fare assumeremo pertiche parigine $950\frac{1}{2}$ per la lunghezza di un minuto equatoriale, che suol pure denominarsi miglio marino, e però la scala esterna, che abbiamo detto di minuti equatoriali nella carta ridotta qui so-

pra , sarà pure scala di miglia marine , onde agevolmente si potrà passare dai gradi alle miglia , e viceversa .

I.

Data sulla carta idrografica la latitudine e longitudine di due punti di partenza , e di arrivo di un vascello , trovare le miglia marine di longitudine , o il valore migliare del lato-mecodinamico col mezzo della nostra Tabella ridotta (Fig. II.).

Sieno le occulte FG , HF i meridiani che passano pe' punti dati , e le LM , NP i rispettivi paralleli di latitudine crescente , e però regolati su la scala interna della Tabella ; e sia Q il punto di partenza , R l' arrivo del vascello . Si congiunga QR , e sopra la scala esterna de' minuti equatoriali o miglia marine AC si trovi da S verso C la differenza ST delle latitudini naturali de' punti Q R , e si conduca per T il parallelo TX , segante il meridiano FG in V , e la QR in X . Si misuri la VX su la medesima scala esterna AC , e le miglia marine risultanti per VX costituiranno la lunghezza vera del lato mecodinamico della proposta navigazione .

Imperciocchè essendo QZ la differenza delle latitudini crescenti de' punti Q R , ZR la mutazione in longitudine equatoriale , ZQR l' angolo lossodromico della navigazione , e QV la differenza delle latitudini naturali per costruzione , e per la similitudine de' triangoli ZQR VQX essendo

$$QZ : QV = ZR : VX$$

sarà (§. VI. art. IV.) VX il vero lato mecodinamico , e le miglia risultanti faranno le miglia di longitudine dimandate .

§. VIII.

Sia $A'B'C'D'$ (Fig. III.) la carta ridotta al modo ordinario , $Q' R'$ il lito de' punti dati , $ZQ'R'$ l' angolo lossodromico . La somma $ab + cd + ecc.$ è il lato mecodinamico artificiale , di cui si cerca la rettificazione . Due modi sogliono adoperarsi . Si fanno delle parti di latitudine crescente fg , gh , ecc. altrettante scale ciascheduna di egual numero di particelle rappresentanti miglia , leghe ecc. secondo la divisione

D ij

fatta, e si applica ab alla scala fg , cd alla scala gh ecc, e si determina la lunghezza di ciaschedun lato a parte a parte rettificata in questo modo. Questo lavoro diventa bene spesso impraticabile nel caso che piccola sia la differenza in latitudine de' punti dati, incerto poi sempre e fallace nel passaggio da una ad altra scala. Veggasene un esempio nel Probl. IV. Lib. II. Cap. VI. del Trattato di Navigazione del Sig. *Bouguer*. L' altro modo è quello di prendere un parallelo medio: modo rigorosamente inesatto. Tutte queste difficoltà ed incertezze svaniscono per la correzione nostra indicata qui sopra, con cui alla facilità è accoppiata l' esattezza geometrica tanto preziosa nella navigazione.

I I.

Dati i medesimi elementi del Problema precedente, trovare la lunghezza del viaggio loisdromico.

Fatta la medesima costruzione su la Tabella ridotta, (Fig. II.) come qui innanzi, QR farà la linea loisdromica, che il metodo somministra; ma ella è crescente per le cose dimostrate antecedentemente. Si determini dunque come sopra la differenza ST delle due latitudini naturali de' punti dati Q R sopra la scala esterna AC , e si conduca il parallelo TX . La linea QX farà la vera loisdromica, la quale misurata su la scala esterna AC , darà in miglia marine la lunghezza del viaggio loisdromico dimandata.

Inperciocchè essendo ZQR l' angolo loisdromico della navigazione, QZ la differenza delle latitudini crescenti de' punti Q R , QV la differenza delle latitudini naturali per costruzione, farà (§. VI. art. VI.) QX la vera loisdromia della proposta navigazione.

§. I X.

Sin da' primi tempi dell' invenzione delle carte ridotte non fu per avventura chi non conoscesse non essere altrimenti QR (Fig. II.) la vera lunghezza del viaggio loisdromico. Quindi s' inventò il modo di rettificarla col misurare la par-

te Qb (Fig. III.) su la scala Qa del meridiano $A'C'$, la parte bd su la scala bc , oppure fg , e così successivamente. Talchè per far comprendere l' indole di questo lavoro destinato a rettificare la losodromia dice il Sig. *Bouguer* nel Lib. II. Cap. V. §. 239 di considerare la carta ridotta come un' unione di carte piate differenti soprapposte l'una all' altra, e che non hanno la medesima scala. Ma non può negarli che non sia incomoda, difettosa, e fallacissima ne' casi considerati al §. VIII. questa rettificazione. E perchè risulti meglio la necessità di purgare da questo difetto la pratica navigatoria risolveremo il seguente Problema, ch' è forse uno de' più usuali.

III.

Dato il punto di partenza, si dimanda la longitudine e la latitudine del punto di arrivo attuale, sia poi questo sul mare, o in terra ove sia pervenuto il vascello, essendo conosciute le miglia scorse con un dato e costante rombo.

Sia Q nella Tabella ridotta (Fig. II.) il punto di partenza di cui è nota la longitudine e la latitudine dalla carta idrografica. Al meridiano FG che passa per Q si costituisca all' stesso punto Q l' angolo del rombo tenuto ZQR . Dalla scala esterna AC de' minuti o delle miglia marine si applichino sopra l' indefinita QR le miglia corse nel viaggio fatto, e sia QX la lunghezza risultante. Si conduca perpendicolare al meridiano dal punto X la XV . Sarà per le cose dimostrate QV la differenza in latitudine vera tra il punto dato e quello dell' arrivo, la quale misurata su la scala somministrerà in miglia marine, e però in gradi e minuti l' intera latitudine cercata. Trovata la latitudine naturale del punto di arrivo, si cerchi la latitudine crescente che le corrisponde, e però dalla scala interna la differenza QZ per rispetto alla crescente del punto Q . Condotta una perpendicolare al meridiano in Z la quale seghi la QR in R , farà RZ la mutazione in longitudine, e però si avrà la longitudine dimandata del punto di arrivo. Potrà pertanto segnarsi

fu la carta idrografica il punto della Terra ove attualmente si trova il vascello.

§. X.

Veggiamo di questo Problema nelle carte comuni di riduzione (*Fig. III.*). Essendo Q il punto di partenza, si costituisca l'angolo $Z'QY'$ uguale all'angolo loisdromico dato. La lunghezza del viaggio fatto si distribuisca sopra l'indeterminata QY' per parti crescenti secondo le parti aQ , bc , ecc. del meridiano, cioè secondo le scale delle medesime parti, onde riesca ingrandita e crescente, e tra R' il punto ove termina questa distribuzione. Si conduca per R' il parallelo Rb segante in Z' il meridiano che passa pel punto Q . Sarà $R'Z'$ la mutazione dimandata in longitudine, e $Q'Z'$ la differenza in latitudine crescente, onde si ricaverà e la longitudine totale e la latitudine del punto di arrivo. Quanto imperfetta e fallace ne' passaggi particolarmente da una scala all'altra riesca la determinazione, e conversione della loisdromia data in parti crescenti, onde dipende la definizione de' due elementi ricercati, il vede ognuno da sè, cui siano familiari queste pratiche di navigazione. Che se QR' fosse assunta uguale alla loisdromia data, come si fa per alcuni nelle carte piate, $R'Z'$ non sarebbe altrimenti la mutazione in longitudine, ma il lato mecodinamico, com'è manifesto dalle cose dimostrate.

§. XI.

Sempre più chiaramente apparisce, che non potendo maneggiarli i queliti dell'Arte senza tentativi su la carta, e molteplicità di linee, non possiamo rinunciare al far costruzioni geometriche senza esporci a pericoli e inconvenienti gravissimi. E però non sembra mal fondato l'aver preparata, nel modo che ho innuato, per le navigazioni la carta ridotta, senza indicazioni di paesi e senza linee nel ripieno, a guisa di tabella rasa, onde farvi sopra tutte le operazioni lineari che occorrono, cancellarle, e riformarne di nuove secondo il bisogno. La carta idrografica ella si è, che

dee contenere i luoghi nella loro giusta posizione , e sopra di essa debbono segnarsi le situazioni del vascello in corso , i suoi arrivi , secondo che risulta dalle operazioni fatte su la tabella di riduzione . Sopra di che non è mestieri che più oltre ci trattenghiamo .

C A P I T O L O S E C O N D O

Della Sfera di riduzione .

§. X I I .

Nobilissima invenzione è quella delle latitudini crescenti per la costruzione che abbiamo veduto de' Problemi di navigazione , e tanto più in presente , che si sono corrette e tolte via le incertezze procedenti dal misurare per parti sopra una moltitudine di scale le miglia di longitudine , e le lofodromie . Ma questa invenzione non ha prodotto che le carte di riduzione , e conteneva pur nel suo seno anche la riduzione della sfera artificiale per tutti gli usi dell'arte navigatoria : riduzione più naturale che non sono le carte , tutto riuscendo su la sfera , com' è precisamente sul globo terraqueo , meridiani , paralleli ecc. e la lofodromia in quella stessa linea spirale , ch' è tracciata dal vascello su la superficie del mare . Questa è la riduzione che or mi propongo di mettere in luce . Come per descrivere le varie estensioni terrestri è riuscito di trovar modo , onde averle in piano della stessa area che occupano su la faccia della Terra co' meridiani concorrenti al polo ; così apparirà qui il modo di navigare non già su' disegni piani ma sì bene sopra lo stesso globo col mezzo di una sfera artificiale , anzi di un emisfero , se un' intera sfera di due in tre piedi di raggio fosse incomoda ne' vascelli .

§. X I I I .

Facciamo pertanto attenzione primamente alla condizione de' piccoli archetti *AC* , *EH* , *FI* , *GL* ecc. (*Fig. I.*) o parti del lato mecodinamico . E' certo , che per natura della lof-

sodromia *AEFGK* debbono tutti avere una stessa determinata lunghezza. Ma appartenendo ciascun di loro ad altro ed altro parallelo, l'isoperimetria importa necessariamente, che ciascheduno sia dotato d'altro ed altro numero di gradi. Ciò era notissimo fin da quando prese ad investigarli la curva che sega tutti i meridiani della Terra sotto un medesimo costante angolo come fa la loxodromia. Ma di qua per appunto moveremo per inoltrarci nel nostro argomento. E' dunque cosa evidente, che gli archi di longitudine, corrispondenti a dette parti mecodinamiche sull'equatore, saranno diseguali cioè d'altro e d'altro numero di gradi. Ma perchè dette parti sieno tra di sè uguali, bisogna che crescano in gradi nella stessa proporzione con cui i raggi rispettivi decregono, cioè come decregono, allontanandosi dall'equatore, i coseni delle rispettive latitudini. Dunque gli archi rispettivamente simili sull'equatore debbono crescere nella medesima proporzione, ch'è quanto dire, nella proporzione con cui crescono le secanti di dette latitudini.

§. X I V.

Ed ecco spuntare in fatto sull'equatore ne' viaggi loxodromici de' vascelli la legge degli archi crescenti in longitudine, che ha luogo artificialmente in latitudine su' meridiani delle carte ridotte. Questo bellissimo legame può dimostrarsi così. Sieno y, y', y'' ecc. i seni successivamente delle latitudini equidifferenti *MK, BG, DF* ecc. (Fig. I.), dx, dx', dx'' ecc. le mutazioni elementari in longitudine *MB, BD, DC* ecc. corrispondenti, e sia ϕ l'angolo costante loxodromico *GKL, FGI* ecc. Sarà $x = AM = \frac{1}{2} \text{tang. } \phi \int \frac{1+y}{1-y}$,

$x' = AB = \frac{1}{2} \text{tang. } \phi \int \frac{1+y'}{1-y'}$, $x'' = AD = \frac{1}{2} \text{tang. } \phi \int \frac{1+y''}{1-y''}$ ecc.

(§. VI art. I.) . Dunque faranno tra di sè gli archi *AM, AB, AD* ecc. rispettivamente come $\frac{1}{2} \int \frac{1+y}{1-y}, \frac{1}{2} \int \frac{1+y'}{1-y'}, \frac{1}{2} \int \frac{1+y''}{1-y''}$ ecc. Ma queste sono le espressioni, o i valori del-

le

le latitudini crescenti de' punti *K*, *G*, *F* ecc. (§. VI. art. II.) . Dunque ecc.

§. X V.

Siccome dunque un vascello nel percorrere uguali segmenti minimi della linea loffodromica sul mare segna tacitamente archi crescenti di longitudine sull' equatore , e la legge di questi archi crescenti è fatta manifesta ; è facile da vederli , che imitando il globo reale con un globo artificiale , in cui gl' intervalli de' meridiani sull' equatore vengano segnati crescenti con la legge trovata , mentre le latitudini sopra di essi meridiani sieno distribuite per eguali intervalli , si può tracciare in fatto la spirale loffodromica , e risolvere tutti i Problemi della navigazione su la faccia stessa del mare , che il vascello va solcando . Così mentre nella carta ridotta le latitudini artificiali sono tutte crescenti , ed è la longitudine divisa in parti eguali , nella sfera di riduzione all' opposto la longitudine sarà divisa in parti crescenti , com' è divisa precisamente la latitudine nelle carte ridotte , ch' è cosa mirabile , e la latitudine in parti eguali .

§. X V I.

La Tavola pertanto delle latitudini crescenti posta qui in calce , come serve per la divisione de' meridiani nelle carte , servirà pure per la divisione dell' equatore nella sfera artificiale . Imperciocchè ciascuna particella delle latitudini crescenti significa un minuto di meridiano , ch' è quanto dire dell' equatore , e però la lunghezza di un miglio marino corrispondente a detto minuto (§. VII.) . In conseguenza mentre un arco di latitudine di 60° è di minuti 3600 , cioè di 3600 miglia marine di lunghezza , la latitudine crescente di 60° è segnata nella Tavola di parti 4527 . Dunque è manifesto , che tanto può esprimersi detta latitudine crescente distesa in una linea retta divisa in 4527 parti eguali del valore ciascuna di un minuto dell' equatore , quanto etibendola con un arco di circolo avente per raggio il raggio della

Terra, cioè con un arco dell'equatore di $75^{\circ}, 27'$, che comprendono per appunto 4527 minuti. Con questa Tavola pertanto segneremo sull'equatore le longitudini che debbono procedere come le latitudini crescenti che lor corrispondono.

Sia perciò AB l'equatore della Terra (Fig. IV.), P un de' poli, AP un meridiano. Si divida il meridiano AP in parti eguali Aa, ab, bc, cd ecc. di $10'$ ciascheduna, e sull'equatore da A in F , da A in G , da A in H ecc. si applichino le parti crescenti per $10', 20', 30'$ ecc. tratte dalla Tavola, che faranno le mutazioni di longitudine crescenti per $10', 20', 30'$ ecc. di latitudine naturale. Per a, b, c, d ecc. descrivansi i paralleli, e si conducano i meridiani PF, PG, PH ecc.

Sarà pertanto l'arco AF la mutazione in longitudine pel punto di latitudine a' , l'arco AG la mutazione in longitudine pel punto di latitudine b' , e così successivamente. Si dirà pertanto fondamentale per la sfera da ridurli la divisione di $10'$ in $10'$, giacchè una bisogna fissarne per base, quando il bisogno di una grandissima esattezza non richiedesse una divisione fondamentale più minuta. Eseguito una volta sì fatto scompartimento, nessun problema richiede per la sua risoluzione che se ne faccia un nuovo, servendo il fatto per tutti.

Siccome dunque i gradi di longitudine crescente in F, G, H ecc. sono denotati dai gradi di latitudine corrispondenti in a', b', c ecc., e viceversa; così non difficilmente potremo definire fino a qual segno sia permesso di condurre la graduazione crescente sull'equatore relativamente alle latitudini corrispondenti. Essendo infinita, e perciò inassegnabile la latitudine crescente di 90° , la graduazione non può inoltrarsi, che a qualche grado minore di 90 , come sarebbe a $89^{\circ}, 40'$, mentre per essere la circonferenza dell'equatore di 21600 minuti, e di 20075 minuti la latitudine crescente di $89^{\circ}, 40'$, si viene ad occupare presso che tutta la circonferenza equatoriale con la graduazione crescente spinta fino a $89^{\circ}, 40'$.

§. XVII.

Non ha dubbio intanto, che a qualunque punto m della loffodromia fondamentale $AabfM'$ termini il viaggio fatto coll' angolo $azda'$, condotto per m il parallelo mnq , farà sempre l' arco loffodromico da' all' arco Am , come la mutazione Aa in latitudine alla mutazione Aq , giacchè, essendo considerato rettilineo il piccolo triangolo loffodromico fMf , rettangolo in f , e rettilineo pure il triangoletto fmn , rettangolo in n , saranno simili detti triangoli, e però proporzionali le grandezze enunciate per proprietà della linea loffodromica.

§. XVIII.

Ma altra conseguenza nure è inerente a questa divisione fondamentale, importantissima per la risoluzione de' Problemi nautici con la sfera di riduzione, cui bisogna premettere prima d' inoltrarci, ed enunciaremo così.

Sia divisa comunque in K (Fig. IV.) la differenza FG delle longitudini de' punti a , b , e sia condotto il meridiano PK legante in b il parallelo bb' e congiunta ab . E' certo, che essendo ab' , ab due linee loffodromiche procedenti dal medesimo punto a' sotto diversi rombi, le differenze delle rispettive longitudini percorse sull' equatore FG , FK tra i medesimi paralleli ad , bb' sono tra di sè come le tangenti degli angoli loffodromici $ga'b$, gab (§. V.). E di nuovo se sia M' nel parallelo dM' il termine della loffodromia fondamentale coll' angolo gab' , ed M il termine dell' altra coll' angolo $ga'b$ nel medesimo parallelo dM' , uchè condotto per M il meridiano PL tieno FN , FL le differenze delle longitudini de' punti M , M' , saranno pure tra di sè le FN , FL come le tangenti degli angoli loffodromici $ga'b$, gab . Dunque saranno proporzionali tra di sè le quattro differenze in longitudine FG , FN , FK , FL , cioè farà

$$FG:FN=FK:FL.$$

§. X I X.

Ma per facilità in oltre nella risoluzione de' Problemi è necessaria una scala angolare, che ci dispensi, se vogliamo, dall' istituire analogie col calcolo aritmetico. S' intendano perciò costrutte in angolo qualunque CAB (*Fig. V.*) le scale AB , AC di parti eguali rappresentanti ciascuna un minuto dell' equatore, cioè un miglio marino sicchè possano apporsi le denominazioni di un grado, di due ecc. a 60, a 120 ecc. di queste parti, con che è reso facile il passaggio dai gradi alle miglia, e viceversa. Dovendoti far uso di due scale torna comoda questa, su cui con le note righe parallele si possono istituire analogie senza tirar linee sul piano della scala. Ne' Problemi pertanto che verranno qui appresso, ove sia detto d' inferire altra ed altra proporzionalità di minuti, o miglia marine, s' intenderà sempre ciò fatto col mezzo di questa scala angolare, se attualmente il Navigante non voglia istituire le analogie aritmeticamente.

§. X X.

Premesse queste cose, perchè la sfera di riduzione si presenti da sè agli occhi de' leggitori, non potendosene dar moto in disegno, risolveremo i principali Problemi di navigazione su la *Fig. IV.*, e riuscirà quindi chiarissimo l' artificio con cui passeremo in fine a darne l' effettiva costruzione.

Ed altro non aggiungo in prevenzione se non se ch' io considero la spirale loxodromica, come un composto di piccoli archetti circolari appartenenti ad altro ed altro cerchio verticale, e però gli angoli loxodromici come angoli sferici costituiti da archi di cerchj massimi della sfera. Venghiamo pertanto ai Problemi.

P R O B L E M A I.

Dato il punto di partenza, il rombo, e la lunghezza in miglia marine del viaggio loffodromico, trovare il punto di arrivo.

Tracciati su la sfera il meridiano, e il parallelo che passano pel punto dato, si faccia che il meridiano innista sul grado di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine del punto dato (§. XVI.). Sia pertanto a' questo punto, il cui meridiano PF innista sul grado F di longitudine denotato dal grado di latitudine del punto a' , e sia costituito su la superficie sferica al punto a' l'angolo sferico gab uguale al dato angolo loffodromico della navigazione, e pel punto d' intersezione b col parallelo prossimo fondamentale si faccia passare il meridiano occulto PK . Misurato l' arco ab sulla scala del meridiano AP s' inferisca colla scala angolare della Fig. V., come i minuti dell' arco ab ai minuti dell' arco $a'g$, così la lunghezza del viaggio fatto ad un quarto proporzionale, il quale somministrerà la mutazione in latitudine fatta dal vascello in questo viaggio (§. V.). Sia ella ad ; sarà cognita pure la latitudine dd . Si truovi sull' equatore il grado di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine del punto d , e sia in N . S' inferisca, come i minuti dell' arco fondamentale FG ai minuti dell' arco FK , così i minuti dell' arco fondamentale FN ad un quarto proporzionale. Darà questo (§. XVIII.) la mutazione di longitudine FL percorsa sull' equatore in questo viaggio. E' dunque trovato ecc.

§. X X I.

E qui subito si riconosce

I. La necessità di segnare internamente sull' equatore della sfera i gradi di longitudine naturale computati dal primo meridiano; e di fare che la graduazione esterna delle longitudini crescenti portata da una zona possa girare intorno, perchè tirato un meridiano secondo la naturale sua longitu-

dine , movendo la zona , si possa farlo insistere sopra un grado qualunque di longitudine crescente .

II. Che bisogna poter tracciare su la faccia della sfera qualunque meridiano , e qualunque parallelo dimandato .

III. Che occorre inoltre un piccolo strumento goniometrico per misurare gli angoli sferici su la superficie della sfera , e costituire su la medesima angoli dati , come si fa col semicerchio trasportatore nella geometria piana .

IV. Che potrebbe tornar bene il preparare la sfera , o l'emisferio di riduzione , dalle graduazioni in fuori che sono indispensabili , con la superficie rasa e netta da linee , per farvi sopra tutte le costruzioni lineari , che occorrono nelle navigazioni , liberamente , come s' è detto della Tabella di riduzione ; cancellarle , e rifarne di nuove a talento . Ma la pratica deciderà se così convenga , o torni meglio il fare le poche costruzioni necessarie su la faccia stessa del mare disegnato su la sfera .

V. E che può accadere , che i punti dati riescano tra due della costruzione fondamentale della sfera , ancorchè la graduazione sia instituita di 10' in 10' . Ma così per appunto accade anche nelle carte ridotte , ove pure è distesa una graduazione fondamentale , e vi si rimedia senza inconvenienti o col prendere per punto dato il più prossimo fondamentale , o col risolvere il quesito due volte assumendo per punto dato prima l' uno poi l' altro de' punti fondamentali , tra' quali è egli costituito , e col far uso del risultamento ragguagliato .

PROBLEMA II.

Dato il punto di partenza , e quello a cui si vuol pervenire con la navigazione . si dimanda il rombo che dee tenersi , e il viaggio che si farà per giugnervi .

Sia , come qui innanzi , *a'* il punto di partenza , il cui meridiano ha condotto a insistere (§. XXI. art. I.) sul grado *F* di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine data del punto *a* ; e sia *ad* la mutazione in latitudine de' punti dati . Si trovi il grado *N* di longitudine crescente

corrispondente al grado di latitudine del punto d . E poichè è data la longitudine de' punti, e perciò la differenza in longitudine, si applichi questa differenza da F verso N sull' equatore, e sia L il punto ov' ella termina. S' inferisca, come i minuti di longitudine FN ai minuti di longitudine FL , così i minuti di longitudine FG al quarto proporzionale FK , e si conduca il meridiano PK . Ove questo sega il parallelo fondamentale bb' , per esempio in b , si conduca l' arco lissodromico ab , e farà tosto dato l' angolo del rombo ricercato gab . Di nuovo dunque inferendo (§. V.), come i minuti o miglia marine dell' arco fondamentale ag alle miglia del segmento lissodromico ab dato dalla sfera, così le miglia della mutazione in latitudine ad , ch' è pur data, al quarto proporzionale, che farà la lissodromia dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA III.

Dato il punto di partita, il rombo di vento seguito nel viaggio, e la latitudine del punto di arrivo, trovare la longitudine di questo punto, e la lunghezza del viaggio fatto.

Sia, come prima, a' il punto di partenza, la cui latitudine sia denotata dal grado F della graduazione crescente dell' equatore, e sia ad la differenza in latitudine de' punti di partenza e di arrivo. Si faccia al punto a' l' angolo del rombo dato gab , e pel punto b , ove resta segato il parallelo prossimo fondamentale, si conduca l' occulto meridiano PK . Misurata sul meridiano graduato AP la lunghezza ab , s' inferisca, come i minuti di latitudine ag ai minuti della differenza data in latitudine ad , così le miglia marine della ab alla lunghezza del viaggio totale ricercato. Essendo poi data la latitudine Ad del punto di arrivo si trovi il grado N che la denota su la longitudine crescente, e s' inferisca, come i minuti di longitudine fondamentale FG pel punto b' ai minuti della longitudine FN , così i minuti di FK pel punto b al quarto proporzionale, che darà i minuti di FL , onde si ricaverà tosto la longitudine ricercata del punto di arrivo. Il che ecc.

P R O B L E M A I V.

Dato il punto di partenza , la latitudine dell' arrivo , e la lunghezza della strada fatta , si dimanda il rombo tenuto , e la differenza in longitudine tra i punti di partenza e di arrivo.

Sia a' , come qui innanzi , il punto di partenza , il cui meridiano inflta sul grado F della graduazione crescente corrispondente al grado di latitudine del punto a' , e sia ad la differenza delle latitudini date . S' inferisca , come i minuti della differenza ad ai minuti della mutazione fondamentale ag , così la loffodromia data ad un quarto proporzionale (§. V.). Questo valore misurato su la graduazione del meridiano PA somministrerà la lunghezza dell' arco loffodromico compreso tra i paralleli fondamentali aa' , bb' . Si adatti questo valore dal punto a' su la sfera sì , che incontri in qualche punto come b il parallelo fondamentale bb' . Sarà $ga'b$ l' angolo del rombo dimandato . Per b si conduca l' occulto meridiano PK , e perchè è nota la latitudine Ad dell' arrivo , sia ella denotata su la divisione crescente dell' equatore dal grado corrispondente N . Posto ciò s' inferisca , come nel Problema precedente , e si troverà la differenza in longitudine FL ricercata . Il che ecc.

P R O B L E M A V.

Dato il punto di partenza , la longitudine del punto di arrivo , e il rombo tenuto , si dimanda la latitudine dell' arrivo , e la lunghezza del viaggio fatto.

Sia di nuovo a' il dato punto di partenza messo a suo luogo per rispetto al punto fondamentale F di longitudine crescente denotante il grado di latitudine del punto a ; e sia fatto su la sfera l' angolo $ga'b$ uguale all' angolo loffodromico dato . Pel punto b , ove dal lato dell' angolo è segato il parallelo bb' , si faccia passare il meridiano occulto PK . I minuti della differenza in longitudine , ch' è nota dalle longitudini

tudini date de' punti di partenza e di arrivo, si portino da F , per esempio, in L sull' equatore, e s' inferisca, come i minuti della FK ai minuti della FG , così i minuti della FL ad un quarto proporzionale. I minuti di questo valore applicati su la graduazione crescente dell' equatore cadano, per esempio, in N . Il grado segnato in N per la longitudine crescente denoterà il grado di latitudine del punto di arrivo. Posto ciò è subitamente cognita la differenza delle latitudini data e trovata, onde s' inferisca, come i minuti dell' arco dg ai minuti di questa differenza in latitudine, così la lunghezza dell' arco ab misurato sul meridiano AP alla lunghezza del viaggio loiodromico dimandato. Il che ecc.

§. XXII.

La risoluzione di questi Problemi fatta bensì su la carta, ma come se fosse fatta su la sfera, basta per additare da sè la costruzione della sfera di riduzione, che abbiamo in mira. Si metta pertanto l' occhio su la *Fig. VI.*, la quale ci presenta l' emisfero su cui deve operarsi, sia poi egli l' australe o il boreale, come il richiede la navigazione. AB è l' equatore tracciato su la superficie sferica. $ABCD$ è una zona cilindrica di metallo, il cui orlo superiore deve essere costituito rasente l' equatore AB quali questo fosse sezione di quella; a questa zona è stabilmente annesso un meridiano di metallo PE . Essendo ferma la sfera sul suo piedestallo, la zona $ABCD$ dee poter girare intorno al proprio asse trasportando seco il meridiano PE mobile intorno al polo P . La zona è divisa con la Tavola delle latitudini crescenti posta qui in fine procedendo da un margine del meridiano PE di 10' in 10', e terminando all' altro al grado 89°, 40' come s' è detto (§. XVI.). Per tal modo ciascun punto della longitudine crescente segnata su la zona, atteso il giro libero ch' ella ha, può applicarsi a qualunque punto si voglia dell' equatore tracciato su la sfera. Il meridiano annesso di metallo EP deve essere diviso di 10 in 10 minuti che contrassegnino le latitudini dall' equatore al polo. Quanto poi all' equatore, dal punto ove cade il primo meridiano, come PH , principio delle longitudini naturali, la divisione sopra

Tav. V.

F

di esso deve esser fatta come quella del meridiano annesso alla zona. Doppio è l'ufficio del meridiano mobile, dovendo servire da guida onde tracciare ove piace un meridiano sulla sfera fermando con la vite *m* la zona alla sfera, e per tracciar pure qualunque parallelo. Al qual secondo oggetto deve esser preparata una piccola morfa (*Fig. VII.*) di metallo da stringerli sul meridiano mobile al grado di latitudine voluto col mezzo della vite *a*, e portante in *b* un lapis che tocchi appena la superficie sferica quando la morfa è stretta. Così rivolgendolo il meridiano per quel verso che occorre, si può descrivere il parallelo o tal porzione di parallelo che fa di mestieri.

§. XXIII.

Resta da indicarsi lo strumento opportuno, onde costituire su la superficie sferica (§. XXI.) un angolo loiodromico dato, o rilevare i gradi di angolo già costituito. Ho detto (§. XX.) che l'archetto minimo loiodromico può considerarsi come archetto di cerchio massimo della medesima sfera. Dunque l'angolo da costituirsi o da rilevarsi è sempre formato da archi di cerchio massimo. Per la qual cosa è necessario per la formazione di un tale strumento di dare ad una lamina di metallo *AB* (*Fig. VIII.*) la curvatura di un meridiano della istessa sfera, che abbia per corda sei od otto pollici circa. Agli estremi di questo arco di meridiano *A B* deve terminare ed esser filata una lamina *BCD*, di cui l'orlo esterno *BCD* ha un semicerchio avente detta corda per diametro, e però rappresenti il semiparallelo della sfera che abbia per polo il mezzo *D* della porzione di meridiano *AB*. Questa lamina *BCD* intilente su tal semicerchio deve combaciarsi con quella piccola zona di sfera che può esser compresa tra i paralleli *BCD*, *bcd*, e deve esser divisa in 180 gradi. Dal mezzo *D*, polo del parallelo, dee partire una laminetta *DC*, mobile intorno a punto *D*, avente essa pure la curvatura del meridiano, la quale serve a indicare i gradi degli angoli *ADC*, *BDC* a guisa di meridiano volubile intorno al polo *D*. Ciò basta per far conoscere, che affittando il punto *D* a qualunque punto voluto di un meridiano

tracciato su la sfera , e la lamina AB al meridiano stello , col moto dell' indice e può costituirsi qualunque angolo sferico su la sfera , e rilevarsi qualunque angolo sferico a quel punto costituito.

§. X X I V.

Per dimostrare pertanto l' uso della sfera ridotta basterà che risolviamo il primo de' Problemi precedenti , ch' è il più usale nelle navigazioni lissodromiche.

Dato il punto di partenza . e il tratto di viaggio che s' è fatto navigando con un dato rombo dal Sud al Nord , trovare su la sfera attuale la longitudine e la latitudine del punto a cui il vascello è pervenuto.

Sia il punto dato a 25° di latitudine , e 50° di longitudine . Si trasporti il meridiano mobile PE (Fig. VI.) al punto F ove sull' equatore è segnata la distanza di 50° dal primo meridiano PH , e si descriva il meridiano PF . Adattato quindi il porta-lapis (Fig. VII.) sul grado 25 del meridiano mobile , si segni su la superficie sferica il punto a che determina la posizione del punto di partenza dato , qual è realmente sul globo terrestre. E come suppongo , che la graduazione fondamentale così dell' equatore come del meridiano , insieme con le longitudini crescenti della zona $ACDB$ proceda di $10'$ in $10'$, così avanzando di $10'$ il porta-lapis verso il polo si descriva il segmento $fgbn$ del parallelo di 25° , $10'$ di latitudine . Fatto questo si adatti lo strumento goniometrico (Fig. VIII.) col polo D in a , e coll' arco AB sul meridiano tracciato PF , e si costituisca l' angolo sferico gab uguale al dato angolo lissodromico. Pel punto d' intersezione b col parallelo fa si tracci col mezzo del meridiano mobile su la sfera il meridiano PK , e si misuri sul meridiano PE , come scala , la lunghezza dell' arco ab . Di nuovo al punto b si costituisca l' angolo Pbp uguale all'angolo gab , e si faccia $bp = ab$, e per p passi un altro meridiano . Similmente al punto p si costituisca l' angolo Ppq uguale all'angolo Pbp , e $pq = bp$, e così successivamente anche ripetendo l' operazione di meridiano in meridiano , la lunghezza della vera lissodromia , come ar , risulti uguale alla lunghezza del

viaggio fatto . Allora per r si faccia passare l'ultimo meridiano PL , e si rimetta la zona mobile al sito primo del meridiano PF , ov' è segnata la latitudine data di 25° . Sarà HL la longitudine del punto di arrivo r misurata su la graduazione dell' equatore , e il grado L su la graduazione crescente della zona denoterà la latitudine del medesimo punto r . Il che ecc.

A L T R I M E N T I

Ma se non voglia descriversi su la sfera l' effettiva lossodromia, si praticherà la prima costruzione indicata nella risoluzione di questo Problema . Imperciocchè, tirato il meridiano della longitudine data di 50° al punto F , e fatta girare la zona mobile sì, che il grado 25° di longitudine crescente, da cui è denotata la latitudine del punto dato, cada in F , e trovato come sopra il punto b , il segmento lossodromico $a'b$, e il punto K ove termina il meridiano che passa per b , e fermata finalmente la zona in quella posizione , si cerchi sopra di essa la crescente di 25° , $10'$, cioè la FG . Fatto questo con la scala angolare si trovi il quarto proporzionale alla piccola lunghezza $a'b$, alla lunghezza $a'g$ della mutazione in latitudine , e alla lunghezza del viaggio fatto , e si avrà la differenza in latitudine tra il punto dato e quello di arrivo , la quale aggiunta alla Fa' darà la latitudine ricercata . A questa corrisponda su la graduazione crescente della zona, per esempio , il punto N . Si inferisca pertanto: come i minuti di FG ai minuti di FK così i minuti di FN al quarto proporzionale, e si avrà l' arco, per esempio, FL , il quale aggiunto su la graduazione dell' equatore all' arco HF somministrerà la longitudine HL del punto di arrivo .

§. X X V.

Lungo farebbe e non necessario il risolvere altri Problemi con la sfera di riduzione subito che n' è fatta palese e lucida la costruzione, e l' uso . Il segnare, per esempio, il punto ov' è un vascello , trovandosi a vista di due punti a terra conosciuti , il che si fa comunemente prima di perdere di

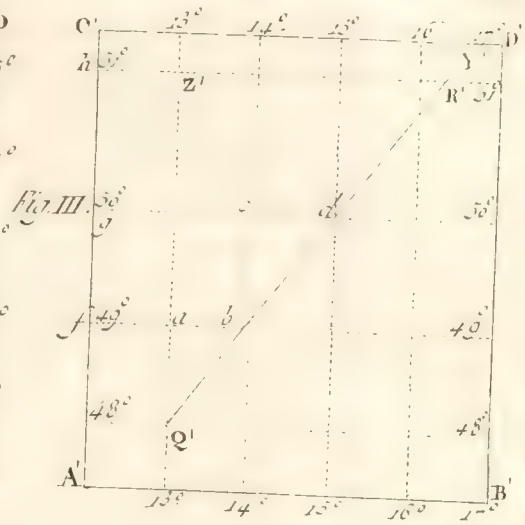
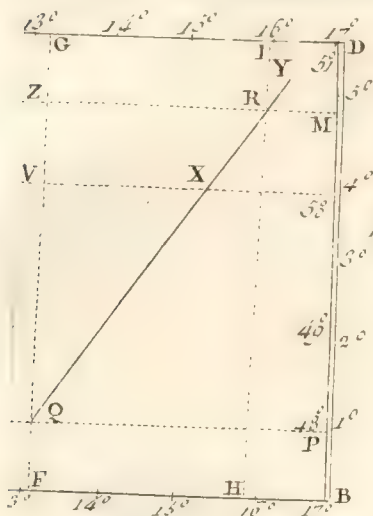


Fig. III.

Fig. VII.

a — b

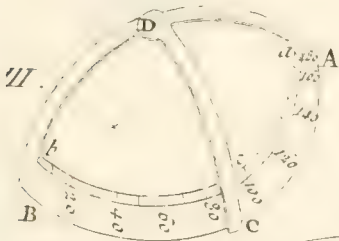
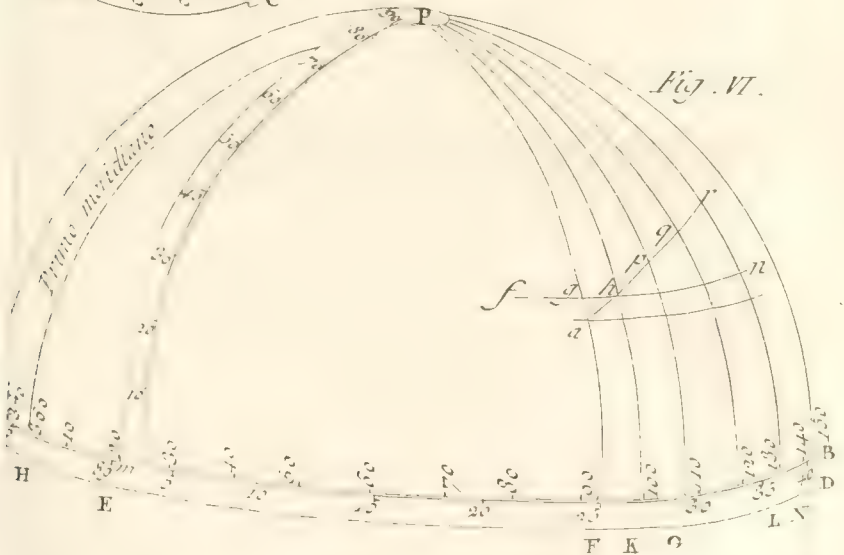
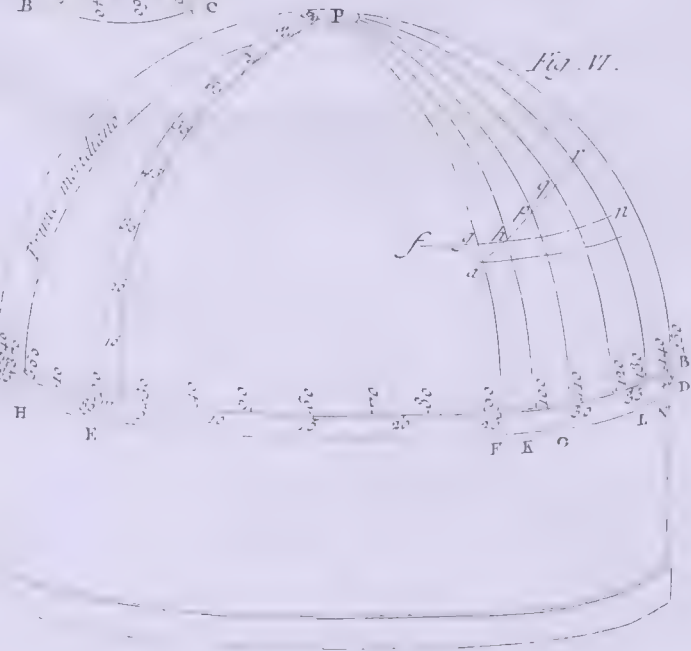
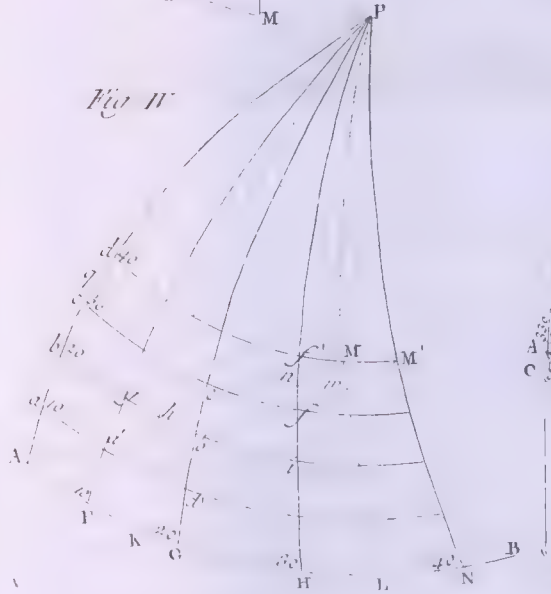
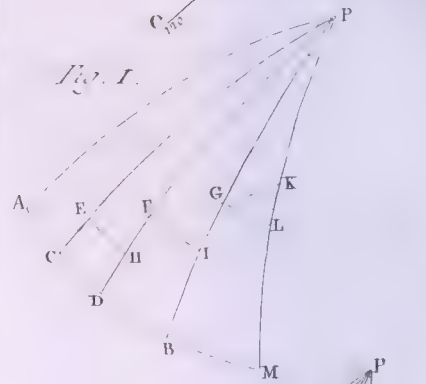
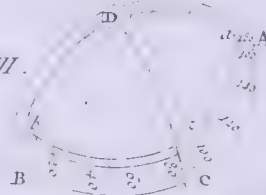
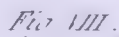
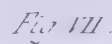
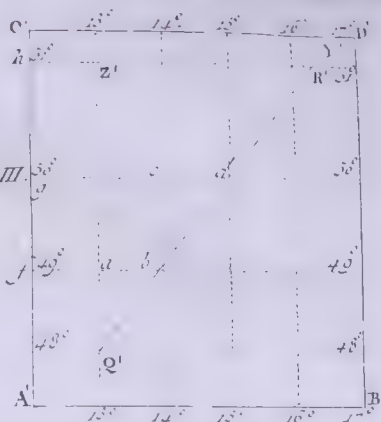
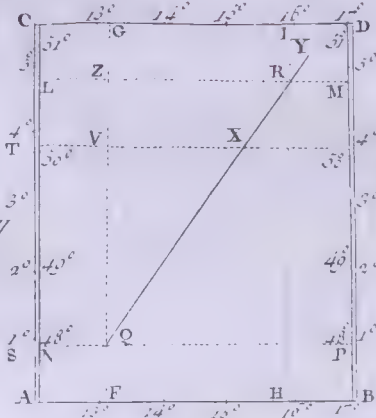
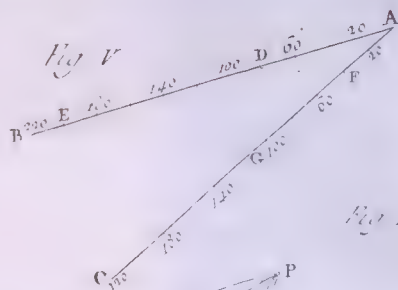


Fig. VI.





vista la terra, riesce su la sfera ridotta più facilmente e più esattamente praticabile che non è per avventura col mezzo delle carte. Così il ridurre in gradi e minuti di longitudine equatoriale le miglia percorse verso l' est o verso l' ovest sopra un dato parallelo, è cosa che si effettua su la sfera di riduzione in pochi istanti. Ma e di queste, e dell'altre operazioni dell' Arte navigatoria che non esigono quali alcun artificio su la sfera, veggano gl' intendenti dell'Arte, all' intelligenza e pratica de' quali è rimesso il giudizio della cosa.

T A V O L A

DELLE LATITUDINI CRESCENTI.

MI	G	LUN.	LUN.	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.			
0	0	0	421	14	848	21	1289	28	1751	35	2244	42	2782
10	0	10	431	14	859	21	1300	28	1762	35	2256	42	2795
20	0	20	441	14	869	21	1311	28	1774	35	2269	42	2809
30	0	30	451	14	879	21	1321	28	1785	35	2281	42	2822
40	0	40	461	14	890	21	1332	28	1797	35	2293	42	2836
50	0	50	471	14	900	21	1343	28	1808	35	2306	42	2849
0	1	60	482	15	910	22	1354	29	1819	36	2318	43	2863
10	1	70	492	15	921	22	1364	29	1831	36	2330	43	2877
20	1	80	502	15	931	22	1375	29	1842	36	2343	43	2890
30	1	90	512	15	941	22	1385	29	1854	36	2355	43	2904
40	1	100	522	15	951	22	1397	29	1865	36	2368	43	2918
50	1	110	532	15	962	22	1408	29	1877	36	2380	43	2932
0	2	120	542	16	971	23	1419	30	1888	37	2393	44	2946
10	2	130	552	16	983	23	1429	30	1899	37	2405	44	2960
20	2	140	562	16	993	23	1440	30	1911	37	2418	44	2974
30	2	150	572	16	1004	23	1451	30	1923	37	2430	44	2988
40	2	160	582	16	1014	23	1462	30	1935	37	2443	44	3002
50	2	170	592	16	1025	23	1473	30	1946	37	2455	44	3016
0	3	180	602	17	1035	24	1484	31	1958	38	2468	45	3030
10	3	190	612	17	1046	24	1495	31	1970	38	2481	45	3044
20	3	200	622	17	1056	24	1506	31	1981	38	2494	45	3058
30	3	210	632	17	1067	24	1517	31	1993	38	2506	45	3072
40	3	220	642	17	1077	24	1528	31	2005	38	2519	45	3086
50	3	230	652	17	1088	24	1539	31	2017	38	2532	45	3100
0	4	240	662	18	1098	25	1550	32	2028	39	2545	46	3116
10	4	250	672	18	1109	25	1561	32	2040	39	2558	46	3130
20	4	260	682	18	1119	25	1572	32	2052	39	2571	46	3144
30	4	270	692	18	1130	25	1583	32	2064	39	2584	46	3159
40	4	280	702	18	1140	25	1594	32	2076	39	2597	46	3173
50	4	290	712	18	1151	25	1605	32	2088	39	2610	46	3188
0	5	300	722	19	1161	26	1616	33	2099	40	2623	47	3202
10	5	310	732	19	1172	26	1628	33	2111	40	2636	47	3216
20	5	320	742	19	1183	26	1639	33	2123	40	2649	47	3230
30	5	330	752	19	1193	26	1650	33	2135	40	2662	47	3244
40	5	340	762	19	1204	26	1661	33	2147	40	2675	47	3258
50	5	350	772	19	1214	26	1672	33	2159	40	2688	47	3272
0	6	360	782	20	1225	27	1684	34	2171	41	2702	48	3286
10	6	370	792	20	1236	27	1695	34	2184	41	2715	48	3300
20	6	380	802	20	1246	27	1706	34	2196	41	2728	48	3314
30	6	390	812	20	1257	27	1717	34	2208	41	2741	48	3328
40	6	400	822	20	1268	27	1729	34	2220	41	2754	48	3342
50	6	410	832	20	1279	27	1740	34	2232	41	2767	48	3356

T A V O L A

DELLE LATITUDINI CRESCENTI.

N°	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.
0	49	3382	56	4074	63	4905	70	5966	77	7457	84	10137
10		3397		4092		4927		5995		7512		10234
20		3412		4110		4949		6025		7557		10334
30		3428		4128		4972		6055		7603		10437
40		3443		4146		4994		6085		7650		10543
50		3459		4164		5017		6115		7697		10652
60	50	3474	57	4183	64	5039	71	6145	78	7743	85	10765
70		3490		4201		5063		6177		7793		10881
80		3506		4219		5085		6208		7842		11002
90		3521		4238		5108		6240		7892		11127
100		3537		4257		5132		6271		7942		11257
110		3553		4275		5155		6303		7994		11392
120	51	3569	58	4294	65	5179	72	6335	79	8045	86	11533
130		3585		4313		5202		6367		8095		11679
140		3601		4332		5226		6400		8152		11832
150		3617		4351		5250		6433		8207		11992
160		3633		4370		5275		6467		8262		12160
170		3649		4389		5299		6500		8318		12334
180	52	3665	59	4409	66	5323	73	6534	80	8375	87	12522
190		3681		4429		5348		6569		8433		12719
200		3698		4448		5373		6603		8492		12927
210		3714		4468		5398		6638		8552		13149
220		3731		4488		5423		6674		8614		13387
230		3747		4507		5448		6710		8676		13641
240	53	3764	60	4527	67	5474	74	6746	81	8739	88	13907
250		3780		4547		5500		6782		8803		14186
260		3797		4565		5526		6819		8859		14483
270		3814		4588		5552		6855		8926		14800
280		3831		4608		5578		6894		8994		15131
290		3848		4629		5604		6932		9074		15470
300	54	3865	61	4649	68	5631	75	6970	82	9145	89	15820
310		3882		4670		5658		7009		9218		16182
320		3899		4691		5685		7048		9292		16554
330		3915		4712		5712		7088		9368		16932
340		3933		4733		5739		7128		9446		17325
350		3950		4754		5767		7169		9525		17738
360	55	3967	62	4775	69	5794	76	7210	83	9606	90	18171
370		3985		4796		5822		7251		9687		18621
380		4003		4818		5851		7292		9769		19087
390		4021		4839		5880		7333		9852		19569
400		4039		4860		5910		7374		9936		20067
410		4057		4881		5940		7415		10021		20581
420		4075		4902		5970		7456		10107		21111
430		4093		4923		6000		7497		10194		21657
440		4111		4944		6030		7538		10281		22219
450		4129		4965		6060		7579		10369		22797
460		4147		4986		6090		7620		10457		23391
470		4165		5007		6120		7661		10546		23991
480		4183		5028		6150		7702		10636		24607
490		4201		5049		6180		7743		10727		25239
500		4219		5070		6210		7784		10818		25887
510		4238		5091		6240		7825		10910		26551
520		4257		5112		6270		7866		11002		27231
530		4275		5133		6300		7907		11094		27927
540		4294		5154		6330		7948		11187		28639
550		4313		5175		6360		7989		11281		29367
560		4332		5196		6390		8030		11375		30111
570		4351		5217		6420		8071		11470		30871
580		4370		5238		6450		8112		11565		31647
590		4389		5259		6480		8153		11661		32439
600		4409		5280		6510		8194		11757		33247
610		4429		5301		6540		8235		11854		34071
620		4448		5322		6570		8276		11951		34911
630		4468		5343		6600		8317		12049		35767
640		4488		5364		6630		8358		12147		36639
650		4507		5385		6660		8399		12246		37527
660		4527		5406		6690		8440		12345		38431
670		4547		5427		6720		8481		12445		39351
680		4565		5448		6750		8522		12545		40287
690		4588		5469		6780		8563		12646		41239
700		4608		5490		6810		8604		12747		42207
710		4629		5511		6840		8645		12848		43191
720		4649		5532		6870		8686		12949		44191
730		4670		5553		6900		8727		13051		45207
740		4691		5574		6930		8768		13153		46239
750		4712		5595		6960		8809		13255		47287
760		4733		5616		6990		8850		13357		48351
770		4754		5637		7020		8891		13460		49431
780		4775		5658		7050		8932		13563		50527
790		4796		5679		7080		8973		13666		51639
800		4818		5700		7110		9014		13769		52767
810		4839		5721		7140		9055		13872		53911
820		4860		5742		7170		9096		13975		55071
830		4881		5763		7200		9137		14079		56247
840		4902		5784		7230		9178		14182		57439
850		4923		5805		7260		9219		14286		58647
860		4944		5826		7290		9260		14390		59871
870		4965		5847		7320		9301		14494		61111
880		4986		5868		7350		9342		14599		62367
890		5007		5889		7380		9383		14703		63639
900		5028		5910		7410		9424		14808		64927
910		5049		5931		7440		9465		14913		66231
920		5070		5952		7470		9506		15018		67551
930		5091		5973		7500		9547		15123		68887
940		5112		5994		7530		9588		15229		70239
950		5133		6015		7560		9629		15334		71607
960		5154		6036		7590		9670		15440		73007
970		5175		6057		7620		9711		15546		74427
980		5196		6078		7650		9752		15652		75867
990		5217		6099		7680		9793		15758		77327
1000		5238		6120		7710		9834		15865		78807

DISSERTAZIONE

GEOMETRICO-ANALITICA

DELLA COSTRUZIONE E DELLA QUADRATURA DI ALCUNE VOLTE E LUNULE.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

Giova sommamente all' Architettura il determinare la costruzione, e la quadratura di alcune Volte, e Lunule. Se la costruzione è rettamente determinata, la volta reca all' occhio molto piacere: e la cognizione della quadratura di una volta ti rende necessaria per istabilire giustamente il contratto coll' Artesice, che la dee costruire. Io ho dovuto convincere un Artesice, che la superficie della volta circolare d'una tribuna quadrata sta a quella del sottoposto pavimento come 8:7 mediante il computo dei materiali, ch'egli avea posti in opera nel formarla.

PROBLEMA I.

Trovare la superficie della Volta d' una Tribuna quadrata formata con quattro Lunule.

La volta d' una tribuna quadrata rade i quattro archi eguali, che la detta tribuna compongono, ed è formata da quattro lunule l' una dall' altra separate da due ellissi, che s' incrocicchiano, i cui assi maggiori sono le diagonali del quadrato, sopra i lati del quale i quattro archi sono costrutti, ed i semiasse minori s' eguagliano al raggio degli archi.

Sia (Fig. 1.) *AHB* la metà d' un arco della tribuna, *C* il centro dell' arco stesso, $CA=CB$ il raggio. Immaginiamoci che il predetto arco sempre parallelo a se stesso si muova col centro *C* per la linea *CE* uguale, e normale a *CB*; il raggio

raggio CB genererà il quadrato CD , ed il quadrante AHB la superficie $AHBDOF$ d' un quadrante di cilindro. Venga ora tagliata la mentovata superficie dal piano $FIBLE$ normale al quadrato CD , e che passi per la diagonale BE del detto quadrato, e determinerà esso piano la metà $BHAFIB$ d' una delle nostre lunule, di cui si cerca la quadratura, la qual lunula mediante l'ellisse BIF confina colla vicina.

Egli è certo che la superficie $BHAFIB$ della semilunula s' eguaglia alla superficie $BHAFOD$ del quadrante del cilindro meno la superficie $BIFOD$. La superficie del cilindro è facilissima da ritrovarsi, supposta la rettificazione del cerchio, pareggiando essa il prodotto della circonferenza BHA nella lunghezza $AF=CB$ del cilindro. Resta dunque da determinare la superficie $BIFOD$.

Segnata ad arbitrio l'ascissa BG , ed il suo infinitesimo elemento Gg , per li punti G, g si tirino le due ordinate GH, gb , e pel punto H la Hn parallela a BC . Si conducano GK parallela a CE , KO, LI parallele a GH , che saranno ad essa eguali, e congiunti i punti $H O$ colla retta HO , che passerà pel punto I , si meni pel punto b la retta bo parallela ad HO . Mentre l'ascissa BG cresce per l'elemento Gg , la superficie $BIOD$ cresce per l'elemento $IioO=IO.Oo=IO.Hb$: ma $IO=LK=KE=CG$; dunque l'elemento $IioO=CG.Hb$. Per la similitudine dei triangoli HCG, Hbn abbiamo $CH=bo:CG::Hb:nb$, e per conseguenza $CG.Hb=bo.bn$: ma quest' ultima quantità è l'elemento del rettangolo HK ; dunque la superficie $BIOD$, ed il rettangolo HK , che hanno gli elementi eguali, sono fra loro eguali. Quindi se dalla superficie $BHOD$ si sottrarrà il rettangolo HK , resterà la superficie della porzione di lunula BHI . Quando l'ascissa BG è divenuta eguale al raggio BC , la superficie $BHOD$ pareggia la $BHAFOD$, e s' eguaglia al prodotto $BHA.BC$. In oltre il rettangolo HK si è cangiato nel quadrato $AE=(BC)^2$. Sarà pertanto la superficie della semilunula $BHAFIB=(BHA-BC).BC$, ed essendo la volta formata da otto semilunule, sarà la sua intera superficie $= (2BHA - 2BC).4BC$; il che ecc.

COROLLARIO I.

La superficie *BIFOD* della parte di cilindro tagliata fuori dal piano *BIFELB* è geometricamente quadrabile, avendo io dimostrato, che qualunque sua porzione *BIOD* s' eguaglia al corrispondente rettangolo *HK*.

COROLLARIO II.

S' eguaglia la superficie del pavimento della tribuna a $4(BC)^2$; dunque le superficie della volta, e del pavimento si riguardano nella proporzione di $(2BHA - 2BC) \cdot 4BC : BC \cdot 4BC$, cioè come $2BHA - 2BC : BC$, o sia come la circonferenza del semicircolo meno il diametro al raggio.

COROLLARIO III.

Ammeffa l' approssimazione Archimedeana, che il quadrante al raggio stia come 11 : 7, si troverà la superficie della nostra volta $= (\frac{11}{7} BC - 2BC) \cdot 4BC = \frac{1}{7} BC \cdot 4BC$, la quale corrisponderà all'aja del pavimento come $\frac{1}{7} BC \cdot 4BC : BC \cdot 4BC$, ch' è quanto a dire come 8 : 7. Praticamente adunque si avrà la superficie della volta, aggiungendo a quella del pavimento la settima parte.

COROLLARIO IV.

Pel Corollario I. la superficie *BIFOD* s' eguaglia al quadrato *AE*, o sia *CD*, e perciò ella è doppia del triangolo *BED*, ch' è la sua proiezione nel piano orizzontale *CD*. Se adunque la volta d' un vaso quadrato, il cui pavimento $(2CB)^2$, si costruisca di figura circolare a quattro venti, e senza lunule, la sua superficie sarà doppia di quella del pavimento, essendo ella uguale ad otto superficie *BIFOD*, ed il pavimento ad otto triangoli *BED*.

P R O B L E M A II.

Determinare la figura del perimetro d' una Lunula generata in una Volta ellittica dal movimento d' un semicircolo lungo una linea orizzontale normale al lato del vajo , il raggio del qual semicircolo sia più picciolo del semiasse minore della ellipse , colla qual e costrutta la Volta.

Sia (Fig. 2.) $CBZRFC$ un pezzo di volta ellittica , BK un piano orizzontale , ed $AHBC$ un quadrante di circolo normale ad esso piano, il quale parallelo a se stesso si muova col centro C sempre nella linea CK . La circonferenza BHA tagliando la volta genererà il semiperimetro BIF della semilunula $BIFAHB$, la cui figura si vuole geometricamente determinare .

Suppongo , che CFR sia un quadrante d'ellisse , i cui semiasse CK , KR , la quale io ripeto nella Fig. 3. S'accomodi ad essa l' ordinata FE uguale al raggio CA del quadrante circolare $AHBC$, e tirata la diagonale CR , che tagli EF nel punto S , per questo si conduca ST parallela a CK . Col semiasse trasverso EK , e col conjugato TR descrivasi l' iperbola Apolloniana (Fig. 2.) ELB , che passerà pel punto B . Pel punto qualunque G si tiri GM parallela , ed eguale a CK , che intersechi l' iperbola nel punto L , e condotta alla semellisse GIP della volta l' ordinata LI , dico che il punto I è nel perimetro BIF .

Per la proprietà della ellisse CFR , ed essendo $EF = CA$, avremo $EK = \frac{CK}{KR} \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$, e per la similitudine dei triangoli CKR STR , $TR = \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$. Menata pel punto L la DLQ parallela a BC , sarà per la natura dell' iperbola $(KQ)^2 - (KE)^2 = \frac{(EK)^2}{(TR)^2} \cdot (QL)^2$, e sostituendo in vece di EK TR i loro valori, $(KQ)^2 - \frac{(CK)^2}{(KR)^2} \cdot ((KR)^2$

$-(CA)^2 = \frac{(CK)^2}{(KR)^2} \cdot (QL)^2$, e per conseguenza $\frac{(KR)^2}{(CK)^2} \cdot (KQ)^2$
 $-(KR)^2 + (CA)^2 = (QL)^2$. Nell'ellisse GIP essendo $ML = KQ$,
 $MP = KR$, abbiamo $(KR)^2 - \frac{(KR)^2}{(CK)^2} \cdot (KQ)^2 = (LI)^2$; dun-
 que unendo insieme i valori trovati di $(QL)^2$, $(LI)^2$; $(QL)^2$
 $+ (LI)^2 = (AC)^2$. Supponendo pertanto che il quadrante
 $AHBC$ abbia viaggiato lungo la retta $CQ = GL$, e sia giun-
 to nel sito $OIDQ$, il punto I farà comune all'ellisse GIP ,
 ed al detto quadrante, e la circonferenza DIO tagliando la
 volta nel punto I , apparterrà esso al perimetro BIF della
 femilunula $BIFAHB$; il che ecc.

COROLLARIO I.

La nostra curva BIF è un luogo alla superficie. Si deter-
 mina essa in due modi, o prendendo per ascissa l'arco iper-
 bolicò BL , e per ordinata la retta LI , ch'è del pari ordi-
 nata e della ellisse GIP , e del circolo DIO , ovvero per ascissa
 l'arco circolare BH , e per ordinata la $HI = GL$, ch'è ap-
 plicata ugualmente e all'ellisse GIP , e all'iperbola BLE .

COROLLARIO II.

La proiezione della curva BIF nel piano orizzontale BK
 è l'iperbola BLE , e nel piano verticale CH il circolo BHA .

COROLLARIO III.

Se (*Fig. 3.*) $EF = KR$, cioè a dire se sono eguali il rag-
 gio del circolo generante la lunula, e la saetta della volta,
 ne segue essere (*Fig. 2.*) $EK = 0$, ed in tale supposizione
 l'iperbola BLE si cangia nella retta BK , e la curva BIF
 in un quadrante di ellisse, i cui semiasse BK , KR .

P R O B L E M A I I I .

Quadrare la Semilunula BHAFIB.

Prorogate (*Fig. 2. 4.*) le parallele CK , GM , BX , tiro ad esse la normale eyb , ed indi al piano, in cui giacciono le dette parallele, la parimente normale ef , che faccio uguale a $\frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$. Coi semiaassi eb , ef descrivo il quadrante ellittico $ebif$, il quale camminando sempre parallelo a se stesso lungo alla linea ek uguale alla EK della *Fig. 2*, generi colla sua circonferenza la superficie $bifnzzx$ del quadrante di cilindro ellittico. Nella stessa guisa il quadrante di circolo $CBHA$ generi la superficie $BHANZX$ del quadrante di cilindro. Conduco le ordinate GH y , e le HZ iz parallele a GM ym , e segno i menomi archetti HS io corrispondenti a pari decrementi HT il delle ascisse uguali CG , ey . E' noto ai Geometri essere $HS = \frac{CA \cdot HT}{\sqrt{((CA)^2 - (CG)^2)}}$, $io = \frac{\sqrt{((eb)^4 + ((ef)^2 - (eb)^2) \cdot (ey)^2)}}{eb \sqrt{((eb)^2 - (ey)^2)}}$. *il*, e poichè $eb = CA$, $ef = \frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$, $ey = CG$, $il = HT$, dopo i necessari computi troveremo $io = \frac{CA \cdot HT \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)}}{\sqrt{((CA)^2 - (CG)^2)} \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$. Perciò $HS : io :: \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)} : \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)}$, e conseguentemente $HS \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = io \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$, e moltiplicando da entrambe le parti per $\frac{CK}{KR}$, $HS \cdot \frac{CK}{KR} \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = io \cdot \frac{CK}{KR} \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$: ma $\frac{CK}{KR} \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = QK = ML = ZI$ per l' equazione dell' iperbola BLE , e per la costruzione $\frac{CK}{KR} \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)} = ek = ym = iz$; dunque $HS \cdot IZ$

$= io. iz$. Si offervi essere $SH. IZ$ l'elemento della superficie $BIZX$, ed $io. iz$ l'elemento della superficie $bizx$, e si deduca essere $BIZX = bizx$: ma $BHIB = BHZX - BIZX$; dunque $BHIB = BHZX - bizx$, cioè a dire uguale alla differenza di due superficie cilindriche, una circolare, e l'altra ellittica corrispondenti a pari ascisse BG , by . Posta $CG = cy = 0$, avremo la superficie della semilunula $BHAFIB = BHANZX - bifnxx$ differenza fra le superficie di due quadranti dei mentovati cilindri; il che ecc.

S C O L I O I.

Questa soluzione può, come vedremo, adattarsi al caso, in cui sia $CA = KR$, e conseguentemente $EK = 0$, BLE una linea retta, ed il semiasse ef dell'ellisse bif infinito. In tale circostanza per altro egli è meglio ricorrere al Problema I., e quantunque (Fig. 1.) CE non sia eguale a CB , si troverà $BIOD = HK$, e perciò $BHIB = BHOD - HK$. In fatti ho dimostrato nel predetto Problema essere $CH:CG::Hb:nb$; ma $CH = CB = ED$, $GG = EK$, e per la similitudine dei triangoli EDB , EKL , $ED:EK::DB:KL$; dunque $DB:KL::Hb:nb$, e poichè $DB = bo$, $KL = IO$, $Hb = Oo$, $bo:IO::Oo:nb$, e passando all'equazione $IOo = nbo$. Fatta la riduzione, che IOo , nbo sono gli elementi dell'aje $BIOD$, HK , ne dedurremo l'eguaglianza dell'aje stesse, e conchiuderemo essere $BHIB = BHOD - BIOD = BHOD - HK$; il che ecc.

C O R O L L A R I O.

Qualunque proporzione abbia $BC:CE$, l'aja $BIFOD$ è sempre doppia del sottoposto triangolo BED .

S C O L I O II.

Ho affermato poterli adattare la soluzione del Problema III. al caso, in cui sia (Fig. 2. 4.) $CA = KR$. In questa circostanza essendo $ef = \frac{KK.CA}{\sqrt{(KR)^2 - (CA)^2}} = \infty$, l'arco ellittico hi s'adeguerà colla ordinata yi , e perciò $BIZX = bizx = im$. Conciossiachè $CB = cb$, avremo $CA:GH::ef$

$$= \frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}} : yi, \text{ e quindi } yi = \frac{KR \cdot GH}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}} :$$
 ma $ek = ym = \frac{CK}{KR} \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$ per la costruzione ;
 dunque $im = CK \cdot GH = HM$, e per conseguenza $BHIB = BHZX - bizx = BHZA - HM$; il che ecc.

S C O L I O III.

Alle lunule praticamente non si assegna la figura determinata nel Problema II. , la quale sendo stata posta in uso nella Chiesa del Redentore in Venezia , non lascia l' occhio contento. Il contorno (*Fig. 5.*) BIF della semilunula $BIFAHB$ suol farsi di figura ellittica nata dal tagliare la volta $CBVRFC$ col piano verticale $BEFIB$, che passi per la linea BE . Ciò posto cerchiamo se alla semilunula $BIFAHB$, che dee rader il quadrante di circolo BHA , si può assegnare la figura di una porzione di superficie di un frutto conico , il quale tagliato dal piano verticale $BEFIB$ ci dà un'ellisse . La figura di una porzione di superficie di un cilindro non serve alla nostra ipotesi , che sia $AC < KR$, avendo dimostrato nel Problema II. , che la volta ellittica , ed il cilindro si tagliano mediante una curva diversissima dall' ellisse .

P R O B L E M A IV.

Data una Volta ellittica , determinare quel frutto conico , che la tagli in maniera . che la comune sezione sia un pezzo d' ellisse .

Sia $AHBSFA$ il frutto conico che si cerca , e la comune sezione di esso , e della volta $CBVRFC$ sia il pezzo d'ellisse BIF . Pel punto F , che dee appartenere all'ellisse CFR della volta , i cui semiasii $CK \cdot KR$, si conduca FE ordinata alla detta ellisse , indi nel piano orizzontale CX si meni la retta BE , che sarà la proiezione del pezzo d'ellisse BIF . Scelto ad arbitrio il punto L nella linea BE , si descriva per esso la LI ordinata all'ellisse BIF , e la linea GLM parallela ed eguale a CK . Se il frutto conico è quello che si cerca , l'el-

lisse GIP della volta dee passare pel punto I . Per lo stesso punto ti tagli il frusto conico con un piano verticale parallelo al $CBHA$, onde ti generi il quadrante di circolo DIO , i cui raggi QO, QD . Si tiri l' AT parallela a CE , la quale tagli la QO nel punto Z .

Pongo $AC = CB = c$, $CK = GM = a$, $KR = MP = b$, $CE = g$, e per la natura dell' ellisse CFR avremo $EF = \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)}$, da cui sottratta $ER = c$, resta $RF = \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} - c$. Sia in oltre $GL = CQ = x$, e per conseguenza $EQ = g - x$. Per la similitudine dei triangoli ATF , AZO avremo

$$AT : RF :: AZ : ZO$$

$$g : \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} - c :: x : \frac{\frac{bx}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} - cx}{g}, \text{ analo-}$$

$$\text{gia, che mi dà } ZO = \frac{\frac{bx}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} - cx}{g}. \text{ S' aggiunga ad}$$

$$\text{essa linea } QZ = c, \text{ e ne risulterà } QO = \frac{cg - cx + \frac{bx}{a} \sqrt{(2ag - g^2)}}{g}.$$

La somiglianza dei triangoli ECB, EQC ci somministra la proporzione $EC : CB :: EQ : QL$

$$g : c :: g - x : \frac{cg - cx}{g}, \text{ da cui si deduce il valore di}$$

$$QL = \frac{cg - cx}{g}. \text{ Per l' equazione al circolo } DIO \text{ abbiamo } (QO)^2 - (QL)^2 = (LI)^2, \text{ cioè sostituendo in cambio di } QO, \text{ e di } QL \text{ i ritrovati valori, e cancellati i termini che si elidono, } (LI)^2 = \left(\frac{2cbx}{ag} - \frac{2cbx^2}{ag^2} \right) \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} + \frac{2b^2x^2}{ag} - \frac{b^2x^2}{a^2} :$$

$$\text{ma per l' equazione all' ellisse } GIP, (LI)^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$$

$$= 2b^2x$$

$$= \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}; \text{ dunque } \left(\frac{2cbx}{ag} - \frac{2cbx^2}{ag^2} \right) \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2b^2x}{a} - \frac{2b^2x^2}{ag}, \text{ e dividendo per } \frac{2bx}{a} - \frac{2bx^2}{ag}, \frac{c}{g} \sqrt{(2ag - g^2)} = b,$$

equazione che maneggiata determina $CE = g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, ed

$$EF = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}. \text{ Quindi tagliata } CE = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2},$$

e condotta l'ordinata EF all'ellisse CFR , e congiunti i punti AF colla linea AF , la figura $CAFE$ sarà quella, che, girata intorno l'asse CE , genererà il frusto conico, che si desidera; il che ecc.

S O L U Z I O N E S I N T E T I C A .

Sia (Fig. 6.) Cc l'asse maggior dell'ellisse della volta. Dividati nel punto E in maniera, che sia $CE:Ec::(CA)^2:(KR)^2$, cioè a dire come i quadrati del raggio CA della mezzaluna, e del semiasse minore KR dell'ellisse della volta. Nel piano orizzontale, che passa per Cc , si tirino le linee BCA , bca normali a Cc , e sia $CB=CA$ raggio della mezzaluna. Parallela alle descritte linee si meni EF uguale all'ordinata, che nell'ellisse della volta corrisponde all'ascissa CE , e per i punti $A F$ si tiri la AFa , che tagli la bca nel punto a . Condotta poscia pei punti $B E$ la retta BE , dico che prorogata intersecherà nel punto a le linee Aa , ba , e che per conseguenza avendo le due ellissi, che nascono dalla sezione della volta, e del frusto conico generato dal giro intorno l'asse Cc della figura $CAac$, l'asse maggiore Ba , e l'ordinata EF comuni, sono perfettamente uguali, e si combaciano mutuamente.

D I M O S T R A Z I O N E .

Poichè le linee CE Ec stanno in ragione di $(CA)^2:(KR)^2$, sarà $CE = \frac{2CK \cdot (CA)^2}{(CA)^2 + (KR)^2}$, $Ec = \frac{2CK \cdot (KR)^2}{(CA)^2 + (KR)^2}$, ed il rettangolo $CE \cdot Ec$ sarà uguale al rettangolo $CA \cdot KR$.

golo $CEc = \frac{4(CK)^2.(CA)^2.(KR)^2}{((CA)^2 + (KR)^2)^2}$: ma l'ordinata EF all'ellisse della volta s' eguaglia a $\frac{KR}{CK} \sqrt{CEc}$; dunque $EF = \frac{2CA.(KR)^2}{(CA)^2 + (KR)^2}$, e conseguentemente $BA = 2CA : EF = \frac{2CA.(KR)^2}{(CA)^2 + (KR)^2} :: (CA)^2 + (KR)^2 : (KR)^2$. Fatta la riflessione , che nella stessa ragione di $(CA)^2 + (KR)^2 : (KR)^2$ si riguardano per la costruzione le linee $Cc = Al$, $CE = AY$, e che per i triangoli simili $\triangle Ala$, $\triangle YF$, $Al : AY :: Aa : AF$, si deduca essere $BA : EF :: Aa : Fa$. Quindi le due linee Aa , Ba si tagliano nello stesso punto a della linea ba ; il che ecc.

COROLLARIO.

Se (Fig. 5.) $CA = KR$, il punto E coincide col punto K , la curva BIF diviene un quadrante d'ellisse, ed il quadrante di frusto conico si cangia in un quadrante di cilindro.

SCOLIO.

Per la natura dell'ellisse $CZFR$ gli elementi dell'ordinata EF , e dell'ascissa CE stanno fra loro come $(KR)^2 . FK : (CK)^2 . EF$, o sostituendo i simboli analitici come $b^2 . (a - \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}) = b^2 . (\frac{ab^2 - ac^2}{b^2 + c^2}) : a^2 . \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}$, e fatte le debite riduzioni, come $b^2 - c^2 : 2ac$. Di sopra abbiamo trovato $YF : AY :: \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2) - c} : g$, e quindi ponendo invece di g lo scoperto valore $\frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, ne risulterà dopo i necessarij computi $YF : AY :: b^2 - c^2 : 2ac$. Essendo dunque gli elementi delle coordinate EF CE come $YF : AY$, la linea AF toccherà l'ellisse $CZFR$ della volta nel punto F . Per la qual cosa condotta

dalla sommità *A* della mezzaluna all' ellisse *CZFR* la tangente *AF*, e girato intorno il punto *C* l' angolo *CAF*, dimodochè i punti *A F* descrivano i quadranti di circolo *AHB*, *FTS*, genererà la linea *AF* una superficie di frusto conico, che intersecandosi colla superficie della volta ellittica, determinerà la semilunula *BIFAHB*, la proiezione del cui contorno *BIF* nel piano orizzontale *CS* è la linea retta *BE*. L' addotta riflessione è confacente alla pratica, e facilita molto la costruzione del frusto conico, e della lunula sovrapposta alla mezzaluna.

PROBLEMA V.

Quadrare la Lunula dell' antecedente Problema IV.

Replicato (*Fig. 7.*) il quadrante di frusto conico della *Fig. 5*, divido similmente i due raggi *CB ES* nei punti *G*, *M*, e per essi tiro al piano *CS* le normali *GH*, *MP*. Condotta prima la *HP*, indi la *GM*, che intersechi la *BE* nel punto *L*, meno *QLD* parallela a *CB*, *LI* parallela a *GH*, *QO* parallela ad *AC*, e suppongo descritto il quadrante di cerchio *DIO*. Delineo parimente *AT* parallela a *CE*, che tagli la *QO* nel punto *Z*. Sieno *Hb*, *Ii*, *Pp* elementi degli archi simili *BH*, *DI*, *SP* proporzionali ad essi archi, e conseguentemente ai raggi *CB*, *QD*, *ES*.

Faccio, come nel precedente Problema IV, $CA = CB = c$, $EF = ES = \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}$, $CE = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, $CF = \frac{cb^2 - c^3}{b^2 + c^2}$, $AF = HP = BS = \frac{c\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 + c^2}$. Sia $AO = HI = BD = x$, $CG = y$,

e per la costruzione $EM = \frac{2b^2y}{b^2 + c^2}$.

Osservo essere $EC : EQ :: CB : QL$: ma $EC : EQ :: FA : FO$; dunque $FA : FO :: CB : QL$
 $\frac{c\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 + c^2} : \frac{c\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 + c^2} - x :: c : \frac{c(-b^2 - c^2) \cdot x}{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}$
H ij

cioè a dire $QL = \frac{c(-b^2-c^2) \cdot x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ Abbiamo altresì
 $BS : BD :: SE : DL$
 $c \frac{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2} : x :: \frac{2cb^2}{b^2+c^2} : \frac{2b^2x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ ana-
 logia che mi dà $DL = \frac{2b^2x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ Quindi fa-
 rà $QD = c + \frac{(b^2-c^2) \cdot x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ Poichè per la costruzione
 $CB : QD :: CG : QL$
 $c : c + \frac{(b^2-c^2) \cdot x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} :: y : y + \frac{(b^2-c^2) \cdot xy}{c \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ sco-
 priremo $QL = y + \frac{(b^2-c^2) \cdot xy}{c \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ I due valori di QL
 ci somministrano l'equazione $\frac{c(-b^2-c^2) \cdot x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} = y$
 $+ \frac{(b^2-c^2) \cdot xy}{c \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} \cdot$ da cui si raccoglie
 $\frac{(c-y) \cdot \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2+\left(\frac{b^2-c^2}{c}\right) \cdot y} = x \cdot$ e per conseguenza QD
 $= \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y} \cdot$ Si fa essere $Hb = \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2-y^2)}} : ma$
 $CB : QD :: Hb : Ii$
 $c : \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y} :: \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2-y^2)}} : \frac{-2b^2c^2dy}{(b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y) \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}} ;$
 dunque $Ii = \frac{-cdy}{(b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y) \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}} \cdot$ ed $\frac{Hb+Ii}{2}$
 $= \frac{2\sqrt{(c^2-y^2)}}{(2b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y) \cdot 2\sqrt{(c^2-y^2)}} =$
 $\frac{-cdy}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y \cdot 2\sqrt{(c^2-y^2)}} \cdot$ Moltiplicando questa
 quantità per $HI = x = \frac{(c^2-cy) \cdot \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y}$ avre-

mo l' elemento dell' aja della lunula , cioè

$$bHli = \frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y) \cdot (c^2 - cy) \cdot cdy \cdot \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)^2 \cdot 2\sqrt{(c^2 - y^2)}}.$$

Posta $b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y = z$, onde ne risulti $c^2 - cy$

$$= \frac{2b^2c^2 - cz}{b^2 - c^2}, \text{ trovo } \frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y) \cdot (c^2 - cy)}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)^2}$$

$$= \frac{4b^4c^3 - cz^2}{(b^2 - c^2) \cdot z^2} = \frac{4b^4c^3}{(b^2 - c^2) \cdot z^2} - \frac{c}{b^2 - c^2}. \text{ Perciò tornando a porre}$$

$$\text{in cambio di } z \text{ il suo valore, sarà } \frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y) \cdot (c^2 - cy)}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)^2}$$

$$= \frac{4b^4c^3}{(b^2 - c^2) \cdot (b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)^2} - \frac{c}{b^2 - c^2}, \text{ e conseguente-}$$

$$\text{mente } bHli = \frac{2b^4c^3 \cdot \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2) \cdot (b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)^2 \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}} - cdy$$

$$- \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} \cdot \frac{cdy}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} \quad (1.). \text{ Compiuto il qua-}$$

drante di frusto conico $NAFPSBN$, noto che il secondo termine s' eguaglia all' elemento NHb della porzione di superficie conica NBH . E vaglia il vero l' analogia

$$TF : FA :: CA : AN$$

$$\frac{cb^2 - c^3}{b^2 + c^2} : c \frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 + c^2} :: c : c \frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} \text{ ci mo-}$$

$$\text{stra essere } AN = HN = c \frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2}, \text{ e per conseguenza}$$

$$NHb = \frac{1}{2}c \frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} \cdot \frac{cdy}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} \quad (2.).$$

Il primo termine lo dispongo così

$$\frac{2b^4c^4 \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2)^3} \cdot \frac{cdy}{\left(\frac{b^2c + c^3}{b^2 - c^2} + y\right)^2 \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}} \quad (3.), \text{ e facen-}$$

$$\text{do } \frac{b^2c + c^3}{b^2 - c^2} = m, \text{ prendo a maneggiare la quantità}$$

$$\frac{-dy}{(m+y)^2 \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}}. \text{ Pongo } m+y = \frac{1}{-u + \frac{m}{m^2-c^2}}, \text{ e do-}$$

$$\text{po le necessarie operazioni trovo } \frac{-dy}{(m+y)^2 \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}} =$$

$$\frac{udu - \frac{mdu}{m^2-c^2}}{\sqrt{(m^2-c^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}} (4.). \text{ Anche qui abbiamo due}$$

termini. Il primo riceve integrazione, essendo

$$\int \frac{udu}{\sqrt{(m^2-c^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}} = \frac{-\sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}}{\sqrt{(m^2-c^2)}} = \frac{-\sqrt{(c^2-y^2)}}{(m^2-c^2) \cdot (m+y)}$$

$$= \frac{(b^2-c^2)^3 \cdot -\sqrt{(c^2-y^2)}}{4b^2c^4 (cb^2+c^3+(b^2-c^2) \cdot y)}, \text{ e moltiplicando per la costante}$$

$$\frac{2b^4c^4 \sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{(b^2-c^2)^3} \text{ tralasciata nel maneggio della for-}$$

mola $\frac{-dy}{(m+y)^2 \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}}$, avremo la quantità algebrica contenuta nell'integrale della formola (3.)

$$= \frac{-b^2 \sqrt{(4a^2c^2+b^2-c^2)^2} \cdot \sqrt{(c^2-y^2)}}{2 \cdot (cb^2+c^3+(b^2-c^2) \cdot y)} (5.). \text{ Prorogo la linea CE}$$

fino in K, onde sia CK=a, e condotta la verticale KV, venga questa tagliata in V dalla linea AF continuata. Per la soluzione sintetica del Problema IV, è CE:CK::2c^2:b^2+c^2;

ma CE:CK::AF:AV, ed AF = $\frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2}$; dunque

$$2c^2:b^2+c^2::\frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2}:\frac{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{2c}=AV.$$

In oltre per la costruzione del presente Problema

$$\begin{array}{lcl} \text{CB:} & \text{QN} & :: \text{GH} : \text{LI} \\ & \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y} & :: \frac{2b^2c\sqrt{(c^2-y^2)}}{b^2c+c^3+(b^2-c^2) \cdot y}, \text{ e} \end{array}$$

perciò $\frac{1}{2} AV.LI = \frac{b^2 \sqrt{(c^2 - y^2)} \cdot \sqrt{(4a^2 c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2 \cdot (b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)}$. La formola (5.) adunque s' eguaglia al prodotto della metà della linea AV nell' ordinata LI .

Prendo ora per mano il secondo termine della formola (4.)

$$\frac{\frac{mdu}{m^2 - c^2}}{(\sqrt{m^2 - c^2}) \cdot \sqrt{(-u^2 + \frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2})}}, \text{ che si riduce alla forma se-}$$

$$\text{guente } \frac{m}{c\sqrt{(m^2 - c^2)}} \cdot \frac{\frac{-c}{m^2 - c^2} \cdot du}{\sqrt{(\frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2} - u^2)}}$$

$$\frac{m}{c\sqrt{(m^2 - c^2)}} \cdot \text{Arco raggio } \frac{c}{m^2 - c^2} \text{ seno } \sqrt{(\frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2} - u^2)} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2} \cdot$$

$$\text{Arco raggio } \frac{(b^2 - c^2)^2}{4b^2 c^3} \text{ seno } (\frac{(b^2 - c^2)^2}{4b^2 c^3} \cdot \frac{2bc \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y})$$

$$= \frac{(b^2 + c^2) \cdot (b^2 - c^2)^2}{8b^4 c^3} \cdot \text{Arco raggio } b \text{ seno } \frac{2b^2 c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y}.$$

$$\text{Moltiplicando per la costante } \frac{2b^4 c^4 \sqrt{(4a^2 c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2)^3} \text{ om-}$$

meffa nel maneggiare la formola (3.), ci si presenterà

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b^2 + c^2) \cdot \sqrt{(4a^2 c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c \cdot (b^2 - c^2)} \cdot \text{Arco raggio } b \text{ seno}$$

$$\frac{2b^2 c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y} \text{ (6.)}. \text{ Agevolmente dimostrasi essere } NC$$

$$= \frac{2ac^2}{b^2 - c^2}, \text{ e per conseguenza } NK = \frac{2ac^2}{b^2 - c^2} + a = \frac{a \cdot (b^2 + c^2)}{b^2 - c^2}. \text{ Di}$$

$$\text{sopra ho trovato il valore di } NA = \frac{c\sqrt{(4a^2 c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2}.$$

Ora verificandosi l' analogia

$$\frac{NC}{2ac^2} : \frac{NA}{c\sqrt{(4a^2 c^2 + (b^2 - c^2)^2)}} :: \frac{NK}{a \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}} : \frac{NV}{2c \cdot (b^2 - c^2)}$$

abbiamo $NV = \frac{(b^2 + c^2) \cdot \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c \cdot (b^2 - c^2)}$, ed essen-

do $KR = b$, $LI = \frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y}$, si conchiuda essere

$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b^2 + c^2) \cdot \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c \cdot (b^2 - c^2)}$. Arco raggio b seno

$\frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y} = \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno LI .

Descritto pertanto sopra la base KR un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa $= NV$, e generato col mezzo di esso un quadrante conico, ed al quadrante di circolo base di detto solido adattata l'ordinata $LI' = LI$, la corrispondente porzione di superficie conica s'agguaglia alla formola (6.)

Raccogliendo le cose a lungo spiegate, farà BHI

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(b^2 + c^2) \cdot \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c \cdot (b^2 - c^2)} \cdot \text{Arco raggio } b \text{ seno } \frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y}$$

$- \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}{b^2 - c^2}}$. Arco raggio c seno $\sqrt{(c^2 - y^2)}$

$$- \frac{b^2 \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)} \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}}{2 \cdot (b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) \cdot y)}$$

$= \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno LI

$- \frac{1}{2} NA$. Arco raggio CA seno GH

$- \frac{1}{2} AV$. LI , e per conseguenza $BHAFIB$

$= \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno EF

$- \frac{1}{2} NA$. Arco raggio CA seno CA

$- \frac{1}{2} AV$. EF . Non s'è aggiunta costante; perchè posta GH

$= \sqrt{(c^2 - y^2)} = 0$, rettamente si trova $BHI = 0$.

SCOLIO I.

Potrebbe a qualcuno cadere in pensiero, che la presente soluzione non andasse d'accordo collo Scolio I. dopo il Problema III, nel quale ho dimostrato, che posta $CA = KR$ è $BHI = BHPS - HM$. In fatti cancellati i termini eguali a

nulla, sembra che si trovi $BHI = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}$. Arco raggio c

seno

seno $\sqrt{(c^2 - y^2)} = \frac{a^2 c^2}{b^2 - c^2}$. Arco raggio c seno $\sqrt{(c^2 - y^2)} = \frac{1}{2} a \sqrt{(c^2 - y^2)} = a$. Arco raggio c seno $\sqrt{(c^2 - y^2)} = \frac{1}{2} a \sqrt{(c^2 - y^2)} = BHP - \frac{1}{2} HM$.

Per il coprire il fonte del paralogismo, si descriva col raggio $KR = b$ il quadrante $R\Delta IT$, e continuata la linea GM fino in m , si tiri l'ordinata mX , indi si accomodi allo stesso quadrante l'ordinata $L'I = LI$. Faccio $KR = b = c + n$, e suppongo n una quantità infinitamente picciola. Essendo

$$NC : CA :: NK : KV$$

$$\frac{2ac^2}{b^2 - c^2} : c :: \frac{a(b^2 + c^2)}{b^2 - c^2} : \frac{b^2 + c^2}{2c}, \text{ si trova } KV = \frac{b^2 + c^2}{2c},$$

e ponendo in luogo di b il suo valore $c + n$, KV

$$= \frac{2c^2 + 2cn + n^2}{2c} = c + n + \frac{n^2}{2c} = b + \frac{n^2}{2c}, \text{ equazione che ci in-$$

segna essere $RV = \frac{n^2}{2c}$ minima del secondo grado, e che per

conseguenza fra KV , KR passa una strettissima adeguazione. Quindi i due quadranti descritti coi raggi KR , KV sono una cosa stessa, e la linea NP continuata passa pel punto X , e la linea NS nel punto T . Abbiamo determinato $BHI = TI$. $\frac{1}{2} AN - BH$. $\frac{1}{2} HN - GH$. $\frac{1}{2} Gm$. Si aggiunga, e si sottri la quantità IX . $\frac{1}{2} AN$, e ne risulterà TX . $\frac{1}{2} AN - BHI$. $\frac{1}{2} HN - GH$. $\frac{1}{2} Gm - IX$. $\frac{1}{2} XN - BHI$. E poichè TA . $\frac{1}{2} XN - BH$. $\frac{1}{2} HN = BHI$, $BHI = BH \Delta T$. $BHI = BH \Delta T - GH$. $\frac{1}{2} Gm - IX$. $\frac{1}{2} XN$.

Cerchiamo ora il valore del termine IX . $\frac{1}{2} XN$. Fatta la riflessione essere $NC : NK :: CG : Km$,

$$\frac{2ac^2}{b^2 - c^2} : \frac{a(b^2 + c^2)}{b^2 - c^2} :: y : \frac{(b^2 + c^2)}{2c^2}. y \text{ ci si}$$

presenterà il valore di $Km = \frac{(b^2 + c^2)}{2c^2} \cdot y = \frac{(c + n)}{c} \cdot y$, da cui

dipende quello di $mX = \frac{(c + n)}{c} \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}$. Ma $L'I = LI$

$$= \frac{2b^2 c \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^2 + (b^2 - c^2) \cdot y} = \frac{(c^2 + 2cn) \cdot \sqrt{(c^2 - y^2)}}{c^2 + cn + ny}; \text{ dunque ri-}$$

dotti i computi, $mX - LI' = \frac{ny}{c^2} \sqrt{(c^2 - y^2)}$. Essendo questa una grandezza infinitesima, avremo l' analogia

$$Km : KX :: mX - LI' : IX, \\ = \frac{(c+n)}{c} : c+n :: \frac{ny}{c^2} \sqrt{(c^2 - y^2)} : \frac{n}{c} \sqrt{(c^2 - y^2)} \text{ che ci}$$

mostra $IX = \frac{n}{c} \sqrt{(c^2 - y^2)}$. Concioffiachè $VN = AN$

$$= \frac{(b^2 + c^2) \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c \cdot (b^2 - c^2)}, \text{ surrogato in cambio di } b \text{ il}$$

suò valore $c + n$, e trascurate le quantità minime del secondo grado, scopriremo $ZN = \frac{a(c+n)}{n}$. Perciò $IX : \frac{1}{2} AN = \sqrt{(c^2 - y^2)} \cdot \frac{(ac + an)}{2c} = \sqrt{(c^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{2} a = GH : \frac{1}{2} Gm$.

Troveremo adunque per lo Scolio I. dopo il Problema III. $BHI = BHI' - GH \cdot Gm$, e nello stesso tempo ci accorgere-
mo, che il paralogismo nasceva dal trascurare la quantità fi-
nita, e non trascurabile $IX : \frac{1}{2} AN = GH : \frac{1}{2} Gm$. Quand' an-
che la differenza fra b e c divenga eguale a nulla, la det-
ta grandezza pareggia sempre il prodotto $GH : \frac{1}{2} Gm$, ed in
quello caso il nulla IX moltiplicato nell' infinito dirò così
a tutto $\frac{1}{2} AN$ produce una grandezza finita $GH : \frac{1}{2} Gm$. La
Geometria ha i suoi reconditi arcani, e, se mi è lecito di
usare un' ardita espressione, ci fa formare l'idea d' una spe-
cie di creazione.

SCOLIO II.

Se cerco il valore della sottangente dell' ellisse CFR ri-
spettivamente al punto F , lo trovo $= \frac{4a^2b^2}{(b^2 + c^2)(b^2 - c^2)}$: ma
tale è la misura della linea EN : dunque la linea NMF tocca la no-
minata ellisse nel punto F , il che ho parimente provato nello Sco-
lio dopo il Problema IV. Da ciò ne nasce, che supposta FQ
minima, la differenza fra QO , LI è infinitesima del secondo

ordine, ed essendo l'arco OI una menoma porzione del primo ordine del quadrante OID , è finito il raggio QO del suddetto quadrante. Non lascio di notare, che in riguardo alle linee date CA , CK , KR , la nostra lunula è la più lunga, che costruire si possa.

S C O L I O III.

Condotta qualunque altra linea dal punto A all' ellisse CFR , la taglierà in un punto medio fra C ed F . Sia questo, per non moltiplicare le figure, il punto F , ed interverrà, che ad EQ infinitesima corrisponda $QO - LI$ infinitamente picciola dello stesso grado, e che per conseguenza l' arco OI riguardi il suo quadrante di circolo con una proporzione finita, e che il detto quadrante sia fornito d' un raggio minimo, il qual raggio diviene uguale a nulla nel punto F . Anche qui ci si manifesta un mistero della Geometria. Se AF è tangente, al punto F compete il massimo raggio finito EF . Che se AF è secante, al punto F tocca il raggio $= 0$, quantunque l' angolo, che formano la tangente e la secante, sia picciolissimo, purchè finito.

P R O B L E M A VI.

Quadrare una Volta ellittica a quattro venti.

La maggior difficoltà consiste nel determinare la superficie del pezzo di volta vicino agli angoli, la cui proiezione nel piano orizzontale è un triangolo rettangolo. Si vede espresso questo pezzo di volta $BIFOD$ nella Fig. 1. Sia dunque DOF un quadrante d'ellisse. Pongo $ED = a$, $EF = b$,

$BD = c$, $EK = x$, e sarà $Ox = - \frac{dx \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$, LK

$= \frac{cx}{a}$, e l' elemento dell' aja $BIOD$, cioè a dire $IOxi =$

$-\frac{cx dx \sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{a \sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$. Facciassi $a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 = a^2z^2$,

e adempite le sostituzioni, troveremo $IOxi$

I ij

$$= \frac{cz^2 d^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(z^2 - b^2)}}.$$
 Questa formola si disponga così

$$IOoi = \frac{c}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot \left(\frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} + dz \sqrt{(z^2 - b^2)} \right) + \frac{c}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot$$

$$\left(\frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} - dz \sqrt{(z^2 - b^2)} \right) = \frac{c}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot$$

$$\left(\frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} + dz \sqrt{(z^2 - b^2)} \right) + \frac{c}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot \frac{b^2 dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}.$$
 Mol-
 tiplicando, e dividendo il secondo termine per $z + \sqrt{(z^2 - b^2)}$,
 ci si presenterà $\frac{c}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot \left(\frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} + dz \sqrt{(z^2 - b^2)} \right)$

$$+ \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot \left(dz \frac{z dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} \right) : (z + \sqrt{(z^2 - b^2)}) = IOoi,$$

 ed integrando, $\frac{cz\sqrt{(z^2 - b^2)}}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} l(z + \sqrt{(z^2 - b^2)})$

$$= BIOD.$$
 Si debbono prendere i logaritmi nella logistica della
 sottangente $= 1$ colla condizione, che b sia il protonu-
 mero, a cui corrisponde il logaritmico $= 0$. Si avverta esse-
 re $BIOD = 0$, quando $EK = x = ED = a$, nella qual circo-
 stanza la formola $a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 z^2$ determina $z = b$.
 Fatta la sostituzione, scopriremo $BIOD = \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} lb = 0$,
 come in fatti dee ritrovarli. Pongo invece di z il suo va-
 lore espresso per x , e mi si affaccia

$$BIOD = \frac{c\sqrt{(a^4 - a^2 + b^2) \cdot x^2} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{2a^2} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot$$

$$l\left(\frac{\sqrt{(a^4 - a^2 + b^2 x^2)} + \sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} \right);$$

 il che ecc.

COROLLARIO I.

Mettendo $x=0$, avremo l'intera superficie $BIFOD = \frac{ca}{2}$

$$+ \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} l(a + \sqrt{(a^2-b^2)}).$$

COROLLARIO II.

Se $a=b$, è $IOi = -\frac{cx dx \sqrt{(a^2(-a^2+b^2).x^2)}}{a^2 \sqrt{(a^2-x^2)}} = -\frac{cx dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, e senza bisogno d'artificj si passa all'integrazione, onde s'abbia $BIOD = c\sqrt{(a^2-x^2)}$. Quando $x=0$, si trova $BIFOD = ac$, cioè a dire la mentovata superficie doppia del triangolo BED , come ho notato nel Corollario dopo lo Scolio del Problema III.

SCOLIO.

Nella stessa supposizione di $a=b$ ricorrendo alla soluzione generale scopriremo $BIOD = \frac{c^2 \sqrt{(a^2-x^2)}}{2} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$.

$l(a + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)} \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}}{a})$. Dovendosi necessariamente accordare le due soluzioni generale, e particolare, egli è d'uopo provare che sia

$$\frac{c\sqrt{(a^2-x^2)}}{2} = \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} \cdot l(a + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)} \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}}{a}).$$

Fingasi che a superi b per una quantità infinitesima. Procedendo con tutto rigore avrei in questa supposizione

$$l(\frac{\sqrt{(a^2(-a^2+b^2).x^2)} + \sqrt{(a^2-b^2)} \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}}{a}) \\ = l(a \frac{(-a^2+b^2)}{2a^2} \cdot x^2 + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)} \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}}{a}); \text{ ma } a^2-b^2$$

è infinitamente più picciola di $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; dunque rettamente ho supposto il predetto logaritmo

$$= l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right). \text{ Alla logistica (Fig. 8.)}$$

GFD della sotttangente $BE = 1$ s'accomodi l'ordinata $EF = b = a$, a cui corrisponde il logaritmo nulla. Sia $AD = a$

$$+ \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}, \text{ e condotta } FC \text{ parallela ad } EA, \text{ re-$$

$$\text{sterà la menoma } CD = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}. \text{ Si meni al}$$

punto F la tangente FB . Per la similitudine dei triangoli FED , DCF avremo

$$\begin{array}{lcl} FE : EB & :: & DC \\ a : 1 & :: & \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : \frac{CF}{a^2} \end{array}$$

$$\text{e conseguentemente } CF = l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2}, \text{ e moltiplicando per } \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

$$\frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right) = \frac{cb^2}{2a^2} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$= c \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}; \text{ il che ecc.}$$

PROBLEMA VII.

Quadrare il pezzo di Volta tagliato fuori dalla lunula del Problema IV.

La metà del pezzo di volta, che si vuol quadrare, si è (Fig. 5.) $BCFIB$. la cui proiezione nel piano orizzontale è il triangolo BCE . Pel punto T (Fig. 6.) si tira TZ parallela ed eguale a KC . Poste, come nel Problema IV, CK

$$= ZT = a, KR = b, BC = c, CE = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}, \text{ l' analogia}$$

$$EC : CB :: TZ : ZB$$

$$\frac{2ac^2}{b^2+c^2} : c :: a : \frac{b^2+c^2}{2c} \quad c' \text{ insegna essere } ZB$$

$$= \frac{b^2+c^2}{2c} = C; \text{ e quindi ne risulta } ST = EK = a - \frac{2ac^2}{b^2+c^2}$$

$$= \frac{ab^2-ac^2}{b^2+c^2}, ES = \frac{b^2+c^2}{2c} - c = \frac{b^2-c^2}{2c}. \text{ Nominata } x \text{ la}$$

qualunque TS , farà, per l' antecedente Problema VI. l' aja della volta, la cui proiezione orizzontale BZE , uguale a

$$C\sqrt{\frac{(a^4(-a^2+b^2).x^2).\sqrt{(a^2-x^2)}}{2a^2}} + \frac{CB^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} \\ l\left(\frac{\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)} + \sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right)$$

$$= \frac{(b^2+c^2)}{4a^2c} \sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{(b^4+b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

$$l\left(\frac{\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)} + \sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right), \text{ sostituendo}$$

in vece di C il suo valore. Se $TS=x$, ne risulta $ZS=a-x$,

$$SE = \frac{(b^2+c^2).x}{2ac}, \text{ l' arco ellittico corrispondente all' ascissa}$$

$$ZS = CE \int - \frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}}, \text{ ed il pezzo di volta}$$

$$\text{corrispondente al rettangolo } ZE = \frac{(b^2+c^2).x}{2ac}$$

$$\int - \frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}}. \text{ Avremo pertanto l' aja della}$$

$$\text{volta relativa al triangolo } BCE = \frac{(b^2+c^2)}{4a^2c} \sqrt{(a^4(-a^2+b^2)x^2)}.$$

$$\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{(b^4+b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2-b^2)}}. l\left(\frac{\sqrt{(a^4(-a^2+b^2)x^2)} + \sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right)$$

$$- \frac{(b^2-c^2)}{2ac}.x. \int - \frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}}, \text{ e quando sia}$$

$$x = EK = \frac{ab^2-ac^2}{b^2+c^2}, \text{ ne risulterà la superficie della volta}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{Fig. 5.}) \quad BCZFIB &= \frac{b^2}{2.(b^2 + c^2)} \sqrt{(b^4 + 4a^2c^2 + c^4 - 2b^2c^2)} \\
 &+ \frac{(b^4 + b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2 - b^2)}} \left(\frac{b\sqrt{(b^4 + 4a^2c^2 + c^4 - 2b^2c^2)} + 2bc\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b^2 + c^2} \right) \\
 &\left(-\frac{b^2 - c^2}{2c} \right) CZF.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA VIII.

Determinare i diametri dei circoli, che formano la Volta d'una lunula, la cui proiezione nel piano orizzontal sia un triangolo, quando la linea collocata nella sua sommità, che la divide in due parti eguali, taglia l'ellisse della Volta del vaso.

Richiedono frequentemente le circostanze, che la linea, la quale passa per le sommità dei circoli, che formano la volta d'una lunula, la cui proiezione nel piano orizzontale sia un triangolo, tagli, e non tocchi l'ellisse della volta del vaso. In tale supposizione egli è d'uopo determinare i diametri variabili dei circoli mentovati. Sia (Fig. 6.) *BHAFIB* la metà d'una delle nostre lunule, e la linea *AF* collocata nella sua sommità tagli nel punto *F* l'ellisse *CPF* della volta del vaso. Nel lato *CE* del triangolo *BCE* proiezione nel piano orizzontale della predetta lunula, segno ad arbitrio il punto *Q*, e per esso conduco *QO* parallela a *CA*, *QL* parallela a *CB*. Il piano *OQL* tagli nel punto *I* la porzione d'ellisse *BiF*, che forma il semiperimetro della lunula, e menata la retta *OI*, sia ad essa normale la *IM*, la quale intersechi la *OQ*, se fa di bisogno, continuata nel punto *M*; egli è certo che *OM* sarà il diametro del circolo, che passa pei punti *O*, *I*. Collo stesso artificio si troveranno i diametri di tutti gli altri circoli, che formano la volta *BHAFIB* della lunula. Prolongata la linea *AC* fino in *D*, di modo che sia *CD = CA*, le estremità inferiori dei detti diametri saranno collocate nella curva *DMF*, che passa pei punti *D*, *F*, e di cui m'accingo a cercar l'equazione. Pel punto *L* situato a piombo del punto *I* si tiri *LG* parallela a *QC*, *LI* verticale

cale e parallela a $\mathcal{Q}O$, ed ordinata all' ellisse GI della volta del vaso. Si menino in oltre IP parallela ad $L\mathcal{Q}$, AY parallela a CE .

Ritenute le denominazioni del Problema IV, sia $CK = a$, $KR = b$, $CA = CD = c$, $CE = AY = g$, e per conseguenza $EF = \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)}$, $YF = \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} - c$. Sia parimente

$GL = C\mathcal{Q} = x$, e quindi $E\mathcal{Q} = g - x$, $ZO = \frac{bx\sqrt{(2ag - g^2)} - acx}{ag}$,

$\mathcal{Q}O = \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)}}{ag}$, $\mathcal{Q}L = PI = \frac{cg - cx}{g}$,

$LI = \mathcal{Q}P = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$, $PO = \mathcal{Q}O - \mathcal{Q}P = \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}}{ag}$. Per la

proprietà del circolo abbiamo

$$\frac{OP}{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}} : \frac{PI}{cg - cx} :: \frac{PI}{cg - cx} : \frac{PM}{g}$$

analogia, che mi suggerisce il valore di

$$PM = \frac{ac^2 \cdot (g^2 - 2gx + x^2)}{acg^2 - acgx + bgx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg^2\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

Aggiungo allo stesso il valore di OP , e trovo il diametro

$$\text{cercato } OM = \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}}{ag}$$

$$+ \frac{ac^2 \cdot (g^2 - 2gx + x^2)}{acg^2 - acgx + bgx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg^2\sqrt{(2ax - x^2)}}; \text{ il che ecc.}$$

COROLLARIO I.

Posta come nel Problema IV, $CE = g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, onde sia EF

$$= \frac{b}{a} \sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}, \text{ si trova } OM = 2O\mathcal{Q} = 2c$$

$$- \frac{2acx + 2bx\sqrt{(2ag - g^2)}}{ag} = 2c + \frac{(b^2 - c^2) \cdot x}{ac}.$$

Tom V.

K

COROLLARIO II.

Se $CQ = x = 0$, si scopre $OM = AD = 2c$, e quindi la curva DMF passa pel punto D .

COROLLARIO III.

Se $CQ = x = CE = g$, ci vuole un po d'artificio per iscoprire, che $OM = 0$, purchè sia $g < \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$. Si faccia $EQ = g$

$$-x = z, \text{ e posta in opera la sostituzione, ci si presenterà } OM = \frac{acz + (bg - bz) \sqrt{(2ag - g^2)} - bg \sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)}}{ag}$$

$$+ \frac{ag}{ac^2 z^2} \frac{g \cdot (acz + (bg - bz) \sqrt{(2ag - g^2)} - bg \sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)})}{g \cdot (acz + (bg - bz) \sqrt{(2ag - g^2)} - bg \sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)})}$$

Quando $EQ = z$ è infinitamente picciola, abbiamo

$$\sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)} = \sqrt{(2ag - g^2)} \frac{-az + gz}{\sqrt{(2ag - g^2)}}$$

$$- \frac{\frac{1}{2} a^2 z^2}{(2ag - g^2)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Egli è necessario in questo caso il tener conto anche della grandezza infinitesima del secondo grado}$$

$$- \frac{\frac{1}{2} a^2 z^2}{(2ag - g^2)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Surrogato il detto valore, scopriremo dopo}$$

$$\text{i necessarij calcoli } OM = \frac{z \cdot c \sqrt{(2ag - g^2)} - bg}{g \sqrt{(2ag - g^2)}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} ab z^2}{(2ag - g^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c^2 z \sqrt{(2ag - g^2)}}{g \cdot (c \sqrt{(2ag - g^2)} - bg) + \frac{\frac{1}{2} ab g^2 z}{2ag - g^2}}. \text{ Nella sup-}$$

$$\text{posizione di } g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2} \text{ è } c \sqrt{(2ag - g^2)} - bg = 0, \text{ e quindi}$$

cancellato oltre il primo anche il secondo termine relativamente nullo in riguardo al terzo, si trova OM

$$= \frac{2c^2(2ag - g^2)^{\frac{1}{2}}}{abg^2} = \frac{4b^2c}{b^2 + c^2}, \text{ valore che in fatti compete nel}$$

Problema IV alla linea zEF . Che se $g < \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, qualmente si suppone nel presente Problema, la quantità $c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg$ è finita, e perciò nel denominatore del terzo termine si dee cancellare la grandezza rispettivamente nulla

$\frac{\frac{1}{2}abg^2z}{2ag - g^2}$, onde trascurato altresì come sopra il secondo termine,

s'abbia $OM = \frac{z.(c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg)}{g\sqrt{(2ag - g^2)}} + \frac{z.(c^2\sqrt{(2ag - g^2)})}{g.(c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg)}$,

equazione da cui s'impara, che ad $E\infty = z = 0$ ci corrisponde nel punto F il diametro $OM = 0$.

Sembrando cosa strana, che nel Problema IV all' assissa CE ci corrisponda il massimo diametro zEF , e nel presente Problema all' assissa segnata colle stesse lettere il minimo diametro $= 0$, massimamente che il motivo di questo gran cambiamento dipende dai valori delle assisse mentovate, che possono essere vicinissimi all' egualità, purchè sia finita la loro differenza, non ho voluto risparmiar parole, onde anche col mezzo dell' Analisi si scopra la cagione dell' inaspettato passaggio dal massimo al nulla.

COROLLARIO IV.

Posto che sia $CE = g = CB = c$, troveremo OM

$$= \frac{ac^2 - acx + bx\sqrt{(2ac - c^2)} - bc\sqrt{(2ax - x^2)}}{ac}$$

+ $\frac{ac.(c^2 - 2cx + x^2)}{ac^2 - acx + bx\sqrt{(2ac - c^2)} - bc\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Fanno un ottimo effetto queste lunule nelle volte a quattro venti; perchè l'elisse BIF è uguale, e parallela a quella, ch'è situata diagonalmente negli angoli del vaso, e separa le volte dei due lati, che stanno fra loro in angolo retto.

COROLLARIO V.

Che se in oltre sarà $IF = 0$, ed $EF = c$, avremo OM

$$= \frac{ac - b\sqrt{(2ax - x^2)}}{a} + \frac{a.(c^2 - 2cx + x^2)}{ac - b\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Nei tempj ad

K ij

una sola nave le lunule di questa fatta cingono gli archi maggiori, e la saetta $KR=b$ della volta si determina in maniera, che la linea AF sia orizzontale, e l'angolo CBE retto. Si ottiene ciò, quando sia $KR=b=\frac{ac}{\sqrt{(2ac-c^2)}}$.

Le lunule ascendenti del Corollario IV, si pongono nelle dette Chiese al di sopra degli archi minori. Chiamato C il raggio dell' arco maggiore compreso l' archivolto, ed essendo stabilito $KR=b=\frac{aC}{\sqrt{(2aC-C^2)}}$, si troverà $EF=\frac{b}{a}$

$$\sqrt{(2ac-c^2)}=\frac{C\sqrt{(2ac-c^2)}}{\sqrt{(2aC-C^2)}}.$$



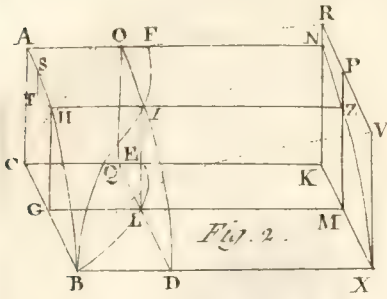


Fig. 2.

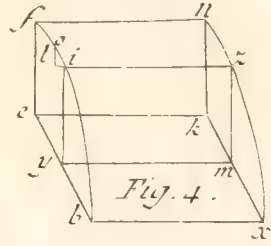


Fig. 4.

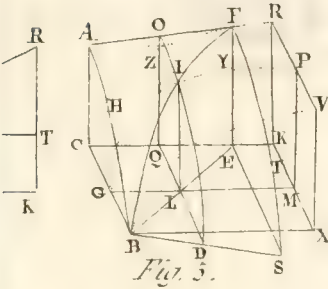


Fig. 5.

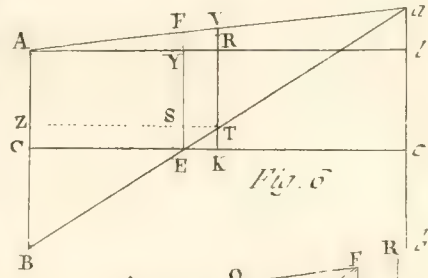


Fig. 6.

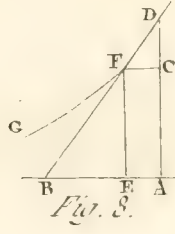
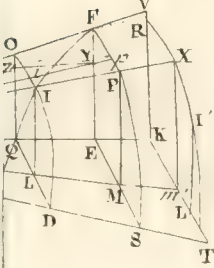


Fig. 8.

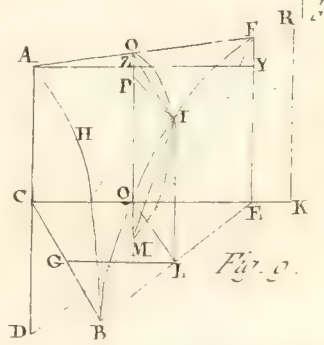


Fig. 9.

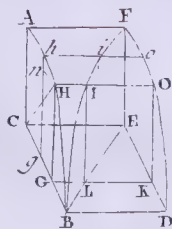


Fig. 1.

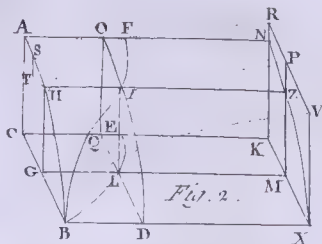


Fig. 2.

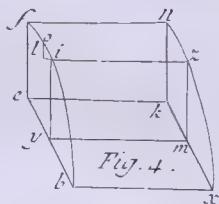


Fig. 4.

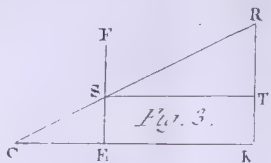


Fig. 3.

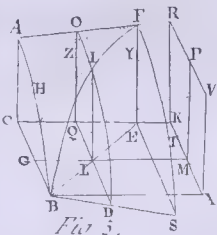


Fig. 5.

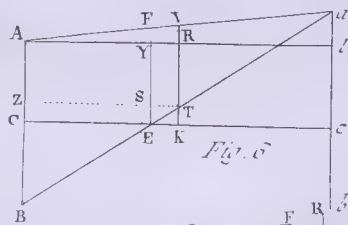


Fig. 6.

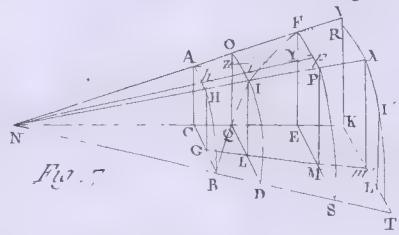


Fig. 7.

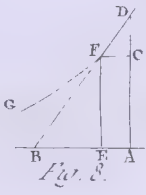


Fig. 8.

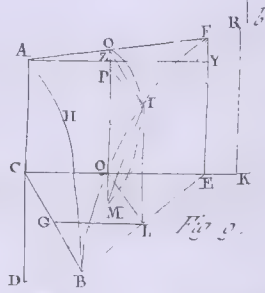


Fig. 9.

DELLA LONGITUDINE

DI VERONA

DETERMINATA CON OSSERVAZIONI
ASTRONOMICHE

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

LA longitudine di Verona è stata infino ad ora malissimo conosciuta. Il rinomato *d'Anville* nella sua Analisi geog. dell' Italia la stabilisce in $28^{\circ} 23'$: nella sua Carta dell' Italia la situa ne' $28^{\circ} 33'$. In una carta anonima del territorio Veronese, che porta la data del 1745, ed è la più ricevuta nel paese comunemente, la Città è collocata ai $28^{\circ} 50'$: in quella dell' *Ab. Santini* del 1776 ai $28^{\circ} 35'$. Vi ha dunque nelle carte geografiche una discrepanza di $17'$, che in tal latitudine corrispondono a più di dodici miglia d'incertezza sulla posizione d'una città, la qual vanta il primato in Italia dopo le metropoli.

Se si guarda poi l'autorità degli Astronomi, che in questa materia sono i soli giudici competenti, si trova che tanto nelle Efemeridi di Vienna, di cui tengo il Tomo pel 1783, come nella Conoscenza de' Tempi di Parigi, di cui possedo la serie da 1752 fino a 1790 (del cangiamento fatto in quella del 1791 sarà detto in appresso), e così ancora nelle eccellenti Efemeridi Milanesi che attinsero ciò da que' fonti, la longitudine di Verona è stata registrata $8^{\circ} 58' 30''$ all'oriente del meridiano del Reale Osservatorio di Parigi. Supponendo di 20° col *d'Anville* la longitudine di Parigi, dalla di lui Analisi alle citate Efemeridi corre un divario di $35' 30''$, il qual costituisce più di 25 miglia d'incertezza sulla situazione di Verona da levante a ponente.

Tutto che dalle poche mie facoltà s'è potuto condurre a

termine la fabbrica della Specola in una casa acquistata a bella posta, e la collocazione degl' Istromenti non affatto spregevoli che ho da Parigi tradotti, le prime cure e fatiche sono state senza dubbio da me rivolte a determinare la latitudine e la longitudine del luogo della Terra, dove dimoro ed intendo alle osservazioni astronomiche. Non tardai ad accorgermi che la seconda era notabilmente diversa da tutte le quantità già enunziate: e questa scoperta m'inspirò il desiderio e mi fece conoscere l'importanza di aspirare all'ultima esattezza possibile in tale determinazione. Risolsi pertanto di trarla unicamente da osservazioni le più sicure, come son quelle d'eclissi di sole, e d'occultazioni di stelle, rigettando del tutto i satelliti di Giove, i passaggi della Luna al meridiano, ed altri mezzi di gran lunga inferiori ai due primi. Ma perchè appunto i fenomeni più propizj intervengono più di rado, ed inoltre mi trovai privo talvolta d'osservazioni straniere da comparare alle mie; perciò se due anni mi son passati nella presente investigazione, confido che ogni discreto sia per concedere, che non essendo ella urgente, più debba meritare lode la sicurezza di quel che sia la sollecitudine.

La Torre maggiore della città di Verona, quella che d'altezza gareggia con le più rinomate, e fa degnamente i primi inviti al forastiere ancor ben lontano, siede $8^{\circ} 40' 39''$ all'oriente dell'Osservatorio regio di Parigi: e questa mia determinazione è fondata sopra le osservazioni di un'eclissi di sole, e di sei occultazioni di stelle. La maggior discordia dall'uno all'altro tra i risultamenti di questi sette fenomeni va a $3''$ di tempo; laonde mi giova credere, che la quantità media non admetta per così dire la minima incertezza.

Eccomi a riferire le mie osservazioni, non che le altrui che ho prese a confronto, e che d'altre longitudini porgono ottime determinazioni.

I. Occultazione di η de' Gemelli a' 26 Novembre 1787.

Parigi ,	Messier ;	Imm. 11 ^b 33' 39", 5	t.v. <i>hôtel des mathurins</i>
		Em. 12 42 24	dal disco oscuro
	Le François ;	Em. 12 42 29	au Collège royal
Milano ,	Cesaris ;	Imm. 12 11 30	Differ. de'merid. 27' 25"
		Em. 13 16 58	 27 25
Padova,Chiminello;		Em. 13 32 21, 5	 38 10

Le due osservazioni di Milano paragonate alle tre di Parigi danno 27' 25" per differenza de' meridiani: qual fu appunto stabilita dal Sig. *Du Séjour* con due eclissi solari (*Mémoires* 1771 pag. 239), e dai valentissimi Astronomi di Brera per molteplici osservazioni adottata nelle loro Efemeridi da 1777 in poi. Questa servirà qualche volta di confronto unico alle mie osservazioni.

II. Occultazione di η de' Gemelli a' 20 Gennaio 1788.

Parigi ,	Messier ;	Imm. 10 ^b 37' 36", 2	nel disco oscuro
		Em. 11 48 37	
	Méchain ;	Imm. 10 37 34	à l'Observatoire royal
		Em. 11 48 35, 2	
Marfiglia ,	Bernard ;	Imm. 11 0 0	Differ. de'merid. 12' 14"
Padova,Chiminello;		Imm. 11 32 32, 6	 38 10
Verona ,	Cagnoli ;	Em. 12 37 23	 34' 41"

III. Eclissi di Sole de' 4 Giugno 1788.

Greenwich ,	Maskelyne ;	Principio	19 ^b 24' 46", 5	Diff.de'mer. con Parigi
		Fine	21 1 25, 5	
Mittau ,	Beittler ;	Principio	21 20 15 . . .	1 ^b 25' 41"
		Fine	23 8 52 . . .	1 25 44
Viviers		Fine	21 16 17 . . .	9 18
Martiglia ,	Bernard ;	Fine	21 17 16, 5 . . .	12 12
Bologna ,	Matteucci ;	Fine	22 3 45, 5 . . .	36 7
Verona ,	Cagnoli ;	Fine	22 1 52, 5 . . .	34 42

Ho cercato primieramente l' error delle tavole in latitudine dalle due seguenti tali da me osservate intorno al mezzo dell' eclissi.

Porzione illuminata $13^{\circ} 18', 7$ a $20^{\circ} 54' 49''$

Porzione illuminata $13 \ 34, 5$ a $21 \ 1 \ 36$

Ne ho conchiuso che le tavole del *Mayer* davano la latitudine troppo grande di $5''$, il qual errore nè più nè meno ricavati dalla comparazione tra loro delle due eccellenti osservazioni di *Greenwich*. Quelle accusavano in oltre la longitudine lunare delle tavole d'esser troppo grande di $3''$; ma ciò non può admetterli rifugnandovi la congerie delle altre osservazioni. Ogni errore sulla longitudine lunare è sparito aumentando la differenza de' meridiani tra *Greenwich* e Parigi da $9 \ 16''$ a $9' \ 21''$, che affatto li accosta all'ipotesi di $9' \ 20''$ la qual sembra preponderare da poco in qua.

Come poi alla suppotizione di $9' \ 16''$, che feci ne' primi calcoli, corrispondeva prossimamente l'ipotesi di $34' \ 45''$ per differenza di longitudine tra Parigi e Verona, così sul fondamento d'una mia lettera scritta in allora a Parigi è stata introdotta per la prima volta nella Conoscenza de' tempi pel 1791 la suddetta quantità di $34' \ 45''$, che io m'era già riferbato di meglio discutere ed appurare.

IV. Occultazione di π del Sagittario a' 19 Giugno 1788.

Marfiglia, *Bernard*; Imm. $9^b \ 23' \ 9''$

Em. $10 \ 40 \ 51$ dal disco oscuro

Verona, *Cagnoli*; Em. $11 \ 17 \ 28, 5$ Diff. de' mer. con Parigi $34' \ 43''$.

In questo calcolo ho supposto di $12' \ 13''$ la differenza dei meridiani tra Parigi e Maruglia, che è il mezzo cavato dalle osservazioni precedenti II, III.

V. Occultazione di 2α del Cancro a' 22 Ottobre 1788.

Verona, *Cagnoli*; Em. $13^b \ 20' \ 44''$ dal disco oscuro.

Non ho ancora ottenuto osservazioni sufficienti a determinare gli errori delle tavole lunari.

VI.

IX. Occultazione di α della Libra a' 2 Luglio 1789.Milano, Cefaris; Imm. $9^h 48' 46''$, 5 nel disco oscuro

Em. 11 3 46, 0

Parigi, Méchain; Imm. 9 7 8

Trans, Bernard; Imm. 9 35 50 Diff. de' mer. con Parigi $16' 43''$

Padova, Chiminel. Imm. 10 3 53 38 10

Verona, Cagnoli; Imm. 9 58 54, 5 34 41

Dedotti gli errori delle tavole dalle osservazioni di Milano, il piccolo errore $+ 2''$, 3 trovato, dopo tal correzione, sulla distanza de' centri, apparve lo stesso affatto nelle altre quattro osservazioni, mentre le differenze apparenti di longitudine e di latitudine non differiscono sensibilmente ne' quattro calcoli. Dunque le differenze de' meridiani assunte ecc.

X. Occultazione di α del Cancro a' 15 Settembre 1789.Verona, Cagnoli; Imm. $16^h 10' 30''$

Em. 17 10 33, 5

L' errore sulla distanza de' centri nel calcolo dell' immersione è $+ 1''$, 9; in quello dell' emersione $- 1''$, 5. Questa conformità degli errori con segno contrario è una prova di molto peso per la bontà delle due osservazioni, quando le differenze apparenti di longitudine e di latitudine da un calcolo all' altro sono pressò poco uguali, giacchè allora se anche abbiavi alcun errore nella longitudine terrestre assunta, gli errori delle tavole non lasciano di produrre uguale effetto con segno contrario sulle due distanze de' centri. Non ho ottenuto ancora osservazioni straniere di questa occultazione, le quali godano dell' accennata testimonianza di bontà, e siano per conseguenza atte a manifestare gli errori delle tavole.

XI. Occultazione di α del Cancro a' 6 Dicembre 1789.Milano, Cefaris; Imm. $12^h 28' 9''$, 3

Em. 13 36 11, 2 dal disco oscuro

Verona, Cagnoli; Em. 13 45 54, 5 Diff. de' mer. con Parigi $34' 44''$

CONCLUSIONE.

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Verona.

II	34' 41"
III	42
IV	43
VI	43
VIII	42
IX	41
XI	44
Mezzo	34' 42"

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Padova.

I	38' 10"
II	10
VIII	10
IX	10

Tanta concordia non può passare senza un tributo di lode al pregiato amico e diligentissimo osservatore.

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Marsiglia.

II	12' 14"
III	12
Mezzo	12' 13"

Se dalla longitudine di Verona per rispetto a Parigi 34' 42" si retrocede a conchiudere quella di Marsiglia, si ha 12' 12" tanto dalla IV quanto dalla VI osservazione; e questa quantità si avvicina anche più a quella di 12' 7" adottata nella Conoscenza de' Tempi.

Differenza de' Meridiani con Parigi.

Viviers,	III,	9' 18"
Trans in Provenza,	IX,	16 43
Bologna,	III,	36 7
Mittau,	III,	1 ^b 25' 43"
	L	i j

Ora tornando alla longitudine del mio Osservatorio, ella è dunque di $34' 42''$ di tempo, o sia di $8^{\circ} 40' 30''$ all' oriente del meridiano di Parigi. Riducendola alla Torre maggiore della città, che è distante dalla mia Specola tese 109 sotto un azzimutto orientale di $106^{\circ} 9'$, risulta la differenza di longitudine da Verona a Parigi di $34' 42''$, 6, o sia di $8^{\circ} 40' 39''$.

Tutti i calcoli delle osservazioni addotte in questa Memoria sono stati fatti col metodo esposto accuratamente nella mia Dissertazione, che ha conseguito il premio dall' Accademia di Coppenaghen (*Méthode pour calculer les longitudes géographiques etc. Verone chez Ramanzini 1789*). Dopo l' esperimento di tanti calcoli sono in grado di aggiungere alle cose dette nell' accennata Dissertazione due utili avvertimenti.

1.^o Ho stabilito in quella (43), che due osservazioni d' uno stesso fenomeno, ancorchè fatte in luoghi diversi ma di posizione nota, bastano per determinare col mezzo delle equazioni proposte gli errori delle tavole lunari. Questo è verissimo in generale: ma se ognuna delle due osservazioni è dello stesso nome, cioè per esempio se sia immersione tanto una che l' altra, e se i paesi dove furono fatte non siano tra loro rimoti considerabilmente; in tal caso non essendovi di vario sensibile nel valore degli elementi dall' una all' altra osservazione, l' errore delle equazioni può esser grande per ogni piccolo error delle osservazioni. Allora si migliora condizione ricorrendo al ripiego esposto nell' altro avvertimento, che segue.

2.^o Nella mentovata Dissertazione ho fermato (47), che per determinare una longitudine terrestre sono necessarie tre osservazioni d' uno stesso fenomeno, due delle quali possono esser fatte, ed anche tutte tre in eclissi di sole, nel luogo di cui si cerca la longitudine. Questo è pur vero generalmente parlando. Ma ho notato un caso, che non è raro, nel quale due sole osservazioni bastano. Il caso è quando entrambe le osservazioni essendo dello stesso nome, ed una fatta in luogo noto di posizione, le differenze apparenti di longitudine e di latitudine sian d' egual valore appresso poco in ambi i calcoli. Allora l' ipotesi giusta per la longitudine cercata sa-

rà quella che darà nella distanza de' centri lo stesso errore, che è prodotto dal calcolo dell' osservazione fatta nel luogo conosciuto. Se n'è veduto l'esempio di sopra VIII.

Devo poi dichiarare, che ne' calcoli delle Occultazioni addotte in questa Memoria ho fatto uso degli elementi che seguono. Per il luogo delle stelle ho preso la quantità media tra i Cataloghi di *la Caille*, *Mayer* e *Bradley*. Per ridurlo al tempo dell' osservazione ho adoperato la precessione in longitudine $50''$, 252. Per calcolare la variazione secolare in longitudine e latitudine ho supposto di $57''$ la diminuzione dell' obliquità dell' eclittica. Per la parallasse della luna ho adottato lo schiacciamento della Terra di $\frac{1}{170}$ secondo la teoria. I piccoli errori, che possono essere in questi elementi, devono influire pressò poco egualmente in ognuna delle osservazioni d' uno stesso fenomeno, attesa la vicinanza de' luoghi ove furono fatte, ed il poco divario nelle differenze apparenti di longitudine e di latitudine da un calcolo all' altro: sembra però che non tiavi ragion di temere alterazioni sensibili sulle differenze de' meridiani dedotte. Ho poi notato le fasi nel disco oscuro della luna, siccome quelle che possono meritare maggior fiducia.

Mi resta da render conto del modo come procedo per ottenere accuratamente il moto orario lunare, giacchè uno de' massimi fonti di celerità nel metodo da me esposto nella citata Dissertazione consiste in prendere il luogo della luna dalle efemeridi, e non dalle tavole. Per maggiore approssimazione son solito bensì tener conto delle seconde differenze, al qual fine è sommamente comoda la tavola del Sig. *Guerin* che si trova nella Conoscenza de' tempi pel 1771. Fatto in tal modo un primo calcolo, per aver poi con molta esattezza (*avec une très grande précision* la Lande Astron. 1521 2.^o edit.) il moto della Luna da una osservazione all' altra, adopero il moto spettante al tempo di mezzo tra le due osservazioni; il qual moto si cava dalle Efemeridi nel modo che segue.

Si dimandi il moto orario della luna in longitudine per li 15 Settembre 1789 a $16^h 7'$ t. v. del meridiano di Parigi. Ho dalla Conoscenza de' Tempi

longitudine della luna.		Differenze.
li 15 a mezzodì	3 ^s 29° 37' 15"	7° 15' 15"
a mezzanotte	4 6 52 30	7 21 37
li 16 a mezzodì	4 14 14 7	

Dico dunque: moto orario a 12^b = $\frac{7^{\circ} 15' 15'' + 7^{\circ} 21' 37''}{24} = 36' 32'', 2$

moto orario a 18^b = $\frac{7^{\circ} 21' 37''}{12} \dots = 36' 48'', 1$

Dunque moto orario a 15^b = $\frac{36' 32'', 2 + 36' 48'', 1}{2} = 36 40, 1$

Nel modo stesso si trova il moto orario a 16^b 30' = 36 44, 1

a 15^b 45' = 36 42, 1

e da ultimo a 16^b 7 = 36' 43, 1

Nella stessa maniera si faccia pel moto orario in latitudine.

Finalmente a comodo di chi volesse comparare altre osservazioni a quelle che sono state da me calcolate e discusse, non ometto di riferire gli elementi che seguono, dove il luogo della luna è dedotto dalle osservazioni, o sia corretto degli errori delle tavole: il tempo è ridotto al meridiano del regio Osservatorio di Parigi.

26 Novembre 1787 a 11^b 38' 12" tempo vero.

Longitudine vera della luna 2^s 29° 53' 29'', 4

Latitudine vera australe 20 19, 5

Longitudine apparente di η de' Gemelli . . 3 0 29 27, 1

Latitudine apparente australe 54 45, 7

20 Gennajo 1788 a 11^b 8' 25"

Longitudine vera della luna 3 0 40 20, 6

Latitudine vera australe 27 13, 3

3 Giugno 1788 a 19^b 22' 44"

Longitudine vera della luna 2 13 12 23, 4

Latitudine vera boreale 20 53, 0

Longitudine vera del Sole 2 14 12 46, 4

19 Giugno 1788 a 9^b 28' 0"

Longitudine vera della luna 9 12 44 46, 5

Latitudine vera boreale 2 17 27, 8

Longitudine apparente di π del Sagittario . . 9 13 18 37, 0

Latitudine apparente boreale 1 27 54, 6

11 febbrajo 1789 a $14^b 58' 4''$

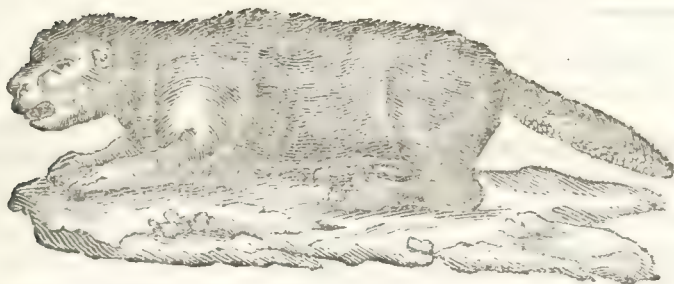
Longitudine vera della luna	5	21	40	31,1
Latitudine vera australe		4	46	51,7
Longitudine apparente di ϵ del Leone	5	21	26	40,6
Latitudine apparente australe		5	42	3,9

15 Settembre 1789 a $15^b 35' 48''$

Longitudine vera della luna	4	9	4	12,0
Latitudine vera australe		4	58	41,3
Longitudine apparente di 1α del Cancro	4	10	10	8,3
Latitudine apparente australe		5	29	42,1

6 Dicembre 1789 a $13^b 8' 46''$

Longitudine vera della luna	4	9	55	4,6
Latitudine vera australe		5	9	41,1



OSSERVAZIONI

SOPRA IL RITORNO DELLE SERIE

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI.

I.

Proposta la serie $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ecc. pel ritorno delle Serie si avrà $x = b'y + b'y^2 + b'y^3 + b^{iv}y^4$ ecc. e farà

$$b' = \frac{1}{a'}$$

$$b'' = \frac{-b'^2 a''}{a'}$$

$$b''' = \frac{-2b'b'a'' - b'^3 a'''}{a'}$$

$$b^{iv} = \frac{-(b'^2 + 2b'b'')a'' - 3b'b''a''' - b'^4 a^{iv}}{a'} \text{ ecc.}$$

La maniera, come ognuno dei coefficienti b' , b'' , b^{iv} ecc. dipende da' suoi precedenti, e dai dati a' , a'' , a''' , a^{iv} ecc., è quella che passò subito a descrivere, quando abbia avvisato che distinguendoli qui l' un dall' altro i coefficienti dei termini tanto della Serie proposta, quanto dell' altra per l' indice del termine, a cui ciascuno appartiene, e venendo quest' indice espresso per altrettanti accenti, allorchè si vorrà esprimere un coefficiente in generale, il numero degli accenti si esprimerà per una lettera greca, la quale per conseguenza starà in luogo di un numero qualunque d' accenti; ove poi si voglia indicare il numero aritmetico corrispondente, il quale cioè abbia tante unità, quanti sono quegli accenti, si farà uso della lettera corrispondente latina: così $a^o x'$ farà il termine r esimo della serie $a'x + a''x^2 + a'''x^3$ ecc., e $b^o y'$ quello della serie $b'y + b'y^2 + b'y^3$ ecc.

II. Il coefficiente r elimo, cioè b^p , è una frazione, che ha per denominatore a' , e per numeratore la somma di tanti termini, quanti sono i coefficienti a' , a'' , a''' ecc. fino ad a^p . Ciascuno di questi termini è uno dei coefficienti stessi a' , a'' , a''' ecc. preso sotto il segno contrario, e moltiplicato per una funzione dei coefficienti b' , b'' , b''' ecc., che precedono il b^p . Questa funzione poi pel termine, che ha π , consiste nella somma di tutti i prodotti, che posson farsi moltiplicando insieme i coefficienti b' , b'' , b''' ecc., e la loro potestà per modo che il numero de' fattori di ciascun prodotto sia p , e la somma degli accenti apposti a questi fattori sia costantemente eguale al numero r ; ciascuno de' quali prodotti è moltiplicato per $2.3.4.\dots.p$, e allorquando contiene qualche potestà, è egli insieme diviso per 2 tante volte, quanti sono i quadrati, che contiene, per 2.3 tante volte, quanti sono i cubi, per 2.3.4 tante volte, quante sono le quarte potestà, e così via discorrendo.

III. Se la proposta serie $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3$ ecc. vada a troncarsi di modo che $a^m x^m$ sia l'ultimo di lei termine, allora nella formazione dei coefficienti b' , b'' , b''' ecc. si arriverà finalmente ad avere esauriti tutti i coefficienti a' , a'' , a''' ecc.; e ciò succederà nel valore del coefficiente b^m , il numeratore del quale avrà $(m-1)$ termini, supposto che niuno dei coefficienti a' , a'' , a''' ecc., che precedono a^m , sia zero; e lo stesso numero di termini avrà pure il numeratore del valor di qualsivoglia dei coefficienti susseguenti b^{m+1} , b^{m+2} , b^{m+3} ecc. Ciò è chiaro per quel, che or ora si è detto intorno alla formazione di tal numeratore. E per lo stesso principio si rende parimente chiaro, che intendendo disposti i termini del numeratore secondo l'ordine dei coefficienti a' , a'' , a''' ecc., l'ultimo di essi sarà $-b^m a^m$ nel valore di b^m , sarà $-mb^{m-1}b' a^m$ nel valore di b^{m+1} , $-\left(\frac{m(m-1)}{2}b^{m-2}b'^2 + mb^{m-1}b''\right)a^m$ nel valore di b^{m+2} , $-\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}b^{m-3}b'^3 + m(m-1)b^{m-2}b''b' + mb^{m-1}b'''\right)a^m$ in quello di b^{m+3} , ecc.

IV. Il caso ultimamente considerato è quello d' un' equazione determinata del grado m , nella quale sia separato l'ultimo termine.

M

timo termine. Dunque per qualsivoglia equazione determinata si avrà $x = by + by^2 + b''y^3$ ecc., dove y rappresenta l'ultimo termine dell'equazione separato, b', b'', b''' ecc. sono quantità dipendenti nella maniera, che di sopra si è detto, dai coefficienti a', a'', a''' ecc. delle corrispondenti potestà x, x^2, x^3 ecc. dell'incognita x , secondo l'ordine delle quali potestà, cominciando dalla prima, si suppongono disposti i termini dell'omogeneo di comparazione nell'equazione proposta. La serie pertanto $x = by + by^2 + b''y^3$ ecc. rappresenterà ciascuno dei valori della x , che, essendo l'equazione proposta del grado m , faranno in numero m . Che poi li debba rappresentar tutti, e non un solo, si renderà evidente subito che si consideri, che ognuna delle quantità y, a', a'', a''' ecc. è una funzione di tutti i valori dell'incognita x , la qual funzione è egualmente data per ciascun dei medesimi valori, cioè y è il prodotto di tutti i valori, a' è la somma di tutti i prodotti dei valori moltiplicati insieme in numero $(m - 1)$ alla volta, a'' è la somma di tutti i prodotti dei valori moltiplicati insieme in numero $(m - 2)$ alla volta, ecc.; donde segue, che la serie stessa $by + by^2 + b''y^3$ ecc., in cui b', b'', b''' ecc. sono funzioni di a', a'', a''' ecc. è una funzione dei valori di x data egualmente per ciascuno dei medesimi valori; per la qual cosa se sussiste l'equazione $x = by + by^2 + b''y^3$ ecc. ponendo in luogo di x uno dei valori, dee sussistere egualmente ponendovi qualsivoglia degli altri valori della medesima x .

V. Ben è vero, che quando la serie $by + by^2 + b''y^3$ ecc. sia convergente, darà ella attualmente un solo dei valori di x per approssimazione: ma questo non impedisce, che li rappresenti tutti. Ciò è coerente a quel che è dimostrato nel primo, e nel secondo dei tre opuscoli, che pubblicai l'anno 1787. A conoscere poi quale prerogativa distingua dagli altri valori della x quello, che viene attualmente somministrato per approssimazione da quella serie, allorchè ella è convergente, sembra che possa condurre il riflettere, che se uno dei valori della x fosse picciolissimo, e come infinitesimo rispetto agli altri, il termine ultimo y dell'equazione, il quale è il prodotto di tutti i valori, involvendo in se questo valore infinitesimo, sarebbe infinitesimo, laddove ognuno de' coefficienti a', a'', a''' ecc., che è la somma dei prodotti

dei valori moltiplicati insieme in numero $(m-1), (m-2), (m-3)$ ecc., dovendo contenere dei prodotti, ne quali non entrerebbe il valor infinitesimo, verrebbe a restar finito. Per la qual cosa i valori delle quantità b, b', b'' ecc., come indipendenti da y , e dipendenti solo da a', a'', a''' ecc., sarebbero tutti finiti anch' essi, e però la serie $b'y + b'y^2 + b'y^3$ ecc. rappresentatrice dei valori di x avrebbe il suo primo termine infinitesimo, consultando esso nella quantità infinitesima y moltiplicata per la finita b' , il secondo infinitesimo rispetto al primo, il terzo rispetto al secondo, e così di mano in mano. Dunque in tal caso la serie e sarebbe convergente, e darebbe attualmente il valor infinitesimo. Posta la qual riflessione par chiaro, che la serie, quando è convergente, debba convergere verso il minimo dei valori della x considerati assolutamente, e senza aver riguardo ai segni, onde sono affetti; perciocchè questo è quel di tutti i valori, che è meno lontano dall'esser infinitesimo, cioè dall'esser quello, il quale, quando ha luogo, par cosa certa che venga per quella serie attualmente somministrato. Io sottopongo questo discorso al giudizio dei Matematici, essendo troppo persuaso, che anche in materia di matematica pura certi raziocinj metallici, benchè a prima vista sembrano seducenti, possono talvolta inchiudere gravi parallogismi. Che se il discorso fatto regge, si dovrà dunque conchiudere, che la ritrovata serie, ove sia convergente, è atta, sommandone molti termini, a dare attualmente per approssimazione quello dei valori della x , che, prescindendo dal segno prefisso, è il minimo di tutti.

VI. Per venire a un esempio sia l'equazione $c = mx - \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} x^3$

$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{m-9} x^{m-8} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3} 2^{m-7} x^{m-6}$$

$$+ \frac{m(m-3)}{2} 2^{m-5} x^{m-4} - m \cdot 2^{m-3} x^{m-2} + 2^{m-1} x^m, \text{ la quale, quan-}$$

do sia $c < 1$, e m un numero della serie 5, 9, 13, 17 ecc., si fa che ha reali tutti i valori di x , e questi, ove si suppon-

M ij

ga $c = \cos \varphi$, compresi nella formola generale $x = \cos \frac{2K\pi + \varphi}{m}$, dove π denota la semiperiferia posto il raggio $= 1$, e a K si debbon intendere successivamente sostituiti i numeri $0, 1, 2, 3, 4, \dots (m-1)$; si fa inoltre, che essendo $\varphi < \frac{\pi}{2}$ di questi valori il minimo è positivo, ed è quello, che risulta, quando in luogo di K si mette il numero $\frac{m-1}{4}$. Ora confrontando quest' equazione colla serie proposta da principio si ha $y = c$, $a' = m$, $a'' = 0$, $a''' = -\frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3}$, $a^{iv} = 0$, $a^v = \frac{m'(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, $a^{vi} = 0$, $a^{vii} = -\frac{m'(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$, $a^{viii} = 0$, $a^{ix} = \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)(m^2-49)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$, ecc.

Quindi $b' = \frac{1}{m}$, $b'' = 0$, $b''' = \frac{m^2-1}{2 \cdot 3 \cdot m^3}$, $b^{iv} = 0$, $b^v = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m^5}$, $b^{vi} = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot m^7}$, $b^{vii} = 0$, $b^{viii} = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)(49m^2-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot m^9}$, ecc.

Dunque $x = \frac{c}{m} + \frac{(m^2-1)c^3}{2 \cdot 3 \cdot m^3} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m^5} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot m^7} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)(49m^2-1)c^9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot m^9} + \text{ecc.}$

La qual serie va in infinito, nè mai si tronca, perchè m si suppone numero intero. E' facile il vedere, che generalmente il termine r elimo sta al suo seguente, come

$$1 : \frac{(4r^2m^2 - 4rm^2 + m^2 - 1)c^2}{4r^2m^2 + 2rm^2}, \text{ cioè come } 4r^2m^2 + 2rm^2 :$$

$4r^2m^2c^2 - 4rm^2c^2 + m^2c^2 - c^2$, dove è certo essere $4r^2m^2 > 4r^2m^2c^2$, perchè si suppone c una frazione, cioè $c = \cos \varphi$, e simil-

mente $2rm^2 > m^2c^2$, perchè r è sempre un intiero, e c , come si è detto, una frazione; dunque molto più $4r^2m^2 + 2rm^2 > 4r^2m^2c^2 - 4rm^2c^2 + m^2c^2 - c^2$: e però la serie è sempre convergente. Che poi converga verso il valore

$\cos \frac{2(\frac{m-1}{4})\pi + \phi}{m}$, credo che non si possa con brevità mostrare che colla seguente osservazione. Nell'equazion proposta supponendo $x = \sin z$, cioè $x = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$, l'omogeneo di comparazione, quando m sia un numero della serie 5, 9, 13, 17 ecc. è il valor preciso di $\sin mz$, cioè di $\cos(\frac{\pi}{2} - mz)$, come si rileva dal canone esposto da *Euler Introd. ad analy.* T. I. pag. 199. Ma noi vogliamo $c = \cos \phi$: dunque abbiamo $\phi = \frac{\pi}{2} - mz$, e però $z = \frac{\pi}{2m} - \frac{\phi}{m}$, e conseguentemente $x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\phi}{m})$, cioè

$x = \cos \frac{2(\frac{m-1}{4})\pi + \phi}{m}$. Il che ne mostra, che se vogliamo che nell'equazione proposta l'omogeneo di comparazione sia attualmente $\cos \phi$, bisogna supporre

$x = \cos \frac{2(\frac{m-1}{4})\pi + \phi}{m}$. Infatti se in luogo di x supporremo messo nell'equazione proposta un altro dei valori compresi nella formola $\cos \frac{2K\pi + \phi}{m}$, l'omogeneo di comparazione darà attualmente il valore di $\cos \pm$ non più sotto quell'aspetto $\cos \phi$, ma sotto uno degli altri compresi nella formola $\cos(2K\pi + \phi)$. Dunque l'equazione proposta dà

attualmente $\cos \phi$ per $\cos \frac{2(\frac{m-1}{4})\pi + \phi}{m}$, e però la serie che

si è trovata pel valore di x , essendo cavata da quell' equazione, anzi essendo quell' equazione medesima nella sotto un' altra forma, e dando x per $\cos \phi$, se somministra attualmente qualcuno dei valori, che rappresenta di x , sommini-

strerà quello, che è espresso per $\cos \frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}$. Ora questo valore essendo quello tra i valori compresi nella formola $\cos \frac{2K\pi + \phi}{m}$, per cui si ha $K = \frac{m-1}{4}$, è appunto il

minimo, ed è positivo, perchè è $\frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m} < \frac{\pi}{2}$, cioè $\frac{m\pi - \pi}{2} + \phi < \frac{m\pi}{2}$, cioè $\phi < \frac{\pi}{2}$, come per l' appunto si suppone.

Se l' equazione proposta fosse stata $c = -mx + \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 \dots - \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3}2^{m-7}x^{m-6} + \frac{m(m-3)}{2}2^{m-5}x^{m-4} - m \cdot 2^{m-3}x^{m-2} + 2^{m-1}x^m$, che, quando m

sia un numero della serie 3, 7, 11, 15 ecc., e sia $c < 1$, si fa aver anch' essa reali tutti i valori della x , e questi, ove si supponga $c = \cos \phi$, compresi nella formola medesima $\cos \frac{2K\pi + \phi}{m}$, dei quali è noto che, supposto $\phi < \frac{\pi}{2}$, il mi-

nimo è negativo, e porta $K = \frac{3m-1}{4}$, farebbesi avuto $y = c$, $a' = -m$, $a'' = 0$, $a''' = \frac{m'(m^2-1)}{2 \cdot 3}$, $a^{iv} = 0$,

$a^v = \frac{-m'(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, $a^{vi} = 0$,

$a^v = \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$, ecc. e però farebbe stato

$$b' = -\frac{1}{m}, \quad b'' = 0, \quad b''' = -\frac{(m^2 - 1)}{2 \cdot 3 \cdot m^3}, \quad b^{(4)} = 0,$$

$$b^{(5)} = -\frac{(m^2 - 1)(9m^2 - 1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m^5}, \quad b^{(6)} = 0,$$

$$b^{(7)} = -\frac{(m^2 - 1)(9m^2 - 1)(25m^2 - 1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot m^7}, \text{ ecc. Sarebbersi pertan-}$$

$$\text{to avuta la stessa serie } x = -\frac{c}{m} - \frac{(m^2 - 1)c^3}{2 \cdot 3 \cdot m^3} \\ - \frac{(m^2 - 1)(9m^2 - 1)c^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m^5} - \frac{(m^2 - 1)(9m^2 - 1)(25m^2 - 1)c^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot m^7} \text{ ecc.}$$

trovata di sopra, se non che i termini di questa sono tutti affetti del segno —. Or facendo un discorso simile a quel, che si è fatto per la serie precedente, s' intenderà, che il valore, verso di cui questa converge, è

$$\cos \frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}. \text{ Imperocchè se nella nuova equazione}$$

proposta si supponrà $x = \sin z$, o vogliam dire $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$,

l' omogeneo di comparazione pel canone Euleriano di sopra citato diventa $-\sin mz$, che è lo stesso che $\cos\left(\frac{\pi}{2} + mz\right)$.

Ma abbiamo l' omogeneo di comparazione $= c = \cos \varphi$. Dunque l' arco z nel nostro caso è $\frac{\phi}{m} - \frac{\pi}{2m}$, e però

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2m} - \frac{\phi}{m}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\phi}{m}\right)$$

$$= \cos \frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}. \text{ Pertanto la nuova equazion propo-}$$

sta dà attualmente $\cos \phi$ per $\frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}$, e perciò la serie trovata, che, come abbiain anche di sopra ac-

cennato, è l'equazione stessa posta sotto un altro aspetto, dando colla sua convergenza attualmente uno dei valori di

$$2 \left(\frac{3m-1}{4} \right) \pi + \phi$$

x per $\cos \phi$, darà appunto $\cos \frac{2 \left(\frac{3m-1}{4} \right) \pi + \phi}{m}$ che è

quello, per cui è dato attualmente $\cos \phi$ nell'equazione medesima. Questo valore essendo quello, pel quale si ha

$K = \frac{3m-1}{4}$, viene ad essere appunto il minimo dei compre-

si nella formola $\cos \frac{2K\pi + \phi}{m}$, ed è negativo, perchè

$$\frac{2 \left(\frac{3m-1}{4} \right) \pi + \phi}{m} > \frac{\pi}{2}, \text{ cioè } m\pi + \phi > \frac{\pi}{2}, \text{ e nello stesso}$$

$$\text{tempo } \frac{2 \left(\frac{3m-1}{4} \right) \pi + \phi}{m} < \frac{3\pi}{2}, \text{ cioè } \phi < \frac{\pi}{2}. \text{ Converte dun-}$$

que la serie trovata anche nel caso della nuova equazione verso il minimo dei valori dell' incognita.

VII. Sia ora l'equazione generale di secondo grado $c = bx + xx$. Avremo $y = c$, $a' = b$, $a'' = 1$, $a''' = 0$, $a^{iv} \text{ ec.} = 0$.

$$\text{Quindi } x = \frac{1}{b} c - \frac{1}{b^3} c^2 + \frac{2}{b^5} c^3 - \frac{5}{b^7} c^4 + \frac{14}{b^9} c^5 - \frac{42}{b^{11}} c^6$$

$$+ \frac{132}{b^{13}} c^7 - \frac{420}{b^{15}} c^8 + \frac{1430}{b^{17}} c^9 \text{ ecc. della qual serie l' andamento è chiarissimo subito che sia noto il coefficiente numerico di ciascun termine. Ora il coefficiente del termine } n$$

esimo è $\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (2n-3)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-2)}$ servendo que-

sta formola a tutti i termini della serie eccettuati i primi quattro, per li quali è chiaro, che non può servire. Ogni termine adunque della serie prescindendo dal segno, ond' è affetto, sta al suo seguente, come

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (2n-3) b^n}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-2)} : \frac{(n+2)(n+3)(n+4) \dots (2n-4) c}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-1)},$$

cioè

cioè come $(n+1)b^2$: $\frac{(2n-2)(2n-1)c}{n-1}$, o sia come $(n+1)b^2$:

$2(2n-1)c$; e questa proporzione vale anche ne' primi quattro termini. Sarà pertanto la serie divergente, ogni qual volta sia

$(n+1)b^2 < 2(2n-1)c$, cioè $n(4c-b^2) > b^2 + 2c$. Se $4c < b^2$, o sia $\frac{b^2}{c} > 4$,

la prima parte della comparazione è negativa, nè potrà mai esser maggiore della seconda, che è positiva: dunque allora

la serie è sempre convergente. Che se $\frac{b^2}{c} < 4$, allora la com-

parazione si riduce a $n > \frac{b^2 + 2c}{4c - b^2}$, il che dovendo n essere

un numero intiero, si verificherà sempre che sia $\frac{b^2 + 2c}{4c - b^2} < 2$

cioè $\frac{b^2}{c} < 4$, e allora per conseguenza la serie farà sempre

divergente. Se poi sia $\frac{b^2}{c} > 4$, e insieme < 4 , la serie comin-

cierà ad esser divergente immediatamente dopo il termine, che ha per indice il numero prossimamente maggiore di

$\frac{b^2 + 2c}{4c - b^2}$. Se fosse $\frac{b^2}{c} = 1$, siccome la comparazione $n > \frac{b^2 + 2c}{4c - b^2}$

diverrebbe $n > 1$, il che si verifica sempre dopo il primo termine, così la serie sarebbe divergente subito dopo il primo

termine. Che se fosse $\frac{b^2}{c} = 4$, la comparazione suddetta

diverrebbe $n > \infty$, e la serie non comincierebbe ad esser divergente che all' infinito, e però si riguarderebbe come tutta convergente.

VIII. Ma la serie, quando le quantità c , b , come fin ora si è supposto, sieno positive, ha i termini suoi alternativamente positivi, e negativi. Se mai si sospettasse, che sommando ciascun termine positivo col suo seguente negativo, la serie formata di queste somme potesse esser divergente nel

caso di $\frac{b^2}{c} > 4$, e convergente nel caso di $\frac{b^2}{c} < 1$, pongasi nel termine generale trovato di sopra $2r-1$ in luogo di n , e si avrà il termine $(2r-1)$ esimo

$$= \frac{2r(2r+1)(2r+2) \dots (4r-5)c^{2r-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2r-3)b^{4r-3}}, \text{ che qualunque nu-}$$

mero intero s' intenda rappresentato da r , è sempre in ordine dispari, e però è positivo: il seguente termine

$$2r \text{ esimo, negativo, sarà } \frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3) \dots (4r-3)c^{2r}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2r-2)b^{4r-1}},$$

e però la somma di questi due termini riuscirà

$$\frac{2(2r+1)(2r+2)(2r+3) \dots (4r-5)c^{2r-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2r-3)b^{4r-3}} \left(r - \frac{(4r-3)c}{b^2} \right).$$

Similmente si troverà la somma dei due termini $(2r+1)$ esimo, e $(2r+2)$ esimo

$$= \frac{2(2r+3)(2r+4) \dots (4r-1)c^{2r+1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2r-1)b^{4r+1}} \left(r+1 - \frac{(4r+1)c}{b^2} \right).$$

Questi faranno due termini prossimi della serie delle succennate somme, i quali per le cose dette faranno amendue positivi, se $\frac{b^2}{c} > 4$, o se essendo $\frac{b^2}{c} < 4$, ma > 1 , appartengono

quei termini a quella parte della prima serie, che precede il passaggio dalla convergenza alla divergenza; saranno amen-

due negativi, se $\frac{b^2}{c} < 1$, o se essendo $\frac{b^2}{c} < 4$, ma > 1 , appar-

tengano essi termini alla parte della prima serie, che vien dopo il detto passaggio; potrà anche esser positivo il primo,

e negativo il secondo, il che avverrà, se essendo $\frac{b^2}{c} < 4$, e

insieme > 1 , appartengano que' due termini a quel luogo della prima serie, dove ella dall' esser convergente passa ad esser divergente. Ora è facile il vedere, che la prima somma sta alla seconda, come $(2r^2 + 3r + 1)(rf^3 - 4rf^2 + 3f^2) : (32r^2 - 32r + 6)(rf + f - 4r - 1)$, dove f è in luogo di

$\frac{b^2}{c}$. Sottraendo il conseguente dall'antecedente, e disponendo i termini secondo la potestà di f , risulta

(A) $(2r^3 + 3r^2 + r)f^3 - (8r^3 + 6r^2 - 5r - 3)f^2 - (32r^3 - 26r + 6)f + 128r^3 - 96r^2 - 8r + 6$ quantità, che nel nostro caso è sempre positiva; perciocchè considerata come un'equazione si trova, che finchè r sia un numero positivo intero, come noi lo supponiamo, ha due valori di f immaginari, ed uno reale, ma negativo; posto poi zero in luogo di f assume un valor positivo: onde qualunque valore abbia f , purchè sia positivo, come appunto qui si suppone, perchè le quantità c, b si vogliono ora positive, non potrà mai acquistare la quantità (A) un valore negativo, non potendo ciò succedere se non allor quando si supponga ad f un valor negativo più lontano dal zero di quel che sia il valore negativo, che riduce la quantità stessa (A) a zero. Se dunque la serie delle somme suddette è tale, che sottraendo ogni termine dal suo precedente si ottiene sempre una differenza positiva, è segno evidente, che ove i termini della medesima serie sieno positivi, che è lo stesso che dire ove la serie prima sia convergente, convergente è ancora la serie delle dette somme; ed ove i termini della serie delle somme sieno negativi, cioè ove divergente sia la prima serie, divergente è pure quella delle somme.

IX. Si può dunque conchiudere assolutamente, che la serie ottenuta col nostro metodo pel valore di x nell'equazione $c = bx + xx$, converge verso di un valore di x , quando sia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4; diverge in tutto quando sia $\frac{b^2}{c}$ non maggiore di 1; converge poi per un tratto, indi si fa divergente, quando sia $\frac{b^2}{c}$ minore di 4, e maggiore di 1. Pure

qualora c sia quantità positiva, come fin qui si è supposto; i valori di x nell'equazione $c = bx + xx$ sono sempre reali. Questo caso basta per far vedere generalmente, che la serie, che si trova col proposto metodo pel valore di x in un'equazione, può essere divergente, quantunque il valore, che som-

ministrerebbe, se fosse convergente, sia reale. Del resto tornando al caso particolare dell'equazione $c = bx + xx$, è chiaro che, quando la serie trovata è convergente, converge ella verso il minore dei due valori di x ; poichè il maggiore è negativo, positivo è il minore; e la serie trovata, quando è convergente, apparisce dalle cose dette di sopra, che converge verso una quantità positiva.

X. Stando nell'equazione medesima suppongasi ora b quantità positiva, ma c negativa. Altra mutazione non risulta nella serie trovata, se non che tutti i termini diventano negativi. Seguita essa pertanto ad esser tutta convergente, quando sia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4, ad esser tutta divergente, quando

sia $\frac{b^2}{c}$ non maggiore di 1, e ad esser prima convergente,

poscia divergente, quando sia $\frac{b^2}{c} > 1$, ma < 4 . Ora nel caso

di c negativa, l'equazione ha reali i suoi valori solo quando sia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4. Però fuori del caso che la serie

sia tutta convergente, non sono reali i valori di x . Il valore poi, verso di cui la serie converge, è il minore dei due valori di x ; poichè se fosse $c = \frac{b^2}{4}$, nel qual caso si è veduto di sopra, che la serie è anche tutta convergente, egli è certo, che allora essa convergerebbe verso il valore negativo $-\frac{b}{2}$, diventando in tal caso amendue i valori di $x = -\frac{b}{2}$:

il che posto è chiaro, che nel caso di $c < \frac{b^2}{4}$ la serie, impicciolendosi ogni di lei termine, convergerà verso un valore negativo minore di $-\frac{b}{2}$: or tale è appunto quello dei due valori reali di x , che, prescindendo dal segno prefissogli, è il minore.

XI. Se volesse ora nell'equazione $c = bx + xx$ supporli ne-

gativa la quantità b , tornerebbero in campo le stesse riflessioni, se non che quei termini della serie, e quei valori della x , che erano positivi, diventerebbero negativi, e viceversa, come è per se manifesto. Lasciando dunque da parte l'equazione di secondo grado, facciamoci a considerare le equazioni in generale d'ogni grado, le quali sempre suppongo non essere deprimibili a grado più basso, ma portare intrinsecamente ne' valori dell'incognita l'asimmetria di quel grado, che viene indicato dall'esponente della massima potenza dell'incognita. Siccome si è veduto (§. IX.) poter succedere, che sia divergente la serie, che col nostro metodo si trova, non ostante che reale sia il valore, verso di cui converge, quando essa è convergente; così potrebbe a prima vista venir sospetto, che succeder possa, che sia ella convergente, quantunque il detto valore dell'incognita sia immaginario. Il qual sospetto implicitamente presuppone, che la serie in questione possa ora verso di un valor convergere, ora verso di un altro; poichè quando ella è convergente, il valore, verso di cui attualmente converge, è certamente reale, perchè è essa formata tutta di termini reali; nè potrebbe caratterizzarsi d'immaginario se non se un altro valore, verso cui in altri casi, cioè poste altre relazioni tra i coefficienti de' termini dell'equazione, potesse la serie convergere, perchè fosse egli, poste quelle tali relazioni, reale. Ora se è vero quel che da principio (§. V.) è stato notato, e abbiám veduto avverarsi negli esempi, che si sono adottati, cioè che la serie, quando è convergente, converga sempre verso il minimo dei valori dell'incognita, non potrà questo valore in certi casi, per le relazioni, che acquistano tra di loro i coefficienti dei termini dell'equazione, diventar immaginario, e seguir la serie ad esser convergente, senza che nel diventar immaginario cessi insieme quel valore di vestir la natura di minimo; il che succedendo diventerà minimo un altro valore, che prima non era tale, e verso di questo convergerà la serie, che si suppone convergente, e così si verificherà sempre, che la serie, qualora è convergente, converge verso il minimo dei valori dell'incognita. Ammesso pertanto quel principio, che la serie trovata coll'esposto metodo, quando è convergente,

converga verso il minimo dei valori dell'incognita, si dovrà stabilire, che solo quando questo valore, che porta la natura di minimo, sia reale, possa quella serie esser convergente, e che divergente debba riuscire ogni volta che egli sia immaginario: e ciò appunto è quel che abbiain veduto (§. IX, e X.) succedere per l'equazione di secondo grado. Di queste due proporzioni poi la prima si può convertere, e si può dire, che ogni volta che la serie riesca convergente, il minimo dei valori dell'incognita è reale; ma non così la seconda, essendosi già notato (§. IX.) che può la serie esser divergente, e ciò non di meno esser reale il valor minimo dell'incognita.

XII. Il metodo proposto, come ognun vede, non può aver luogo, se l'equazione priva sia del termine penultimo. Ma in tal caso si può sempre assoggettarla al metodo, convertendola prima in un'altra, che abbia il penultimo termine. Si può anche col nostro metodo andar in traccia del valor massimo dell'incognita, sostituendo $\frac{1}{z}$ in luogo di x ; poichè co-

sì, come tutti fanno, si converte ogni valore di x nel suo reciproco, e il reciproco del massimo diventa il minimo, onde quando si fosse trovato il minimo dei valori di z , si avrebbe nel reciproco di lui il massimo dei valori di x . Al qual proposito giova notare, che ove siasi trovata la serie, che quando è convergente, somministra il minimo dei valori di x , niente è più facile che mutarla in quella, che serve al minimo dei valori di z , bastando solo in essa dov'era l'ultimo termine dell'equazione proposta ridotta a zero, mettervi il coefficiente del primo, e dov'era il coefficiente del primo mettervi l'ultimo, in luogo poi del coefficiente di ogni altro termine distante comunque da un estremo mettervi il coefficiente del termine egualmente distante dall'altro estremo, coll'avvertenza però d'accompagnar questa commutazione di coefficienti col cambiamento del segno ogni qualvolta i due coefficienti, che si commutano uno coll'altro, sono nell'equazione proposta ridotta al zero affetti di segni contrarj. Per capacitarli della legittimità di questa regola è abbastanza il ridettere, che proposta generalmente l'equazione $a''x^m + a''x^{m-1} + a''x^{m-2} \dots \pm a'x^2 \pm a'x \pm c = 0$ ponen-

do $\frac{1}{z}$ in vece di x si ricava l'equazione $\pm cz^m \pm a'z^{m-1} \pm a''z^{m-2} \dots$

$\pm a^{m-1}z^2 \pm a^{m-1}z \pm a^m = 0$, che è l'equazione stessa proposta, se non che i coefficienti dei termini estremi, ed equidistanti dagli estremi appunto coll'accennata regola si trovano tra di loro commutati.

XIII. Se pertanto ne' valori di b', b'', b''', b^{iv} ecc. descritti da principio s'intenderà fatta la testè indicata commutazione dei coefficienti a', a'', a''', a^{iv} ecc., per la quale diventino essi c', c'', c''', c^{iv} ecc. e se K denoterà la quantità, che secondo la esposta regola dee porsi in luogo di y , la serie, che serve al minimo dei valori di z , sarà $z = c'K + c''K^2 + c'''K^3 + c^{iv}K^4$ ecc.

E perchè $\frac{1}{z}$, cioè x sarà
$$= \frac{1}{c'K} - \frac{c''}{c'^2} + \frac{(c'^2 - c'c'')K}{c'^3} - \frac{(c'^3 - 2c'c''c''' + c'^2c^{iv})K^2}{c'^4} + \frac{(c'^4 - 3c'c'^2c''' + 2c'^2c''c^{iv} - c^3c^{iv} + c'^2c''^2)K^3}{c'^5} \text{ ecc.}$$

servirà questa serie al massimo dei valori di x Sarebbe desiderabile, che questa serie quando il massimo dei valori di x è reale, fosse convergente almeno in que' casi, ne quali è divergente la serie, che serve al valor minimo, non costante che reale pur sia questo valor minimo: così mediante il nostro metodo, quando reali fossero il massimo, ed il minimo valor di x , sempre si potrebbe per approssimazione aver o l'uno, o l'altro. Ma l'equazione di secondo grado considerata di sopra (§. VII.) ne avvisa, che ciò non si può sempre sperare; poichè la serie, che con questo metodo si trova pel valor massimo di x , è quella medesima, che serve al valor minimo, sottratta da $-b$.

XIV. Finalmente noterò, che siccome la serie $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + b^{iv}y^4$ ecc. (§. I.) nasce pel ritorno della serie $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ecc., così viceversa nasce questa pel ritorno di quella. La cosa è chiara per se stessa; e ove si volesse pur dubitarne, basta per convincersene avvertire, che intendendo proposta la serie $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + b^{iv}y^4$ ecc, e supponendo che ella pel suo ritorno somministri $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ecc., si avrà

$$a' = \frac{1}{b''}$$

$$a'' = \frac{-a'^2 b''}{b'}$$

$$a''' = \frac{-2a' a'' b'' - a'^3 b'''}{b'}$$

$$a^{iv} = \frac{-(a''^2 + 2a' a''') b'' - 3a'^2 a'' b''' - a'^4 b^{iv}}{b'} \text{ ecc.}$$

nelle quali equazioni separando b' , b'' , b''' , b^{iv} ecc. tornano a venire i valori

$$b' = \frac{1}{a'}$$

$$b'' = \frac{-b'^2 a''}{a'}$$

$$b''' = \frac{-2b' b'' a'' - b'^3 a'''}{a'}$$

$$b^{iv} = \frac{-(b''^2 + 2b' b''') a'' - 3b'^2 b'' a''' - b'^4 a^{iv}}{a'} \text{ ecc.}$$

che sono appunto quei, che competono ai coefficienti b' , b'' , b''' , b^{iv} ecc., quando la serie $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + b^{iv}y^4$ ecc. si suppone nata pel ritorno dell'altra $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ec. Da ciò ne segue, che se sia proposta una serie, la quale possa rappresentare i valori dell'incognita d'un'equazione, la serie, che si troverà pel ritorno di essa, si troncherà. e sarà l'equazione stessa, in cui l'incognita ha i valori dalla proposta serie rappresentati. Trovata poi che sia quest'equazione, se la serie proposta sarà convergente, dalle cose notate di sopra pare che debba potersi conchiudere, che la detta serie converge verso il minimo dei valori dell'incognita della medesima equazione.

XV. Convien però avvertire, che quando non si conosca in qualche maniera il termine generale, o l'andamento della serie proposta, per quanto sien molti i termini consecutivi, che nella serie di ritorno hanno i loro coefficienti $= 0$, non si potrà mai esser sicuri, che questa serie non risorga poi di nuovo, e resti veramente troncata, e sia un'equazione. Data la legge, che regna nella serie proposta, per uscir di

di dubbio se il ritorno di essa fornisca veramente una tale equazione, o no, bisognerà vedere se l'equazione, su di cui cade il dubbio, maneggiata col metodo del ritorno delle serie, somministri la stessa serie sottoposta alla stessa legge; poichè se ciò avvenga, è certo, che l'equazione trovata è il vero risultato del ritorno della serie data, altrimenti converrebbe supporre ciò che è impossibile, cioè che l'aggiunta di nuovi termini all'equazione assoggettata all'esperimento non potesse alterare la legge della serie, la quale si suppone esser appunto quella della serie proposta. Per esempio data

$$\text{la serie } y = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{1000} + \frac{x^3}{50000} - \frac{x^4}{2000000} + \frac{7x^5}{500000000} \text{ ecc.},$$

che ha i termini alternativamente positivi, e negativi, e di cui ogni termine n elimo sta al suo seguente come $n+1$:

$$\frac{(2n-1)x}{50}, \text{ trovo } b' = 10, b'' = 1, b''' = 0, b^{iv} = 0, b^v = 0,$$

$b^{vi} = 0$ di modo che comincio a credere, che pel ritorno di questa serie s'arrivi all'equazione $x = 10y + yy$, e che per conseguenza la serie medesima rappresenti i valori di y di quest'equazione, e quando è convergente, converga il valore $-5 + \sqrt{25+x}$, che è il minore dei due valori di y .

Ma per assicurarmene cavo la serie, che risulta dal ritorno della formola $x = 10y + yy$, e siccome ho $a = 10, a' = 1$, e tutti gli altri coefficienti a'', a''', a^{iv} ecc. $= 0$, così dopo

$$\text{d'aver cavato } b' = \frac{1}{10}, b'' = \frac{-1}{1000}, b''' = \frac{2}{100000} \text{ ecc.}, \text{ che}$$

sono appunto i coefficienti dei primi termini della serie proposta, rifletto che qualunque sia il numero dei coefficienti b', b'', b''' ecc., che osservano la data legge, il coefficiente seguente, che denoto per il b^n , il quale, quando sia $a^n = 0$, dipende dai precedenti secondo una legge, che è quella stessa, secondo cui ciascuno dei precedenti dipende da quei, che lo precedono, non potrà non esser sottoposto anch'egli alla legge costante, che regna ne' suoi precedenti, e che questa legge non potrebbe anzi venir alterata se non appunto dal non essere $a^n = 0$; e così con questa semplice riflessione m'acqueto, e ammetto l'equazione $x = 10y + yy$ per il totale risultato del ritorno della serie proposta. Del resto chi vo-

lele mediante il calcolo con rigorosa dimostrazione provare generalmente , che supposto che i coefficienti b' , b'' , b''' , ecc. della serie proveniente dall'equazione $x = 10y + yy$ col metodo del ritorno delle serie osservino la legge della serie data fino al coefficiente b^{n-1} , la dovrà osservare anche il seguente coefficiente b^n , urterebbe in calcoli prolissi, e scomodi oltre modo. Per la qual cosa se tanta difficoltà s' incontra, quando l'equazione non oltrepassa il secondo grado, ognuno può figurarsi quanto più malagevole sarà la faccenda, allorchè l'equazione sia d' un grado alto. Gioverà sempre avere avvertito , che quando la serie proposta $y = a'x + a''x^2 + \frac{1}{2} a'''x^3$ ecc. non abbia che i termini denominati dai numeri d' una serie aritmetica $1, r, r-1, 3r-2, 4r-3$ ecc., anche la serie $x = b'y + b'y^2 + b'y^3$ ecc. , che nasce pel ritorno di lei , non avrà che i termini denominati dai numeri della stessa serie aritmetica, come facilmente si raccoglie (§. I. e §. II.) dalla legge , che regna nei valori dei coefficienti b' , b'' , b''' , b^v ecc.

XVI. Riferbo ad un'altra Memoria il mostrare, come col metodo del ritorno delle serie si possono trovare per ogni equazione le altre serie, che quando sono convergenti, somministrano gli altri valori dell' incognita oltre il minimo , e il massimo . Ivi soggiugnerò alcune riflessioni non inutili per promuovere l' uso di queste serie , le quali ho incominciato a riguardare come non indegne d'essere particolarmente esaminate, dopo d' essermi accorto, che trovate col nostro metodo sono appunto quelle stesse, che s' incontrano applicando alle equazioni il metodo ingegnosamente inventato , e con singolar chiarezza esposto nelle Memorie della Reale Accademia di Berlino per l'anno 1768 dal prestantissimo Geometra Signor *de la Grange*.

M E M O R I A

SULLE PRESSIONI ESERCITATE DA UN CORPO
SOSTENUTO DA TRE O PIU' APPOGGI COLLOCATI
NELLO STESSO PIANO.

Del Sig. PAOLO DELANGES.

Stiano quanti si vogliano i punti o piedi su' quali un corpo si appoggia colla base in un piano immobile ed orizzontale, ragion vuole che la pressione sofferta da ciascun punto dipender deggia dalla posizione rispettiva che ha verso gli altri, e verso il centro di gravità dell'intero peso del corpo, come appunto avviene se sostenuto soile in equilibrio da un solo, o due appoggi, de' quali cai la determinazione è comunemente nota. Di questo problema, che può essere utile in tutte le pratiche architetture, non abbiamo fin ora una soluzione generale, determinata e dipendente da' soli principi della Statica, di cui anzi preso generalmente ne forma l'ultimo e più difficile scoglio. Tale argomento diede motivo al celebre *Euero* di tessere la Memoria col titolo "De pressione ponderis in planum cui incumbit", (*) con quella perspicacia ed estensione propria a così sublime calcolatore. Tutto l'ingegnoso lavoro pertanto lo istituì egli sul principio, che concependo innalzate dagli appoggi, che sostengono il corpo, rette linee perpendicolari al piano che passa per essi, e proporzionali alle rispettive loro pressioni, le estremità di tali perpendicolari terminino tutte ad uno stesso piano,

O ij

(*) Novi Comm. Acad. scient. Imperialis Petropolitanae, Tom. XVIII
An. MDCCLXXXIII.

e determinando quindi la posizione di questo piano, mediante due assi fissi presi ad arbitrio, trova l'espressione generale dello sforzo o della pressione sofferta da ciascun appoggio. Non istarò io qui esponendo le obbiezioni che m'insorsero nella mente contro il dichiarato principio, tra le quali non posso tacere quella, che qualora i punti d'appoggio tieno più che tre, deggia tuttavia ammetterli, che le estremità delle perpendicolari rappresentanti le pressioni esistano in uno stesso piano, e solo indicherò le difficoltà che possono opporsi a' risultati, che dalla sua applicazione va l'illustre Autore deducendo. Prendiamo in considerazione il caso più semplice, e sia RST (*Fig. I.*) un corpo che innista sul piano soggetto con tre piedi ABC , e dal punto O , in cui cade la direzione che passa pel centro di gravità di tutta la massa, si conducano le OP OQ parallele alle rette AB AC , che congiungono i punti d'appoggio; fatta questa costruzione, deducasi dalla teoria euleriana che, essendo G la pressione o il peso totale del corpo RST , la pressione nel punto A è $= G \left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC} \right)$, quella del punto $B = G \cdot \frac{AP}{AB}$, e del

punto $C = G \cdot \frac{AQ}{AC}$. Ma siccome immaginandosi, come è lecito,

che il centro O di gravità cadesse in qualsivoglia altro punto della parallela QO anche prolungata, e l'appoggio B fosse trasportato ovunque nella AB , rimane costante la pressione in C , variando solo quelle degli appoggi A B , e che rimarrebbe similmente costante la pressione in B cangiandosi quelle in A C , se il centro O situato fosse ovunque nella parallela PO e il punto C nella retta CA ; così è chiaro, che la teoria euleriana non dà del problema che una soluzione in parte determinata ed in parte no, mentre se fosse determinata interamente, il cangiamento di luogo del punto O , o d'uno degli appoggi dovrebbe alterare il carico non di due, ma di tutti e tre insieme. Ciò che poi rende incerta la suddetta teoria si è, che sostituito all'appoggio B il B' , ed al C il C' in modo che il centro O cadesse fuori delle rette CB BC , e che per conseguenza il corpo RST tendesse a capovolgersi, com'è manifesto, o sulla retta CB , ovvero sul-

la BC' ; nulla ostante resterebbero determinate le pressioni de' punti $C A B'$, o $C' A B$ come se dovessero sostenerli in equilibrio. L' *Av. Bossut* (*) parlando su questo soggetto dice: "il problema è ancora determinato quando vi sono tre appoggi, e che questi appoggi non sono in linea retta., . Ecco la dimostrazione dell' aiuto di lui. Congiunta la retta AP , (*fig. II.*) e prolungata in D , riguarda questo Autore la retta APD come un vette caricato nel punto P della pressione totale P , e sostenuto da due appoggi in A e in D , e sostituendo al D li $B C$ facilmente determina essere la pressione

in $A = P \cdot \frac{DP}{AD}$, la pressione in $B = P \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DC}{BC}$, e quella in

$C = P \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DB}{BC}$. Quindi dimostra che la ritrovata serie di

proporzionali $P: A: B: C:: BC \times AD: BC \times PD: AP. DC: AP \times DB$ si trasmuta nella seguente $P: A: B: C:: ABC: PBC: PAC: PAB$; di modo che rappresentando il triangolo ABC il peso assoluto concentrato in P , il triangolo PBC rappresenta la pressione sostenuta dal punto A , il triangolo PAC quella del punto B , e per fine il PAB quella del punto C . Ciò dimostrato conchiude: " questo elegante teorema è del *Sig. Eulero*, che lo ha dato senza dimostrazione, . ma che deduce però immediatamente dal risultato della soluzione di lui sopra riferito. " Quando i tre appoggi ABC sono in una linea retta, i triangoli $ABC PBC PAC PAB$ s' annullano, ed il rapporto delle forze $P A B C$ è indeterminato. Se il corpo s'appoggia con più di tre punti, il problema, considerato sempre secondo le leggi ordinarie della Meccanica, è indeterminato, qualunque sia la disposizione rispettiva degli appoggi. ecc.,. Quest'asserzione mi sembra poco fondata non iscorrendosi ragione alcuna per cui determinato dovesse esser il problema fino a tre punti, e non più; ciò poi, che è degno di osservazione, si è, che quantunque l'esposta soluzione pel caso de' soli tre appoggi abbia tutta l'apparenza di essere de-

(*) Trattato element. di Meccanica. Vol. primo. pag. 212 in Pavia. MDCCCLXXXVIII.

terminata, pure non lo è. Imperocchè supposto tolto uno degli appoggi, a cagion d'esempio C , e sostituito in sua vece il C' ovunque e nel lato CA o nel lato CB , si rileva chiaramente, considerando pure espresse le pressioni de' nuovi appoggi $A B C'$ o dalla serie delle loro quantità assolute, o dalla relativa de' triangoli $ABC' PBC' PAC' PAB$, che bensì variano le pressioni su i due punti $B C'$, ma resta costante la pressione sul terzo A ; e che in oltre trasferendosi comunque si voglia li BC in BC'' , purchè la retta BC'' passi pel punto P , e sieno le distanze $DB' DC''$ uguali alle $DB DC$, rimane la stessa non solo la pressione in A , ma anche in B' e C'' , mentre per la diversa posizione rispettiva acquistata da' punti in tutti siffatti casi dovrebbe alterarsi la pressione sofferta da ciascuno nello stesso tempo. Di più facendo girare la linea BC sul punto D finchè s'adatti alla retta AD , è manifesto che tuttavia i tre appoggi $B' A' C''$ collocati in una linea retta porterebbero le stesse pressioni come se collocati fossero in un triangolo BAC , o qualunque altro $B'AC''$, il che quanto sia ripugnante lo dimostreremo a suo luogo. Non v'ha dubbio che la soluzione proposta dal *Sig. Ab. Bossut* per li tre punti non dia il problema determinato alla sua maniera, anche qualora sieno situati in linea retta, poichè seguendo il metodo di lui potrà sempre trovarsi nel vertice retto $C APB'$ il punto D , in cui immaginato un appoggio, e ripartito il peso P tra gli appoggi $A D$, e quindi la parte portata dal D tra li C'' e B' , sia la somma delle pressioni ne' soli tre appoggi esistenti $C' AB''$ uguale alla totale pressione P . Avrebbe concluso lo stesso anche il saggio Autore se nel passare dal caso generale a questo particolare avesse fatto riflesso sulla serie delle quantità effettive delle pressioni e non alla relativa espresse per mezzo de' sopra indicati triangoli. E' poi vero che calando la stessa via, se quattro o più fossero i punti d'appoggio, il problema diventa indeterminato riguardo alla rispettiva forza che dovrebbe ciascuno di essi portare, ma lo è ancora quanto alla relativa disposizione loro, come si è dimostrato del tre. Di tanto si consideri al solito che il peso da sostenersi su quattro appoggi $A B E C$ (*fig. III.*) sia raccolto nel punto P , da cui si conduca a qualunque sia appoggio A la retta AP , e immaginandosi cadere un appoggio in D

nella stessa direzione prolungata verso P , si congiunga la BD , e si prolunghi, onde concorra in F colla retta CE che unisce gli altri due appoggi $C E$. Ora determinando nel vette AD le pressioni in A e in D prodotte dal peso P , e dividendo quella di D ne' punti $B F$, e per ultimo quella di F ne' punti $C E$, si avranno le forze necessarie d'applicarsi a' punti $A B E C$ per sostenere in equilibrio l'intero peso P . Essendo però arbitrario il punto D , saranno pure arbitrarie le pressioni assegnate agli appoggi $A B C$, ch'è il primo genere d'indeterminazione; l'altro genere poi si manifesta concependo girarli la retta CE sul punto F , o la retta BD , o le rette $BDF CE$ inneme sul punto D . Non è questa la sola questione di Statica, di cui non si è potuto scoprire la soluzione direttamente, ond'è dovuto dar mano a ipotesi o sussidj ed immagini non convenienti alla naturale sua costituzione, a segno di tramutarla in altra del tutto differente dalla proposta. Mi riservo pertanto di dimostrare essere accaduto ciò anche in altro soggetto statico, che si rese celebre per esservisi adoperati uomini illustri, e che non è meno importante di quello su cui ragioniamo: del quale esporrò adesso quella soluzione che reputo soddisfacente alle condizioni sopra dichiarate, ed a quelle che andrò dichiarando opportunamente.

PROBLEMA I.

Riposando un corpo su tre punti $A B C$ (Fig. IV.) situati in un piano orizzontale, determinare la pressione che sente ciascuno di essi.

Dal punto G , in cui la verticale che passa pel centro di gravità del corpo incontra il piano orizzontale, si conducano agli appoggi $A B C$ le rette $GA GB GC$, ed a queste le perpendicolari $LAI DBE HCF$; indi si menino da' punti $B C$ le $CL BI$ parallele alla GA , da' punti $A C$ le $AD CE$ parallele alla GB , e da' punti $A B$ le $AH BF$ parallele alla GC .

Io riguardo $ABCG$ come un vette angolare a tre braccia $AG BG CG$, aggravato nel punto G della loro unione del peso intero, che si appoggia sopra i tre punti $A B C$; e

considerando pescia le pressioni che essi soffrono, come tre potenze che agiscano dal basso all' alto perpendicolarmente al piano orizzontale ABC , è chiaro che per l' equilibrio sup' esso, prendendo il punto di appoggio A per centro del moto del peso del corpo e delle potenze o pressioni collocate in B e in C , intorno all' asse IAL , farà il prodotto di esso peso nella sua distanza GA uguale ai prodotti inneme delle pressioni ne' punti B C nelle rispettive loro distanze BI CL dall' asse medesimo; similmente dovrà essere il momento del peso riguardo al punto d' appoggio B uguale alla somma de' momenti delle pressioni in A e in C rispetto all' asse DBE , e così il momento dello stesso peso sul punto d' appoggio C uguale alla somma de' momenti delle pressioni nei punti A B intorno all' asse HGF . Stabilito ciò, sia il peso del corpo sostenuto dal vette a tre braccia $ABCG = G$, la pressione sofferta dall' appoggio $A = A$, la pressione nel punto $B = B$, e quella del punto $C = C$; e sia poi il ramo $AG = a$, il ramo $BG = b$, ed il ramo $CG = c$. ed inoltre $AD = f$, $AH = g$, $BI = b$, $BF = l$, $CE = m$, e $CL = n$: avremo dunque per le cose dette le tre equazioni

$$aG = bB + nC$$

$$bG = fA + mC$$

$$cG = gA + lB$$

dalle quali si ricava che le ricercate pressioni sono rappresentate dalle seguenti formole (M) (N) (O)

$$A = G \left(\frac{bln + cbm - alm}{fln + gbm} \right) \dots (M)$$

$$B = G \left(\frac{agm + cfn - bgn}{fln + gbm} \right) \dots (N)$$

$$C = G \left(\frac{afl + bgb - cfh}{fln + gbm} \right) \dots (O)$$

Il che ecc.

SCOLIO.

S C O L I O.

Siccome in ognuna delle formole (M) (N) (O) entrano tutte le nove distanze $a b c f g h l m n$ dai tre assi di moto, così è chiaro che la nostra soluzione è determinata, vale a dire che il carico sofferto da ciascun appoggio deriva dalla posizione rispettiva che ha verso gli altri due, e verso il punto in cui s'intende raccolto il peso o la pressione totale, di modo che qualsiasi cambiamento in uno de' quattro punti $A B C G$ altera il sistema delle forze in equilibrio. Dee però avvertirti che le suddette formole vagliono finchè il punto G cade dentro il triangolo ABC costituito dai tre appoggi $A B C$, circostanza necessaria, perchè se cadesse fuori, il problema diventa impossibile, non potendo il corpo rattenersi in quiete sugli appoggi medesimi, come è per se evidente. Non occorre nella mia, come nella soluzione data dall' *Eulero*, far uso della condizione che la somma delle pressioni sugli appoggi sia uguale all' intero peso del corpo; il che certamente non può farsi, mentre nel considerare il problema generalmente, si ammetterebbe che in tutte le disposizioni possibili de' quattro punti $A B C G$ deggia distribuirsi la pressione totale G in tutti e tre gli appoggi $A B C$: nè ho riguardato con *Bossut*, che torna lo stesso, che il punto G deggia essere il centro di potenze parallele collocate a punti fissi $A B C$; avvegnachè entrerebbero così in questione diversa, e di natura sua indeterminata, come s'è veduto. E' vero già che la somma delle pressioni sugli appoggi dee pareggiare il peso intero del corpo, ma ciò dee servire di prova per così dire al risultato ottenuto, e non mai di condizione per ottenerlo. Così ora prima di passare mediante le nostre formole ad alcuni casi particolari, ove avremo più luogo a far conoscere la verità di tali obiezioni, faremo vedere che la nostra soluzione quantunque indipendente dalla condizione accennata la comprende nel risultato finale da essa somministrato. Perchè la somma pertanto delle pressioni sopra gli appoggi $A B C$ sia uguale al peso G dovrà essere la somma delle frazioni, che moltiplicano nelle tre formole (M) (N) (O) lo stesso peso G , uguale all' unità, cioè do-

Tom. V.

P

vrà verificarsi l'equazione $afl + agm + bln + bgh + cbm + cfn = alm + bgn + cfh + fln + gbm$, il che viene provato nel teorema seguente, di cui le due dimostrazioni, che qui espongo, e che deggiono riguardarsi come uno de' maggiori sforzi della tinteli, trovate furono dagli alunni *Bernardi e Romanò* di questo Collegio militare.

TEOREMA I.

Se da un punto G (fig. V.) preso dentro il triangolo RST si conducano le perpendicolari GA GB GC ai tre lati RT RS ST, e dal punto A le AD AH parallele alle GB GC, dal punto B le BI BF parallele alle GA GC, e finalmente dal punto C le CE CL parallele alle GB GA: dico che
 $GAD.BF + GAH.CE + GBI.AH + GBF.CL + GCE.BI + GCL.AD =$
 $GA.BF.CE + BG.CL.AH + GC.AD.BI + AD.BF.CL + BI.CE.AH$

DIMOSTRAZIONE PRIMA.

Dai punti *A B C* alle *AG BG CG* prolungate si conducano le perpendicolari *AΔ AP BO BK CN CM*; dai punti *O P K* alla *BG* le perpendicolari *OQ PV AX*, e dal punto *P* alla *AG* la perpendicolare *PT*; e la *AP* concorra colla *BG* nel punto *Z*.

Pertanto essendo $BG:GO::GP:GV$, e $BG:AG::KG:GΔ$; farà $GO.GP = BG.GV$, ed $AG.KG = BG.GΔ$; dunque $GO.GP - AG.KG = BG.VΔ$; ma $BG.VΔ = AP.BO$, perchè si ha $AP:VΔ::PZ:VZ::BG:BO$; quindi $GO.GP + AG.KG = AP.BO$, e quadrando

$$GO^2.GP^2 + AG^2.KG^2 + GO.GP.AG.2KG = AP^2.BO^2$$

si ponga comune la quantità $GO^2.GP^2 + GO^2.AP^2 + GP^2.BO^2$; farà dunque $GO^2.GP^2 + GO^2.AP^2 + GP^2.BO^2 + GO^2.GP^2 + AG^2.KG^2 + GO.GP.AG.2KG = AP^2.BO^2 + GO^2.GP^2 + GO^2.AP^2 + GP^2.BO^2$; ma i primi quattro termini del primo membro sono uguali a $GO^2.(GP^2 + AP^2) + GP^2.BO^2 + GO^2$, ovvero $GO^2.AG^2 + GP^2.BG^2$; e quei del secondo sono uguali a $(GP^2 + AP^2)(BO^2 + GO^2)$, oppure $AG^2.BG^2$; dunque

$$GO^2.AG^2 + GP^2.BG^2 + AG^2.KG^2 + GO.GP.AG.2KG = AG^2.BG^2,$$

e dividendo per $AG.BG$ si avrà

$$\frac{GO^2}{BG}.AG + \frac{GP^2}{AG}.BG + \frac{KG^2}{BG}.AG + \frac{GO.GP}{BG}.2GK = AG.BG;$$

ma $\frac{GO^2}{BG} = GQ$, $\frac{GP^2}{AG} = GY$, $\frac{KG^2}{BG} = GX$, $\frac{GO.GP}{BG} = GV$; quindi

$AG.GQ + BG.GY + AG.GX + 2KG.GV = AG.GB$, e moltiplicando per CG , si avrà $AG.GQ.CG + BG.GY.CG + AG.GX.CG + 2KG.GV.CG = AG.GB.CG$; si ha poi $GQ.CG = GO.GM$, $GY.CG = GP.GN$, $GX.CG = GK.G\Delta$, $GV.CG = GP.GM$; laonde $AG.GO.GM + BG.GP.GN + CG.GK.G\Delta + 2KG.GP.GM = AG.GB.CG$. Di nuovo essendo $BG:GC::GO:GM$, e $CG:G\Delta::GN:GP$; farà $BG:GA$, ovvero $GK:G\Delta::GO:GN:GM.GP$; dunque $KG.GP.GM = G\Delta.GN.GO$; e però $2KG.GP.GM = KG.GP.GM + G\Delta.GN.GO$; per il che

$AG.GO.GM + BG.GP.GN + CG.GK.G\Delta + KG.GP.GM + G\Delta.GN.GO = AG.GB.CG$, cioè $AG(BF - CG)(CE - BG) + BG(AH - CG)(CL - AG) + CG(BI - AG)(AD - BG) + (BI - AG)(AH - CG)(CE - BG) + (AD - BG)(CL - AG)(BF - CG) = AG.GB.CG$, e fatte le moltiplicazioni si troverà

$AG.BF.CE - AG.BF.BG - AG.GC.CE + AG.GB.CG + BG.CL.AH - BG.CL.CG - BG.AG.AH + AG.BG.CG + CG.AD.BI - CG.AD.AG - CG.BG.BI + AG.GB.CG + CE.BI.AH - CG.CE.BI - BG.BI.AH + CG.BG.BI - AG.AH.CE + AG.CG.CE + BG.AG.AH - AG.GB.CG + AD.BF.CL - CG.CL.AD - BG.BF.CL + BG.CL.CG - AG.AD.AF + CG.AG.AD + AG.BF.BG - AG.GB.CG = AG.GB.CG$, cioè

$$AG.BF.CE + BG.CL.AH + CG.AD.BI + CE.BI.AH + AD.BF.CL.$$

$$-CG.CE.BI - BG.BI.AH - AG.AH.CE - CG.CL.AD - BG.BF.CL \\ - AG.AD.BF = 0;$$

dunque $AG.BF.CE + BG.CL.AH + CG.AD.BI + CE.BI.AH \\ + AD.BF.CL = CG.CE.BI + BG.BI.AH + AG.AH.CE + CG.CL.AD \\ + BG.BF.CL + AG.AD.BF$; il che ecc.

DIMOSTRAZIONE SECONDA.

Dal punto X (fig. VI.) si conduca la XP parallela alla CE , che concorra col lato ST in P ; indi dal punto B si tiri $B\Delta$ parallela allo stesso lato ST , che concorra in Δ colla DA , e calata la DZ perpendicolare alla FB prolungata quanto occorre, si ponga $BV:VE::BQ:R::DQ:U$, e $BQ:BG::BV:P$.

E poichè $BQ:BG::BV:P$, farà $BV.BG = BQ.P$, e perciò $BV.BG.BQ = BQ^2.P$; ed essendo $BV:P::BQ:BG$ ovvero AQ ; e per li triangoli simili DQB AQI è $BQ:AQ::DQ:QI$; dunque $BV:P::DQ:QI$, e $BV.QI.DQ = P.DQ^2$. Similmente essendo $BQ:BV::R:VE$, e $BQ:BV::BG:P$; farà $R:VE::BG:P$, e $P.R = BG.VE = CVE$; ma per la somiglianza de' triangoli BVE CVF è $CVE = BVF$; dunque $P.R = BVF.R$; e siccome $BV.R = VE.BQ$, cioè $BVF.R = VE.BQ.VF$; così si avrà $P.R = VE.BQ.VF$: per esser poi $BG:P::BQ:BV$, e $BQ:BV::XH:XL$; farà $BG:P::XH:XL$, e $P.XH = LAH.BG$. Di nuovo essendo per ipotesi $BV:DQ::VE:U$; e si è dimostrato $BV:P::DQ:QI$; farà dunque $VE:U::P:QI$, e quindi $2XH.P.U = 2XH.VE.QI$: avendo poi $BQ:BV$, ovvero $HX:XL$ ragion composta di $BQ:BG$ e di $BG:BV$, ed è $BG = QA$, $BG = CV$, $BQ:QA::DQ:QI$, e $CV:BV::FV:VF$; avremo $HX:XL::DQ.FV:QI.VE$, ed $HX.QI.VE = XL.DQ.FV$; e perciò farà $2XH.P.U = XL.DQ.FV + XH.QI.VE$. Di più stando per ipotesi $BV^2:VE^2::BQ^2:R^2::DQ^2:U^2$; e come la differenza degli antecedenti alla

differenza de' conseguenti, così un antecedente al suo conseguente; si avrà $BQ^2 - DQ^2$, cioè $BD^2 : R^2 - U^2 :: BQ^2 : R^2 :: BV^2 : VE^2$; ed è $BV^2 : VE^2 :: BD^2 : DZ^2$; dunque $R^2 - U^2 = DZ^2$.

Ora i triangoli simili $H\Delta P$ BVE danno $PA : BV :: \lambda H : VE$, ed è $PX = \Delta Q$, avvegnachè i triangoli $P\lambda C$ $B\Delta Q$ sono uguali e simili; si avrà perciò $\Delta Q . VE = BV . \lambda H$, cioè $\Delta Q . VE = \lambda XH$, e posto comune $DQ . VE$, farà $\Delta D . VE = BV . XH + DQ . VE$; ma per la somiglianza de' triangoli $DB\Delta BVE$ si ha $\Delta D . VE = DBE$: dunque $DBE = BV . XH + DQ . VE$; e $DBE = VBZ$; dunque $VBZ = BV . XH + DQ . VE$, cioè $BV (BZ - XH) = DQ . VE$, e quindi $BV : VE :: DQ : BZ - XH$; ed è per ipotesi $BV : VE :: DQ : U$; dunque $U = BZ - \lambda H$, e $XH = BZ - U$, $\lambda H + 2U = BZ + U$, e però $BZ^2 - U^2 = \lambda H (XH + 2U)$; ma $BZ^2 = BD^2 - DZ^2$, e si è dimostrato $DZ^2 = R^2 - U^2$; si avrà in conseguenza $BD^2 - R^2 = \lambda H (XH + 2U)$, oppure $BQ^2 - QD^2 - R^2 - \lambda H^2 = 2XH . U$, e quindi $BQ^2 . P - QD^2 . P - R^2 . P - \lambda H^2 . P = 2 \lambda H . P . U = \lambda L . DQ . FV + XH . QI . VE$ per ciò che poco fa abbiamo scoperto. Si è poi dal bel principio provato $BQ^2 . P = BV . BG . BQ$, $QD^2 . P = BV . QI . DQ$, $R^2 . P = BVF . R$, $\lambda H^2 . P = \lambda XH . BG$, cioè

$BQ^2 . P - QD^2 . P - R^2 . P - \lambda H^2 . P = BV . BG . BQ - BV . QI . DQ - EVF . BQ - \lambda XH . BG$, si avrà dunque, essendo $BV = GC$, $BQ = AG$
 $GC . BG . AG - GC . QI . DQ - EVF . AG - \lambda XH . BG = \lambda L . DQ . FV + \lambda H . QI . VE$
 E perchè $CL - AG = XL$; farà anche $CL . FV . DQ - AG . FV . DQ = XL . FV . DQ$, e perciò

$GC . BG . AG - GC . DQI - EVF . AG - \lambda XH . BG = CL . FV . DQ + XH . QI . VE - AG . FV . DQ$

e posto comune $AG . FV . DQ + \lambda XH . BG + GC . EV . QI - GC . BG . AG$, si otterrà

$AG . FV . DQ + GC . EV . QI - GC . DQI - EVF . AG = CL . FV . DQ + \lambda XH . BG + GC . EV . QI + HX . QI . VE - GC . BG . AG$;

ma il primo membro è $= (DQ - EV)$, cioè $(AD - CE)$
 $(AG.FV - GC.QI)$; e nel secondo $LXH.BG = BG.XH.CL$
 $- BG.XH.CX$: dunque

$$(AD - CE)(AG.FV - GC.QI) = CL.FV.DQ + BG.XH.CL + GC.EV.QI + XH.QI.VE - CGA.GB - BG.XH.CX;$$

ed essendo $AD - BG = DQ$, si ha $CL(FV.DQ + BG.XH) = CL(FV.AD - FV.BG + BG.XH)$: ed è in oltre $GC.QI.EV + XH.QI.EV = AH.QI.EV$, per essere $CG + XH = AH$, la quale uguaglianza dà ancora $CGA.GB + GB.XH.CX = AH.GA.GB$: dunque $CG.QI.EV - CGA.GB + XH.QI.EV - BG.XH.CX = AH(QI.EV - GA.GB)$.

E poichè $EV = CE - BG$, e $GA = BI - IQ$; farà $EV(BI - IQ) = GA(CE - BG)$, e posto comune $EV.QI - GA.CE$; si avrà $EV.BI - GA.CE = EV.QI - GA.GB$, e però $(AD - CE)(GA.VF - GC.QI) = CL(FV.AD - FV.BG + BG.XH) + AH(EV.BI - GA.CE)$. Ora essendo $FV + AX = BF$, posta comune HX , farà $FV + AH = BF + XH$, ed $FV = BF + XH - AH$, e perciò $FV.BG = BG(BF + XH - AH)$, e aggiugnendo $FV.DQ$, farà $FV.AD = FV.DQ + BG.XH + BG.BF - BG.AH$, ovvero $FV.AD - GB.BF + BG.AH = FV.DQ + BG.XH$; ma $FV = BF - CG$, e però $FV.AD = AD.BF - AD.CG$; dunque giacchè $DQ = AD - BG$, ed $FV.DQ = FV.AD - FV.BG$,

$$AD.BF - AD.CG - BGF + GB.AH = FV.AD - FV.BG + BG.XH.$$

E similmente essendo $CE - BG = VE$, farà $BI(CE - BG) = BI.VE$, e tolto il comune $GA.CE$; farà $BI.CE - GA.CE - GBI = BI.VE - GH.CE$; ed anche $AH(BI.CE - GA.CE - GBI) = AH(BI.VE - GA.CE)$; quindi $(AD - CE)(GA.VF - GC.QI) = AH(BI.CE - GA.CE - GBI) + CL(AD.BF - AD.CG - GBF + BG.AH)$. Finalmente essendo $BF - FV = GC$, e $BI - IQ = GA$; farà $GA(BF - FV) = GC(BI - IQ)$, e posto comune $GA.FV - GC.BI$, farà $GA.BF - GC.BI = GA.FV - GC.IQ$: dunque

$$(AD - CE)(GA.BF - GC.BI) = AH(BI.CE - GA.CE - GBI) \\ + CL(AD.BF - AD.CG - GBF + BG.AH)$$

cioè $GAD.BF + GAH.CE + GBI.AH + GBF.CL + GCE.BI \\ + GCL.AD = GA.BF.CE + BG.CL.AH + GC.AD.BI \\ + AD.BF.CL + BI.CE.AH$; il che ecc.

C O R O L L A R I

I. Se le tre braccia AG BG GC sieno fra di sè uguali ed ugualmente inclinate l'una all'altra, sì che sia $a = b = c$, ed $f = g = h = l = m = n = \frac{3a}{2}$, le formule (M) (N) (O) danno $\frac{1}{2} G$ per la pressione che aggrava ciascuno degli appoggi A B C , come necessariamente dee accadere in tale circostanza.

II. Cadendo o il punto G sopra uno degli appoggi, a cagion di esempio C , ovvero l'appoggio C sul punto G ; sarà $GC = c = 0$, $AG = a = CL = n$, e $BG = b = CE = m$, e perciò scopriremo esser nulle le pressioni sugli appoggi A B , e caricato solamente il C dell'intero peso del corpo.

III. Ma due rami AG GC sieno per diritto fra loro (fig. VII), ed il terzo BG sia inclinato sotto qualsivoglia angolo $BGC = u$. Si prolunghino le due rette DE AC , se fa d'uopo, e concorrano in O ; e chiamato il seno tutto $= 1$, farà $GM = b$.

$$\cos. \mu, GO = \frac{b}{\cos. u}, AO = a + \frac{b}{\cos. \mu}, \text{ e } CO = \mp c \pm \frac{b}{\cos. \mu},$$

secondo che la retta DE concorre colla AC o di là, come mostra la figura, o di qua dal punto C : e quindi avremo $AD = f = a \cdot \cos. \mu + b$, $AH = AC = g = a + c$, $BI = b = a + b \cdot \cos. \mu$, $BF = l = c - b \cdot \cos. u$, $CE = \pm m = \mp c \cdot \cos. \mu \pm b$, $CL = CA = n = a + c$. Sostituiti pertanto questi valori nelle solite formule (M) (N) (O), si trova che la pressione in A è $= G \left(\frac{c}{a+c} \right)$, in $B = G \left(\frac{0}{(a+c)b \cdot \sin^2. \mu} \right) = 0$,

ed in $C = G \left(\frac{a}{a+c} \right)$; cioè che l'intero peso G è portato dai soli due appoggi AC la cui direzione passa pel punto G , e nulla è la pressione sul terzo B .

IV. Supponendo l'angolo $AGC = \mu = 0$, sicchè il vette da tre rami si trasformi in un vette retto ABC , o ACB (fig. VIII.), avremo, essendo $\text{sen. } \mu = 0$, e $\text{cos. } \mu = 1$, $AD = f = AB = a + b$, $AH = g = AC = a + c$, $BI = h = AB = a + b$, $BF = l = BC = \mp c \mp b$, $CE = m = CB = \mp c \mp b$, e $CL = n = CA = a + c$, servendo i segni superiori qualora l'appoggio C cade fra gli $A B$, e gl' inferiori se il B cade fra gli $A C$. Surrogando gli esposti valori nelle formule (M) (N) (O), si trova che nel primo caso è la pressione sull'appoggio $A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, sopra il $B = G\left(\frac{0}{2(a+b)(b-c)}\right)$, e quella sofferta da $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, nel secondo caso poi, si ha la pressione in $A = G\left(\frac{b}{a+b}\right)$, quella dell' appoggio $B = G\left(\frac{a}{a+b}\right)$, e dell'appoggio $C = G\left(\frac{0}{2(a+c)(c-b)}\right)$: di modo che si rileva che il peso G è soltanto portato dai due appoggi tra quali esercita la sua azione, e rimane superfluo il terzo situato al di là di uno di essi.

S C O L I O.

Eulero non parla nemmeno della disposizione dei tre appoggi in linea retta, e *Bossut* giudica non poterli definire in tale disposizione il carico portato da ciascuno. Ma sieno sottili quanto si vogliano le riflessioni che fa il Sig. *d' Alembert* (Opuscoli Matem. Tom. VIII. pag. 36) onde sostenere questa sentenza, la nostra soluzione, che non è soggetta a contraddizioni, prova il contrario. Quantunque poi, come s'è veduto, possa col metodo del Sig. *Bossut* ottenersi una soluzione determinata anche per questo caso, essa non conviene alla naturale costituzione del problema, mentre non determinandosi in fine che le quantità di tre forze parallele da situarsi a' punti $A B C$, delle quali la risultante ha collocata in G , e sia uguale all'intero peso G , si toglie la capacità, essendo gli appoggi immobili ed inconcussi, come dee supporli, di soffrire ciascuno di essi quanta pressione può derivargli

rivargli dalla rispettiva posizione, che ha verso gli altri, e verso il centro di gravità del corpo sostenuto. Per intendere però ciò chiaramente immaginiamoci che un corpo omogeneo e di figura regolare venga poggiato colla sua base piana sopra la superficie orizzontale di una materia molle ed ugualmente cedevole, in cui vi sia un punto immobile e fisso, che corrisponda nella verticale, che passa pel di lui centro di gravità; è manifesto che rimarrà la superficie suddetta illesa e solamente in contatto con tutti gli altri punti della base del corpo, e sarà portato l'intero peso di esso dal solo punto medesimo, quand'anche nella superficie molle infiniti altri di quelli che sono in contatto si concepissero diventare del pari immobili ed inconcussi. Similmente se due fossero i punti fissi e situati in una linea retta su cui cadesse la verticale del centro di gravità, questi soli punti porterebbero il peso del corpo nella nota proporzione, sebbene o fuori, o in maggior distanza nella direzione de' medesimi, si concepisse in seguito fornita la superficie molle di altro punto egualmente resistente. Ho detto in maggior distanza riguardo a quello collocato nella direzione de' due primi, avvegnachè di due punti fissi dalla stessa parte il più vicino soltanto alla verticale del centro di gravità dee esser in azione coll'opposto, come quelli che sufficienti esser possono a sostenere il peso totale, per la ragione appunto che se uno di essi s'incontrasse nella verticale medesima, solo lo sosterrrebbe interamente. Condizioni alle quali la nostra teoria soddisfa con tutta esattezza.

PROBLEMA II.

Poste le circostanze medesime si cerca la pressione sofferta da ciascuno de' quattro piedi A B C M (fig. IX.), tra quali cade nel punto G la verticale condotta dal centro di gravità del corpo, che sopra di essi riposa.

Si uniscano le rette AG BG CG MG, e si riguardi ABCGM come un vette a quattro braccia, che si congiungono ad un punto G comune; e condotte le rette RI DE FP SQ perpendicolari a dette braccia si calino dall'appoggio A le AD AH AQ normali alle DE FP SQ; dall'appoggio B le BI

Tom. V.

Q

BF BZ alle *RI FP S* ; dal *C* le *CE CL CS* alle *DE RI S* ; e per ultimo dall'appoggio *M* le *MR MN MP* perpendicolari alle *RI DE FP*.

Essendo date le lunghezze de' rami e la scambievole loro inclinazione, si chiami per semplicità di calcolo $AG=a$, $BG=b$, $CG=c$, $MG=d$, $AD=f$, $AH=g$, $AQ=\delta$, $BI=b$, $BF=l$, $BZ=\lambda$, $CE=m$, $CL=n$, $CS=\gamma$, $MR=p$, $MN=q$, $MP=\omega$. Sia poi il peso del corpo raccolto in $G=G$, la pressione sull'appoggio $A=A$, sul $B=B$, sul $C=C$, e sopra l'appoggio $M=M$.

Richiamando pertanto alla memoria le considerazioni fatte nel Prob. I. intorno al vette da tre braccia, avremo le quattro equazioni (D) (E) (F) (G)

$$aG=bB+nC+pM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

$$bG=fA+mC+qM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

$$cG=gA+lB+\omega M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

$$dG=\delta A+\lambda B+\gamma C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

le quali danno le formule (P) (Q) (R) (S) per le pressioni ricercate.

$$A=G \left(\frac{(db\omega+cp\lambda-aw\lambda-lpd)(m+q)+b\omega(n\lambda-b\gamma)+blp\gamma}{(b\delta\omega+gp\lambda-lp\delta)(m+q)+f\omega(n\lambda-b\gamma)+flp\gamma} \right) \dots (P)$$

$$B=G \left(\frac{(a\omega\delta+d\gamma p-cp\delta)(m+q)+n\omega(df-b\delta)+f\gamma(cp-aw)-bgp\gamma}{(b\delta\omega+gp\lambda-lp\delta)(m+q)+f\omega(n\lambda-b\gamma)+flp\gamma} \right) \dots (Q)$$

$$C=G \left(\frac{(b\delta-df)(b\omega-lp)+p\lambda(bg-cf)+af\gamma\omega}{(b\delta\omega+gp\lambda-lp\delta)(m+q)+f\omega(n\lambda-b\gamma)+flp\gamma} \right) \dots (R)$$

$$M=G \left(\frac{(ag\lambda+cb\delta-al\delta-dgb)(m+q)+f\gamma(al-ch)+bg(b\gamma-n\lambda)+fa'c\lambda-dl+bln\delta}{(b\delta\omega+gp\lambda-lp\delta)(m+q)+f\omega(n\lambda-b\gamma)+flp\gamma} \right) \dots (S)$$

Il che ecc.

C O R O L L A R I.

1°. Supponendo che sotto il punto *G* fosse collocato l'appoggio *A*, o l'appoggio *B*, sicchè sia $AG=a=0$, $AQ=\delta=GM=d$, $AH=g=GC=c$, $AD=f=GB=b$, oppure $BG=b=0$, $BZ=\lambda=GM=d$, $BI=b=GA=a$, $BF=l=GC=c$; quantunque gli appoggi *B C M* nel primo caso,

e gli $A M C$ nel secondo si trovino situati come nel Problema I., nulla ostante le formole (P) (Q) (R) (S) danno a vedere, che il totale peso G è portato o dall'appoggio A , ovvero dal B , e che nulle sono le pressioni sopra i tre residui rispettivi appoggi.

2.° Se oltre edere i rami $AG BG CG MG$ uguali fra loro, sia AG per diritto coll'opposto GC , ed MG col suo opposto BG , chiamato l'angolo $AGB = \mu$, e l'angolo $ABG = \pi$, il seno tutto $= 1$; farà $AG = a = BG = b = CG = c = MG = d$, $AD = f = BI = h = CS = \gamma = MP = \omega = \frac{a \cdot \text{sen } \mu}{\text{Tang. } \pi}$, $BF = l = CE = m = A\mathcal{Q} = \delta = MR = p = 2a - \frac{a \cdot \text{sen. } \mu}{\text{Tang. } \pi}$, ed $AH = g = BZ = \lambda = CL = n = MN = q = 2a$. Sostituiti questi valori nelle formole (P) (Q) (R) (S), si trova, che la pressione sopra ciascun appoggio è espressa dalla stessa quantità

$G \left(\frac{2 \cdot \text{Tang. } \pi - \text{sen. } \mu}{8 \cdot \text{Tang. } \pi - 4 \cdot \text{sen. } \mu} \right) = \frac{1}{4} G$, vale a dire che ognuno de' quattro appoggi $A B C M$ porta la quarta parte del peso G .

3.° Se pongansi uguali le quattro braccia, ma le sole due $AG GC$ per diritto, e sia l'angolo $BGC = \mu$, e l'angolo $AGM = \pi$, ed il raggio o seno tutto $= a$; avremo $AG = a = BG = b = CG = c = MG = d$, $AD = f = BI = h = a \pm \cos \mu$, $AH = g = CL = n = 2a$, $A\mathcal{Q} = \delta = MR = p = a \mp \cos \pi$, $BF = l = CE = m = a \pm \cos. \mu$, $BZ = \lambda = MN = q = a + \frac{\cos. \pi. \cos. \mu + \text{sen. } \pi. \text{sen. } \mu}{a}$, $CS = \gamma = MP = \omega = a \pm \cos. \pi$,

e facendo per maggior semplicità $\cos. \mu = b$, $\cos. \pi = c$, ed $a + \frac{\cos. \pi. \cos. \mu + \text{sen. } \pi. \text{sen. } \mu}{a} = r$, le nostre formole (P) (Q)

(R) (S) somministrano i seguenti valori per le ricercate pressioni.

$$A = G \left(\frac{(a^2 \pm ab \pm ac \pm bc) r \mp cr^2 - ab^2 - ac^2 \mp 2abc}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2) r + (a \mp c) r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)} \right)$$

$$B = G \left(\frac{(a^2 - c^2) r}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2) r + (a \mp c) r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)} \right)$$

Q ij

$$C = G \left(\frac{(a^2 \pm bc)r - a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)} \right)$$

$$M = G \left(\frac{ar^2 + r(-a^2 \mp bc)}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)} \right)$$

valori che insieme pareggiano l'intero peso G . Volendo passare dal vettore di quattro rami a quello di tre, basta supporre l'angolo $BGC = \mu = 0$, cioè $\cos. \mu = b = a$, e si troverà come nel Corollario III. del Problema I., che i soli due appoggi $A C$ per diritto sostengono il peso G , nè soffrono pressione alcuna il terzo M .

IV. Ma se oltre essere per diritto i due rami $AG GC$, lo sono pure con essi i due $BG GM$, onde $BACMG$ divenga un sol vettore retto (*Fig. X.*), in cui il grave G abbia due appoggi $A B$ da una parte, e due $C M$ dall'altra, farà $AD = f = BI = b = BA = b - a$, $AH = g = CL = n = AC = a + c$, $AQ = \delta = MR = p = AM = a + d$, $BF = l = CE = m = BC = b + c$, $BZ = \lambda = MN = q = BM = b + d$, $MP = \omega = CS = \gamma = CM = d - c$. Quindi le quattro equazioni generali surriferite (D) (E) (F) (G) si cangeranno per questo caso nelle seguenti

$$aG = C(a + c) + M(a + d) - B(b - a)$$

$$bG = C(b + c) + M(b + d) + A(b - a)$$

$$cG = A(a + c) + B(b + c) - M(d - c)$$

$$dG = A(a + d) + B(b + d) + C(d - c)$$

nella prima e terza delle quali l'ultimo termine è negativo, avvegnachè riguardando i punti $A C$ come centri di moto, le potenze supposte ne' punti $B M$ agiscono pel medesimo verso col grave G , e pel verso contrario le sole $C M$, ovvero A, B . Dallo sviluppo pertanto di tali equazioni trovasi

$$A = G \left(\frac{c}{a + c} \right)$$

$$B = G \left(\frac{d(a + c) - c(a + d) - a(d - c)}{(b - a)(d - c) + (b + d)(a + c) - (a + d)(b + c)} \right) = 0$$

$$C = G \left(\frac{a}{a+c} \right)$$

$$M = G \left(\frac{(b(a+c)-c(b-a))(d-c) + (c(a+d)-d(a+c))(b+c)}{((b-a)(d-c) + (b+d)(a+c) - (a+d)(b+c))(d-c)} \right) = 0$$

Dal che rilevasi che gli appoggi estremi $B M$ non portano alcuna parte del peso G , ma tutto è sostenuto dai due $A C$, che più da vicino l'abbracciano nel modo stesso che accade nel vette ordinario a due soli appoggi.

V. Che se per ultimo essendo gli appoggi disposti in linea retta tre di essi $B M A$ (fig. XI) sieno da una parte, ed il quarto C dall'altra; avremo $AD = f = BI = b = BA = b-a$, $AH = g = CL = n = AC = a+c$, $AQ = \delta = MR = p = AM = d-a$, $BF = l = CE = m = BC = b+c$, $BZ = \lambda = MN = q = BM = b-d$, $CS = \gamma = MP = \omega = MC = d+c$, e però secondo lo stabilito principio le pressioni ricercate dipenderanno dallo sviluppo di queste quattro equazioni

$$aG = C(a+c) - B(b-a) - M(d-a)$$

$$bG = A(b-a) + C(b+c) + M(b-d)$$

$$cG = A(a+c) + B(b+c) + M(d+c)$$

$$dG = A(d-a) - B(b-d) + C(d+c)$$

delle quali la prima ha due termini negativi, e la quarta ne ha uno, poichè nel supporre successivamente i punti $A M$ centri del moto, le potenze, che s'immaginano applicate a' punti $B M$, ovvero al punto B , agiscono in favore del peso G ; l'esposte equazioni danno poi

$$A = G \left(\frac{c}{a+c} \right)$$

$$B = G \left(\frac{(d(a+c)-c(d-a))(b+c) + (c(b-a)-b(a+c))(d+c)}{((b-a)(d+c) - (b-d)(a+c) - (d-a)(b+c))(b+c)} \right) = 0$$

$$C = G \left(\frac{a}{a+c} \right)$$

$$M = G \left(\frac{a(b+c) + c(b-a) - b(a+c)}{(b-a)(d+c) - (b-d)(a+c) - (d-a)(b+c)} - \right) = 0$$

il che fa vedere come nel corollario antecedente, che i due appoggi $A C$, che immediatamente abbracciano il peso G lo portano come se soli esistessero.

S C O L I O.

Crediamo necessario di aggiugnere qui delle riflessioni riguardo alle proprietà che ora abbiamo svolte intorno alle azioni esercitate da quattro appoggi nella diversa posizione loro, a maggior confermazione della nostra generale teoria. Il primo corollario dà un risultato, che è per sè evidente. I risultati del secondo e del terzo sembrano oppugnare con ciò che abbiain trovato nel caso analogo dei tre appoggi; ma ben considerando, si concepirà chiaramente, che se l'aggiunta di un solo appoggio, quando due sieno per diritto col centro di gravità del corpo sostenuto, diventa superflua; l'aggiunta di due o per diritto anch'essi secondo altra direzione col medesimo centro, o variamente collocati, influirà sempre nella medesima pressione sostenuta da' primi: imperocchè se sono per diritto, non v'ha maggior ragione che la pressione totale deggia distribuirsi piuttosto ne' due primi, che ne' due secondi; e se non sono per diritto i due appoggi aggiunti, siccome tolto o l'uno, o l'altro de' primi i tre residui, cioè que' tre dentro de' quali cadeffe il centro di gravità del corpo, sosterrebbero l'intera pressione, così niuno di essi può rimanere inerte colla presenza del quarto; oltre di che per la ragione appunto, che i tre appoggi rimangono tutti attivi finchè il centro della pressione intera cade dentro il triangolo da essi costituito, deggiono essere pure attivi tutti e quattro nella stessa circostanza. Finalmente i corollarij quarto e quinto confermano ciò che si è concluso intorno al vette retto poggiato su tre punti, nè v'ha cosa più conforme alla ragione di quella, che in questo caso ci fa conoscere la nostra teoria, cioè che il peso attaccato al vette deggia essere portato da' soli due appoggi che più da vicino lo tengono tra essi; mentre nel supportarli anche atti soltanto alla pressione che può loro derivare dal peso suddetto, si trovano nella posizione conveniente, onde esercitare l'equilibrio ricercato senza il soccorso di altri appoggi che gli succedano. E qui cade a proposito di far nuovamente osservare, che se nell'accingerli alla soluzione di tal problema si stabilisce che il punto *G* (fig. *ALL.*) dovesse essere il centro

di forze parallele collocate a' punti $B M A C$, con sì fatta ipotesi li cambierebbe in altro diverso, e di natura sua indeterminata: dico che risolverebbeli un problema diverso dal proposto. perchè non ammetterebbeli negli appoggi la capacità di sostenere la pressione competente alla rispettiva posizione loro e verso il centro B delle forze; e dico di natura sua indeterminata. avvegnachè dalla posizione arbitraria di due finti appoggi $H D$, il primo collocato tra gli $A C$, ed il secondo tra li $B M$ verrebbero a determinarsi le quattro forze parallele da applicarli a' punti $B M A C$ per l'equilibrio del peso G .

TEOREMA II.

Qualunque sia il numero de' punti d' appoggio, se il punto G (fig. IX.) in cui cade nel piano di essi la verticale che passa pel centro di gravità del corpo, è centro di gravità di supposti pesi uguali collocati ne' punti medesimi, gli appoggi sono aggravati ugualmente.

Imperciocchè pel teorema del *P. Guldini*, la somma de' prodotti de' pesi uguali situati ne' punti $A M C$ nelle distanze $AD MN CE$ dall'asse DBE condotto dal restante punto B è uguale al prodotto del peso collocato nel centro G di gravità, che sia la somma di detti pesi uguali collocati in tutti i punti $A B C M$, nella distanza GB dall'asse medesimo; e così è pure riguardo agli assi condotti per qualuvoglia altro punto $C M A$: ma lo stesso dee verificarsi nell'equilibrio del vette $ABCMG$ di molte braccia caricato nel punto G della loro unione di qualunque peso G : dunque in tal caso le pressioni sugli appoggi $A B C M$ saranno rappresentate da pesi uguali fra sè, ed in somma uguali al peso G ; il che ecc.

SCOLIO I.

Per far corrispondere a questo nostro teorema sì le formole (M) (N) (O) per li tre punti (*Prob. I.*), che le (P) (Q) (R) (S) per li quattro (*Prob. II.*), basta porre per quello del

Guldini nelle prime $a = \frac{1}{7}(b+n)$, $b = \frac{1}{7}(f+m)$, $c = \frac{1}{7}(g+l)$, e si ottiene da tutte e tre lo stesso valore

$$A=B=C=\frac{1}{7}G\left(\frac{fln+gbm}{fln+gbm}\right)=\frac{1}{7}G$$

e facendo nelle seconde $a = \frac{1}{4}(b+n+p)$, $b = \frac{1}{4}(f+m+q)$, $c = \frac{1}{4}(g+l+w)$, $d = \frac{1}{4}(\delta+\lambda+\gamma)$, si ha da tutte e quattro

$$A=B=C=M=\frac{1}{4}G\left(\frac{bm\omega\delta+gpm\lambda+bq\omega\delta+gpq\lambda+fn\omega\lambda+flp\gamma-lmp\delta-pql\delta-fb\omega\gamma}{bm\omega\delta+gpm\lambda+bq\omega\delta+gpq\lambda+fn\omega\lambda+flp\gamma-lmp\delta-pql\delta-fb\omega\gamma}\right)=\frac{1}{4}G.$$

Qui è da notarsi che il teorema sì famoso del *P. Guldini* è un caso particolare del nostro espresso generalmente nelle formole suddette, mentre, a cagion d' esempio, quanto ai tre punti, basta che il punto G (*Fig. IV.*) preso fra essi sia tale che sieno i corpi collocati negli ABC , come GBF . $CL+GCE$. $BI-GA$. $BF.CE:GAH.CE+GCL.AD-BG.CL.AH:GAD.BF+GBI.AH-GC.BI.AD$.

S C O L I O II.

Ognuno vede la facilità con cui il nostro metodo ci conduce a determinare le pressioni su gli appoggi di qualunque numero, impiegati a sostenere un corpo, nè occorre se non che l' attenzione, che se, come nel vette $ABCXMG$ (*Fig. XIII.*), delle perpendicolari condotte all' asse DBV , che passa a cagion d' esempio per l' appoggio B , alcune AD MN XT cadessero dalla parte del ramo BG , ed altre CE YV dalla parte opposta, nell' istituire l' equazione relativa al suddetto asse, deggiono prendersi positivi i momenti delle pressioni sopra gli appoggi A M X , e negativi quelli dei C Y . Così è chiaro ugualmente, che la stessa teoria vale anche se gli appoggi esistessero tutti in un piano comunque inclinato all' orizzonte, impedito essendo al corpo il momento alla discesa da qualche causa o potenza esterna. Anzi che dopo le cose esposte possiamo stabilire i seguenti canoni, la conoscenza de' quali può essere più di frequente utile nelle pratiche.

I. Poggiando un corpo sopra qualsivoglia numero di punti situati nello stesso piano, se uno si troverà nella direzione

ne

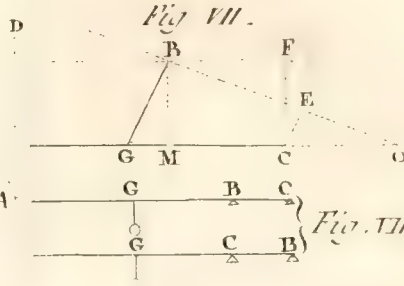
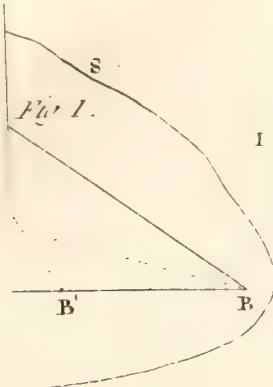
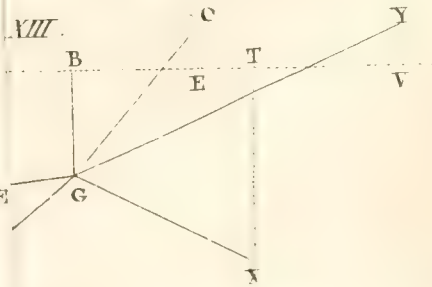
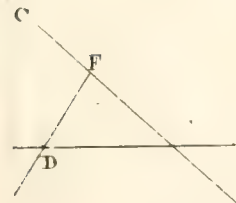
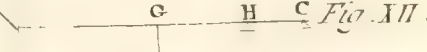
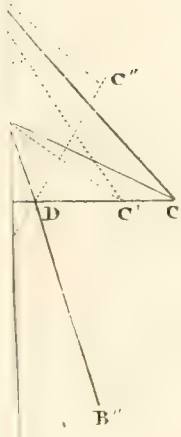
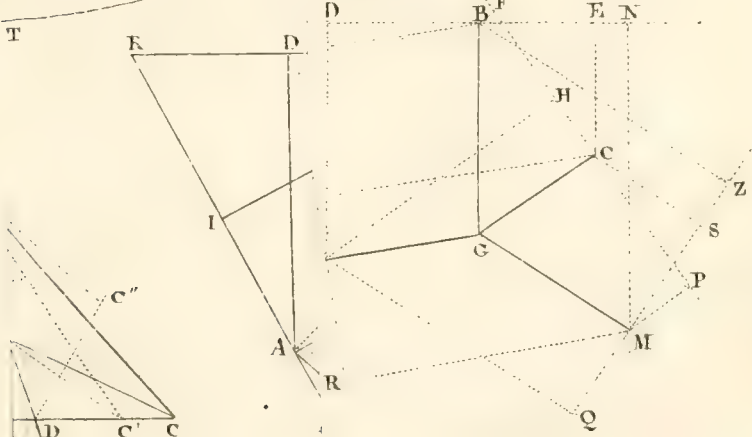
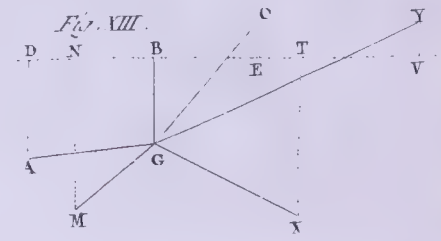
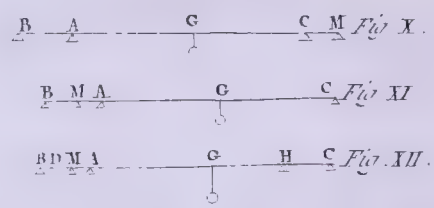
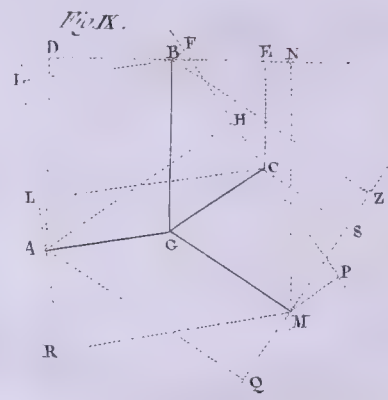
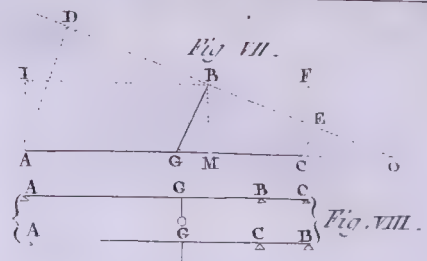
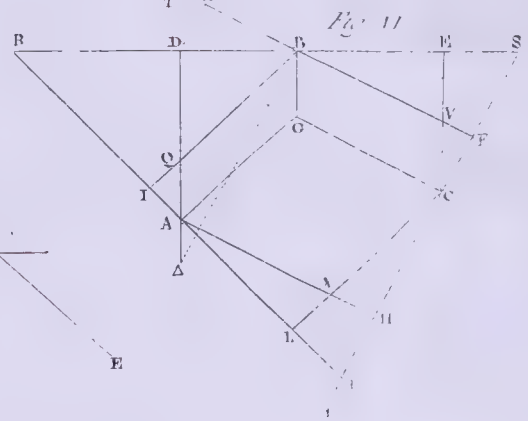
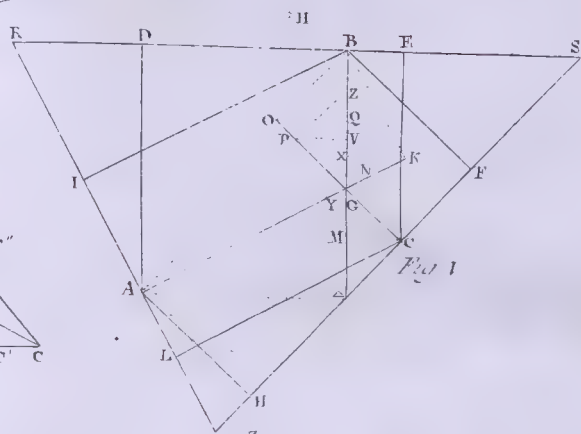
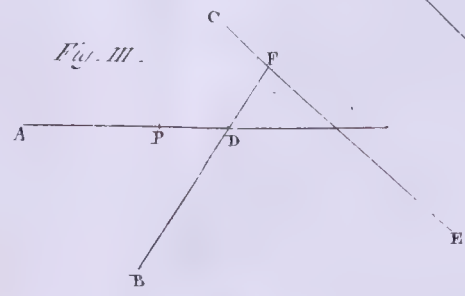
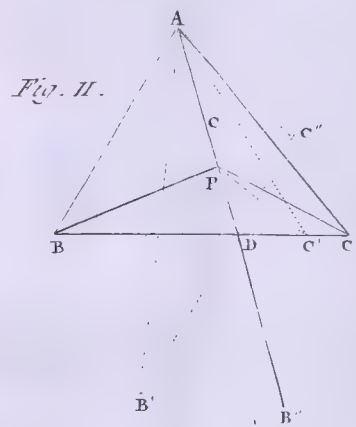
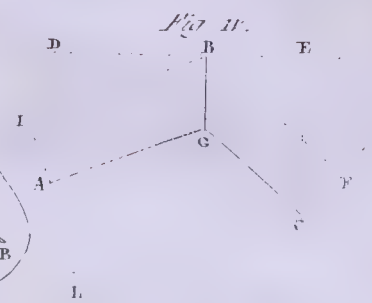
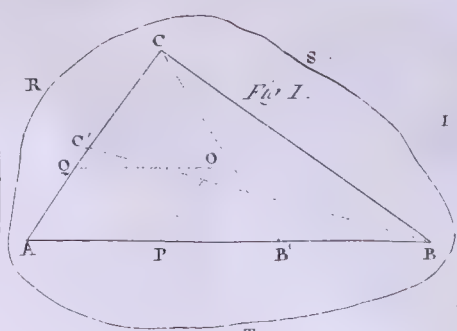


Fig. IX.





ne della pressione totale, sarà da esso portato interamente, e tutti gli altri punti rimarranno inerti o superflui.

II. Cadendo la direzione della pressione totale dentro il poligono costituito da un qualunque numero di punti d'appoggio, si distribuirà essa in tutti, e sarà ciascuno caricato dipendentemente alla rispettiva posizione che avrà verso gli altri e verso il centro di gravità del corpo sostenuto.

III. Che se il punto, in cui la direzione della pressione totale incontra il piano del suddetto poligono, sia il centro di gravità de' punti d'appoggio, considerando in essi collocati de' pesi uguali, ciascun appoggio porta quella pressione, che risulta dal dividere la totale per il numero loro.

IV. Se essendo tre gli appoggi, e la direzione di due venga intersecata da quella della pressione totale, questi ne soffriranno tutto il carico nella proporzione già nota, ed il terzo non avrà influenza alcuna.

V. Ma se sieno più di tre, quantunque la direzione di due sia intersecata da quella della pressione totale, nondimeno tutti gli appoggi faranno soggetti a carico.

VI. Un numero pari di appoggi situati nelle estremità di varj diametri di un cerchio comunque tra sè inchinati, nel di cui centro cada la direzione della pressione totale, verranno aggravati ugualmente.

VII. Se quanti si vogliano appoggi disposti sieno in una linea retta in cui capiti la direzione della pressione totale, i soli due opposti e più vicini alla direzione medesima la sosterranno, come accade nel vette ordinario a due appoggi.

Queste regole suppongono inconcussi gli appoggi, o almeno capaci di resistere al carico loro dovuto; ma siccome nelle pratiche può temersi di ciò in alcune circostanze, così sarà sempre buona precauzione l'aggiugnere più del bisogno, sicchè nel cedere gli attivi agiscano i sussidiarj nel conservare il corpo sostenuto in equilibrio e nella sua primiera posizione.

PRODROMO

D' OSSERVAZIONI SOPRA IL TRATTATO DI CALCOLO
INTEGRALE

Pubblicato in Parigi dal Sig. Marchese *de Condorcet*
l' Anno M. DCC. LXV.

Di PIETRO FERRONI.

STudiava ancora le Matematiche elementari quando nel M. DCC. LXVI. fui de' primi in Italia ad avere sott'occhio l'opera veramente sublime intitolata *Du Calcul Integral par M. le Marquis de Condorcet*. La più vasta e completa raccolta, ch'io avessi letta, era allora il trattato di calcolo Integrale del Sig. de *Bougainville*, pubblicato in due parti negli anni M. DCC. LIV. e LVI.; imperocchè i tre volumi di calcolo Integrale del sempre celebre Sig. *Leonardo Euler* furono, come ognun sa, stampati a Pietroburgo nel M. DCC. LXVIII. LXIX. e LXX. (a).

Lessi avidamente quest'opera di *Condorcet*; ed alla prima lettura non solo mi parve che fosse come nulla quel poco, ch'io sapevo di calcolo Integrale, ma credei altresì di smarirmi nel campo vastissimo di tante, e sì nuove, e profonde speculazioni. Riavuto dalla prima sorpresa rilessi l'opera; e come accade di chi trovandosi in paese sconosciuto prenda a poco a poco domestichezza e piacere cogli oggetti, ch'egli ha d'intorno, così ancor io a forza di meditare finalmente raggiunti il filo della scoperta, rintracciai nell'istoria mate-

(a) Presso a poco contemporanei si stamparono in Parma gli *Elemens du Calcul Intégral* dei PP. *Le Seur* e *Jacquier* colla data del 1768.; come pu-

re non prima del cadere dell'anno 1767 vide la pubblica luce il Tomo II. d'lle *Institutiones Analyticae* dei PP. *Riccati* e *Saladini* in Bologna.

matica tutti i passi, che avevano fatto altri grandi Analisti avanti di *Condorcet*, e venni a conoscere che la I. Sezione della I. parte di quell' opera era la conseguenza immediata d'un solo teorema di *Leibnitz*. Questo grand' uomo difatti in una Lettera da lui scritta a Hannover il 3. d' agosto del M. DC. XCVII. al famoso *Giovanni Bernoulli* scoperse il metodo, ch' egli chiamò *differentiationis de Curva in Curvam*, (a), e che a mio giudizio è l' origine dei progressi posteriormente fatti nell' Analisi Infinitesimale, e perfino del Calcolo delle Variazioni (b).

Dopo *Leibnitz* prima di tutti gli altri pubblicò e adoperò questo metodo nuovo *Nicola Bernoulli* nella Sezione II. d' una sua Dissertazione *de Trajectoriis Orthogonalibus* stampata negli Atti degli eruditi di Lipsia del M. DCC. XXI. (c); e poi lo promosse e generalizzò sommamente il profondo Geometra *M. Fontaine* verso la fine dell' anno M. DCC. XXXVIII. (d).

Colla guida del solo teorema di *Leibnitz* m' accorti che

R ij

(a) Si veda l' Epistola LIX. a pag. 319. del Tomo I. *Virorum celeberrimorum Got. Gul. Leibnitii & Johannis Bernoulli commercium Philosophicum & Mathematicum* edito a Lotanna e Ginevra nel 1745. Parlano del metodo istesso anche le Lettere seguenti LX. LXI. e LXIII. a pag. 321. 323. e 337. della Raccolta medesima.

(b) Due idee luminose, e foriere del Metodo delle Variazioni contiene l' Epistola sopraccitata LIX. La prima è di far variare il parametro della Logistica; e dalla figura risulta subito che l' Arco della Curva primitiva essendo $\int bdx$, abbiassi $\delta \int bdx$ l' istessa cosa che $\int (\delta bdx)$ nella Curva variata. Imperocchè avverte l' istesso *Leibnitz* che la variazione di tutto l' Arco debba essere eguale alla somma delle variazioni parziali degli innumerabili Archetti infinitesimi; e questa è Proposizione intuitiva. La seconda idea felice consiste nel vedere colla guida della figura e del principio poc' anzi esposto che $\delta \int bdx - \int \delta bdx$ sia la cosa medesima di $\int (\delta bdx) - \int \delta (\delta bdx)$, e perciò $\delta (\int bdx - \int \delta bdx)$ o sia $\delta d (\int bdx) = d \int (\delta bdx)$ o sia $d \delta (\int bdx)$. Questi

sono i due fondamenti, sopra dei quali si sostiene tutto il Calcolo delle Variazioni, elevato prima d' ogn' altro alla sua generalità e perfezione dall' insigne Analista M. de la Grange nel Tomo II. della Raccolta *Miscellanea Taurinensis* &c., edito nel 1762. a pag. 173. e legg., e di cui poco dopo pubblicò gli Elementi *Leonardo Euler* nel Tomo X dei *Novi Commentarii* &c. dell' Accademia di Pietroburgo, stampato nel 1766, a pag. 51. e legg. Nulladimeno *M. Montucla* accenna solo di passaggio questa scoperta veramente eccellente di *Leibnitz* a pag. 459. del Tomo II. dell' *Histoire des Mathematiques*.

(c) Vedasi il Tomo VII. dei *Supplementi* a pag. 439. §. XXV. e legg., come ancora il Tomo II. della Collezione intitolata *Opera omnia Johannis Bernoulli* al N. CXVI.

(d) Teorema II. e legg. a pag. 26. delle *Mémoires données à l' Académie Royale des Sciences* &c. par *M. Fontaine*. E' un Tomo in 4. stampato nel 1764. a Parigi; ma il suo *Calcul Integral* ha la data del 19. Novembre 1738.

si trovavano direttamente tutte l'*Equazioni di condizione* assegnate dal Marchese *de Condorcet*, e ricevevano ancora una facile e piana dimostrazione, sebbene questa per il contrario mancasse senza di quella guida nel metodo usato dal Ch. Autore Francese. In oltre concepì agevolmente come facendo nascere dal solo teorema di *Leibnitz* le predette generali *Equazioni di condizione*, venissero queste a ricondursi al vero ed unico loro principio fondamentale, da cui nacquerò le meno universali *Equazioni* di M. *Fontaine*, onde appariscano sempre più la semplicità e seconda delle regole matematiche.

Il risultato di queste mie riflessioni è quello appunto, che faccio adesso palese ai dotti Analisti dopo d'averlo comunicato ad alcuni dei Matematici insigni, i quali m'onorano della loro corrispondenza. Non credo che l'avvertire il principio unico e diretto, in cui si risolve tutto il Trattato dell'*Equazioni di condizione*, che prendo a illustrare, possa mai dispiacere al Marchese *de Condorcet*. Uomo sommo com'egli è, degno allievo dell'immortal M. *d'Alembert*, Elogiografo grato alla memoria del suo Maestro, Segretario perpetuo dell'Accademia Reale delle Scienze di Parigi, e noto al mondo letterario per le sue produzioni, che lo qualificano come uno dei primi Matematici di questo secolo, nessuno potrà mai pensare ch'egli abbia voluto far pompa di sublimità maggiore nelle sue formule anzichè confessarle come unicamente nate dalla scoperta di *Leibnitz*. Non è dei grandi ingegni, ma degli uomini mediocri togliere il vanto ed il nome alle scoperte degli altri (a). Le inavvertenze e gli errori medesimi degli Autori veramente originali si distinguono subito da quelli degli Scrittori comuni (b), perchè hanno sempre

(a) Quanto è da imitarsi per la ragione onesta il saggio contegno del Ch. Professore *Gian Francesco Malfatti*, il quale parlando nella Nota (a) della pag. 749. della Parte 2. del Tomo II. di questi *Atti della Società Italiana* (editi nel 1784.) dell'identità in un certo caso della Lemniscata del *Bernoulli* e dell'*Ovale* del *Cassini*, si serve dell'espressione *E già noto &c.*,

memore ch'io l'avevo dimostrato nell'Annotazione a pag. 512. della mia Opera *Magnitudinum Exponentialium &c.* pubblicata nel 1782.

(b) Un dilettante di Matematica, che voleva stampare un Opuscolo intorno l'intensità della luce, mi consultava assai spesso nel 1778. e 79., e tra l'altre mi scrisse dell'obliquità o inclinazione del raggio lucido sopra

un non so che di grandezza, e formano parte della Storia istruttiva dello spirito umano: ma li distinguono moltopiù per l'accoglienza che abbia chi gli discuopra. Gli uomini di minor conto difendono sempre i loro errori acerrimamente, e per farlo ne scrivon cent'altri. All'opposto *Isacco Newton*, quel genio sublime ed incomparabile, che si può dire con tutta ragione il miracolo della specie umana, appena ebbe avviso de' pochi errori trovati nei suoi *Principj* da *Giovanni Bernoulli*, fu così savio e modesto da profittarne per la terza edizione (a). Con questo esempio veramente imitabile dava egli a conoscere che il privilegio esclusivo di chi professi le Scienze consista sopra di tutto nel praticare la sentenza bellissima di *Pittagora* ἀληθεύειν, che quel Filosofo della Grecia opinava essere il principale esercizio dell'istessa *DIVINITÀ*. (b)

d'un punto. Concepii fin d'allora (per quanto mi facesse l'onore non meritato di chiamarmi uno de' primi Matematici del secolo) ch'ei non potesse mai diventare un gran Matematico. L'Anonimo, che poco fa ha mandato in giro per l'Italia il Programma in stampa sopra l'Eptagono con un paralogismo puerile a pag. 9. v 6., non sarà mai Matematico. Questi errori decidono, e decidono senz'appello.

(a) Intendo di quella di Amsterdam del 1714. Del resto si consultino il Tomo I. *Opera omnia Johannis Bernoulli* &c. ai N. I XXXVIII. e XC., *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* del 1711. pag. 47. e segg. dell'edizione in 4., *Traçtatus de quadratura Curvarum* nel Tomo I. della Rac. olta degli Opuscoli di *Newton* allo Scetlo della pag. 241. e segg. *Histoire des Mathematiques* di *Montucla* nel T. II. a pag. 414. Ma soprattutto

si leggano i due Volumi del *Commercium* &c. citato nella Nota (a) pag. 131.

(b) Due gran Ministri, i quali per la familiarità somma, che m'accordavano nella mia adolescenza, posso dir con ragione che siano stati i miei educatori, mi contarono due fatti insigni, che ho sempre a memoria. Il primo diceva che un letterato, pieno di zelo di spargere nella sua Patria la verità, fosse solito di misurare il merito degli uomini in ragione inversa del credito Palatino, di cui godevano. Diceva l'altro come presentatosi certo Pittore a un Filosofo per ditzegnare il di lui Ritratto, onde poi farne Medaglia, e chiessegli l'idea del Rovescio, rispondesse „Figuratevi dirimpetto al Monarca in atto d'alzare un spario, e discuoprire la verità; ed intorno scrivete *NON AV-LICVS IN AVLA*. „

A R T I C O L O I.

L'Equazioni di condizione assegnate da M. de Condorcet sono mancanti di prova, e per provarle dipendono dal solo teorema di Leibnitz.

1. Premetto che *Condorcet* quando ha dato il suo metodo generale per la ricerca dell'*Equazioni di condizione*, lo abbia dato per indipendente del tutto da qualunque altro principio o teorema, come per esempio da quello di *Leibnitz*, ch'è il medesimo, il quale universalmente vien conosciuto sotto nome di teorema di *M. Fontaine*. Tanto è ciò vero che *Condorcet* a pag. 14. 15., e 16. nella *Remarque III.* del suo Trattato deduca per corollario delle formule generali da lui ritrovate col proprio metodo il teorema di *Fontaine* (a).

2. Osservo in secondo luogo che data qualunque funzione finita o differenziale V , se $\frac{dV}{dx}$ rappresenti il coefficiente o fattore di dx nel caso, in cui si supponga solamente variabile x , debbasi necessariamente scrivere e differenziare di nuovo in quest'ordine preciso $\frac{ddV}{dydx}$ mentre si voglia dalla differenza parziale di $\frac{dV}{dx}$ passare ad altra differenza parziale facendo solamente variabile y . Mutare quest'ordine, e scriver piuttosto $\frac{ddV}{dx dy}$ vorrebbe dire supporre l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dx dy}$. Ma questa identità, che si verrebbe a supporre, non è un assioma, non è una proposizione intuitiva.

(a) Si corregga lo sbaglio a pag. 15. v. 5., dove in cambio di $\frac{dD}{dz}$ deve essere apposto $\frac{dD}{dx}$.

tiva, ed è all'incontro un teorema, che ha bisogno di prova, poichè è l'istesso teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine* (a). *Condorcet* a pag. 5. n. 4. dice, parlando di questa maniera d'esprimere i secondi differenziali di V , che *revient au même* il supporre $\frac{ddV}{dxdy}$ come differenziale di $\frac{dV}{dy}$ col far va-

riare unicamente x (e sta bene), o come differenziale di $\frac{dV}{dx}$ col far variare unicamente y (ed ha bisogno di prova). Se *Condorcet* per ritrovar le sue formule si fosse mai servito di quella identità come derivata dal teorema di *Fontaine*, non vi farebbe difficoltà ad accordarglielo in quel medesimo senso, nel quale l'assume l'istesso *Fontaine* a pag. 26. delle *Mémoires* precitate, col dire però *comme nous le démontrerons bien tôt*, ed a pag. 27. lo dimostra di fatto (b). Adunque o il *Marchese de Condorcet* intende, quando l'annunzia ed adopera, l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dxdy}$ come

dedotta dal teorema di *Fontaine*, il quale finalmente consiste in quella identità; ed allora sarebbe circolo vizioso o petizione di principio dedurre in prova della generalità e verità delle sue formule il teorema di *Fontaine*, col dire che i due metodi sian del tutto diversi tra loro, siccome egli fa a pag. 14. 15. e 16. O intende piuttosto che quell'identità non abbia bisogno di prova, ed allora ne verrebbe la conseguenza che fosse assioma analitico il teorema di *Fontaine*, e perciò fosse un inutile corollario delle sue formule generali.

3. Ristretto di più che l'esempio di *M. de la Grange*, il quale assume ancor esso senza provarlo, esser sempre $\delta dx = d^2x$, $\delta d^2x = d^3x$ &c. (c) non sia applicabile all'altro caso espo-

(a) Ved. Art. II. al §. 7.

(b) Anche nelle Formule di *Fontaine*, che sono a pag. 2. della Tavola Preliminare alle sue *Mémoires* &c., bisogna aver riguardo all'inversione d'ordine nel posto de' differenziali nei denominatori. Questa inversione, dipendente dal-

la prima scelta di notare i differenziali, può ancora accordargli, perchè suppone sempre quello, che poi dimostra, cioè $\frac{ddu}{dydx} = \frac{ddu}{dxdy}$.

(c) Tom II. des *Mélanges* &c. citato nella not. b. pag. 131

sto di sopra. Imperocchè questa identità dei differenziali, comunque siano combinati e disposti i segni δ, d della differenziazione, *M. de la Grange* l'allume, è vero, come provata in principio del suo *Essai d'une nouvelle Methode &c.* a pag. 175. del volume citato, ma non la deriva poi, come fa nell'altro caso il Marchese di *Condorcet*, per corollario delle proprie formule. Deve in oltre osservarsi che dimostrare l'identità dei differenziali di *M. de la Grange* sia della maggiore facilità, perchè ognuno vede che $dx = x' - x$, e però $\delta dx = \delta x' - \delta x = d'x$. Parimente $d^2x = dx' - dx = x' - x' - x' + x$, onde $\delta d^2x = \delta x'' - \delta x' - \delta x' + \delta x = d\delta x - d\delta x = d^2\delta x$ (a).

4. Finalmente convien sapere che tutte l'*Equazioni di condizione* somministrate da *Condorcet* si contengano nella sola formula del suo *Problema II.* Quanto al *Problema I.* non se ne dubita, essendo men generale del II. per la fattavi supposizione di dx costante. Il *Problema III.* ha di più del II. un numero qualunque di variabili x, y, u, z &c., mentre il II. n'ha sole due x, y . Tuttavia, posta mente alla fattura del calcolo, si rende chiaro che il maggior numero delle variabili non accresca in modo alcuno nè la difficoltà di ritrovare, nè la difficoltà d'esprimere l'*Equazioni di condizione*, siccome accorda a pag. 11. l'Autore medesimo. In oltre il *Problema IV.* si risolve unicamente nell'applicazione progressiva delle formule dei problemi precedenti all'effetto di assegnare di grado in grado l'*Equazioni di condizione* fino a quella dell'Integrale *finito* della data funzione differenziale. Ed in ultimo luogo i rimanenti Problemi V. VI. e VII., i quali s'occupano di ritrovare l'*Equazioni di condizione* non più delle funzioni, come gli anteriori, ma dell'equazioni differenziali di qualunque ordine e numero di variabili, sono ancor essi la replica delle formule del *Problema II.* (b)

(a) Si prova coll'istessa facilità $d^2x = d^2x$; poichè $\delta dx = d'x$, e perciò $d^2dx = dd^2x = d^2ddx$ in tutte le tre combinazioni.

(b) Soprattutto s'attenda dopo il

Problema V. alla *Remarque*, ch'è a pag. 24. In proposito dell'*Equazioni di condizione* per l'integrabilità dell'Equazioni differenziali pare che *M. de Condorcet* alla pag. 29. dia il vanto

per la ragione che un' equazione differenziale debba esser sempre la differenza d' una funzione V moltiplicata per un fattore indeterminato ed incognito A , onde applicandovi l' istesso metodo adoperato nel Problema II. non vi sia di bisogno d' altro artificio fuori di quello che somministra l' Algebra Cartesiana per l' eliminazione di A, dA, d^2A &c., fatta la quale si conseguiscono subito tante equazioni di condizione, tutte determinate, quante sono di numero le variabili meno l' unità, o meno 2, 3 &c. quando uno, due &c. dei differenziali si supponesser costanti. Di qui ne segue che sottoposto ad esame il solo Problema II., venga ad essere esaminata tutta intiera la teoria del Marchese *de Condorcet*.

5. Questo Problema II. ricerca quali sieno l' equazioni di condizione perchè la funzione differenziale V di qualunque grado, ma di due sole variabili x, y , e senza nessuna differenza costante, abbia per integrale l' altra funzione B del grado prossimamente inferiore. Seguirò fedelmente il metodo tenuto da *Condorcet*, colle sue stesse denominazioni, nè farò altro che spiegarlo di più, affine di renderlo di maggior chiarezza per tutti (a).

Si facciano adunque $dx=p, d^2x=q, d^3x=r, d^4x=s$ &c.

$dy=p', d^2y=q', d^3y=r', d^4y=s'$ &c.

Fatte le debite sostituzioni, la funzione V si cambia in un' espressione apparentemente finita, perchè composta di $x, y, p, p', q, q', r, r'$ &c.

Per la natura del problema abbiamo quest' unica equazione $V=dB$, che va sviluppata nelle sue differenze parziali (b).

Tom. V.

S

della prima scoperta a *M. Fontaine*; ma veramente *Nicola Bernoulli* sino dall' anno 1729. n' aveva dato un saggio nella sua *Memoria* intorno le Traiettorie ortogonali.

(a) Sia confrontato il Calcolo, che segue, con quello del Problema I., e degli altri che ne succedono.

(b) Il primo ad introdurre nel Calcolo Infinitesimale le differenze parziali si deve dire che fosse *Leibnitz* nel 1697. Il primo ad applicarle alla Fisico-Matematica, e nominatamente

all' Idrostatica sublime, fu *M. Clairaut* nell' aurea sua *Opera de la Figure de la Terre* pubblicata nel 1743. Il primo, che int' grate coll' aggiunta di funzioni continue arbitrarie l' equazioni comprendenti delle differenze parziali, fu *M. d' Alembert* nel 1747. Ma il passo più grande lo fece l' *Euler* allora quando introdusse nel Calcolo le funzioni irregolari o discontinue poco dopo del 1752. (Ved. il Tomo I. *Miscellanea Taurinensia* edito nel 1759.)

Abbiamo ancora una conseguenza immediata di quella equazione fondamentale, ed è $dV = ddB$; e se ne potrebbero avere quant'altre li vogliano mentre fossero necessarie; ma bastano le due sole $V = dB$, $dV = ddB$, che sono in sostanza l'istessa equazione.

$$\text{Da } V = dB \text{ si ricava } V = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.}$$

$$+ \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.}$$

$$\text{Da } dV = ddB \text{ s'ottiene } dV = d \left\{ \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.} \right\}$$

$$\left\{ \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.} \right\}$$

Ma V essendo una funzione data, ed espressa in tutti i suoi termini, che la compongono, saranno anche dati, ed espressi tutti i termini componenti il suo differenziale

$$Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.}$$

$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.}$$

[illegible]

6. Questa equazione per la sua natura e qualità dovendo essere e nel tutto e nelle sue parti omologhe identica, dà l'origine a tante altre equazioni parimente identiche, quanti sono i termini del primo membro. Separati perciò i coefficienti o fattori dei rispettivi differenziali $dx, dy, dp, dp', dq, dq', dr, dr',$ ec., derivano dalla prima equazione le subalterne, che seguono,

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{ddB}{dx^2} dx + \frac{ddB}{dx dp} dp + \frac{ddB}{dx dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dx dy} dy + \frac{ddB}{dx dp} dp + \frac{ddB}{dx dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 N &= \frac{ddB}{dy dx} dx + \frac{ddB}{dy dp} dp + \frac{ddB}{dy dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dy^2} dy + \frac{ddB}{dy dp} dp + \frac{ddB}{dy dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 P &= \frac{ddB}{dp dx} dx + \frac{ddB}{dp^2} dp + \frac{ddB}{dp dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dp dy} dy + \frac{ddB}{dp dp} dp + \frac{ddB}{dp dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 P &= \frac{ddB}{dp dx} dx + \frac{ddB}{dp dp} dp + \frac{ddB}{dp dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dp dy} dy + \frac{ddB}{dp dp} dp + \frac{ddB}{dp dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 Q &= \frac{ddB}{dq dx} dx + \frac{ddB}{dq dp} dp + \frac{ddB}{dq^2} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dq dy} dy + \frac{ddB}{dq dp} dp + \frac{ddB}{dq dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 Q &= \frac{ddB}{dq dx} dx + \frac{ddB}{dq dp} dp + \frac{ddB}{dq dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dq dy} dy + \frac{ddB}{dq dp} dp + \frac{ddB}{dq dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 R &= \frac{ddB}{dr dx} dx + \frac{ddB}{dr dp} dp + \frac{ddB}{dr dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dr dy} dy + \frac{ddB}{dr dp} dp + \frac{ddB}{dr dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 R &= \frac{ddB}{dr dx} dx + \frac{ddB}{dr dp} dp + \frac{ddB}{dr dq} dq + \frac{ddB}{dr+ec} dr + \frac{ddB}{dr dy} dy + \frac{ddB}{dr dp} dp + \frac{ddB}{dr dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec. \\
 R' &= \frac{ddB}{dr' dx} dx + \frac{ddB}{dr' dp} dp + \frac{ddB}{dr' dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + \frac{ddB}{dr' dy} dy + \frac{ddB}{dr' dp} dp + \frac{ddB}{dr' dq} dq + \frac{ddB}{dr'+ec} dr' + ec.
 \end{aligned}$$

7. Sin qui tutto il calcolo è nuovo, e felice, e non apparisce d'aver bisogno di nessun'altra anteriore scoperta dell'Analisi infinitesimale. Ma *Condorcet* va più avanti, e dice a pag. 7. e 10. che riducendo ciascheduna delle precedenti equazioni (*& reduisant, en mettant pour les suites qui multiplient ec.*) liano le medesime che

$$N = d \frac{dB}{dx}, P = \frac{dB}{dx} + d \frac{dB}{dp}, Q = \frac{dB}{dp} + d \frac{dB}{dq}, R = \frac{dB}{dq} + d \frac{dB}{dr}, \text{ec., ec.}$$

$$N' = d \frac{dB}{dy}, P' = \frac{dB}{dy} + d \frac{dB}{dp'}, Q' = \frac{dB}{dp'} + d \frac{dB}{dq'}, R' = \frac{dB}{dq'} + d \frac{dB}{dr'}, \text{ec., ec.}$$

In questa riduzione consiste appunto l'equivoco, e mentre pare al ch. Autore di non aver indizio di nessun altro soccorso di principio estraneo ed indipendente dall'algoritmo del suo calcolo generale, riduce tutto tacitamente senz' avvedersene al solo teorema di *Leibnitz*. Imperciocchè

$$\begin{aligned}
\frac{ddB}{dx dp} &= \frac{ddB}{dp dx}, \frac{ddB}{dx dq} = \frac{ddB}{dq dx}, \frac{ddB}{dx dr} = \frac{ddB}{dr dx}, \frac{ddB}{dx dy} = \frac{ddB}{dy dx}, \\
\frac{ddB}{dx dp'} &= \frac{ddB}{dp dx}, \frac{ddB}{dx dq'} = \frac{ddB}{dq dx}, \frac{ddB}{dx dr'} = \frac{ddB}{dr dx}, \frac{ddB}{dx dy} = \frac{ddB}{dy dx}, \\
\frac{ddB}{dy dq} &= \frac{ddB}{dq dy}, \frac{ddB}{dy dr} = \frac{ddB}{dr dy}, \frac{ddB}{dy dp} = \frac{ddB}{dp dy}, \frac{ddB}{dy dq'} = \frac{ddB}{dq' dy}, \\
\frac{ddB}{dy dr'} &= \frac{ddB}{dr dy}, \frac{ddB}{dp dq} = \frac{ddB}{dq dp}, \frac{ddB}{dp dr} = \frac{ddB}{dr dp}, \frac{ddB}{dp dp'} = \frac{ddB}{dp dp'}, \\
\frac{ddB}{dp dq'} &= \frac{ddB}{dq dp'}, \frac{ddB}{dp dr'} = \frac{ddB}{dr dp'}, \frac{ddB}{dp dq} = \frac{ddB}{dq dp}, \frac{ddB}{ap dr} = \frac{ddB}{dr dp}, \\
\frac{ddB}{dp dq'} &= \frac{ddB}{dq dp'}, \frac{ddB}{dp ar'} = \frac{ddB}{dr dp'}, \frac{ddB}{dq dr} = \frac{ddB}{dr dq}, \frac{ddB}{dq dq'} = \frac{ddB}{dq dq'}, \\
\frac{ddB}{dq dr'} &= \frac{ddB}{dr dq}, \frac{ddB}{dq' dr} = \frac{ddB}{dr dq'}, \frac{ddB}{dq' dr'} = \frac{ddB}{dr dq'}, \frac{ddB}{dr dr'} = \frac{ddB}{dr dr'}.
\end{aligned}$$

La verificazione dell'identità di tutte queste equazioni, tante di numero, quanti sono i binarj possibili delle variabili $x, y, p, p', q, q', r, r'$ della data funzione, cioè nel nostro caso particolare tante di numero quant'è $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

come sono di fatto, non vuol dir altro che il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, cioè non vuol dir altro che la verificazione dell'identità di quelle equazioni, che *Condorcet* dà più sotto nell'Osservazione III. del Problema III. come conseguenza delle sue formule.

5. Di ciò non potrà dubitarsi avvertendo che $V = dB$; e $dV = ddB = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds$ ecc. + $Ndy + Pdp + Qdq' + Rdr' + Sds'$ ecc. laonde V dev' essere una funzione rappresentabile in questa forma $V = A dx + (B) dp + C dq + D dr$ ecc. + $A dy + B dp' + C' dq' + D' dr'$ + ecc. Adunque $\frac{dB}{dx} = A, \frac{dB}{dp} = (B), \frac{dB}{dq} = C, \frac{dB}{dr} = D$, ecc., $\frac{dB}{dy} = A', \frac{dB}{dp'} = B', \frac{dB}{dq'} = C', \frac{dB}{dr'} = D'$, ecc. Ma l'equazioni, che nascono dal

teorema di *Fontaine*, sono $\frac{dA}{dp} = \frac{dB}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dpdx} = \frac{ddB}{dxdp}, \frac{dA}{dq}$

$= \frac{dC}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dqdx} = \frac{ddB}{dxdq}, \frac{dA}{dr} = \frac{dD}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{drdx} = \frac{ddB}{dxdr}$ ec., $\frac{dA}{dy} = \frac{dA'}{dx}$

cioè $\frac{ddB}{dydx} = \frac{ddB}{dxdy}, \frac{dA}{dp'} = \frac{dB'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dx} = \frac{ddB}{dxdp'}, \frac{dA'}{dq'} = \frac{dC'}{dx}$

cioè $\frac{ddB}{dqdx} = \frac{ddB}{dxdq}, \frac{dA}{dr'} = \frac{dD'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dr' dx} = \frac{ddB}{dxdr'}, \frac{dA'}{dp} = \frac{d(B)}{dy}$

cioè $\frac{ddB}{dpdy} = \frac{ddB}{dydp}, \frac{dA'}{dq} = \frac{dC}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dqdy} = \frac{ddB}{dydq}, \frac{dA}{dr} = \frac{dD}{dy}$ cioè

$\frac{ddB}{drdy} = \frac{ddB}{dydr}, \frac{dA'}{dp'} = \frac{dB'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dpdy} = \frac{ddB}{dydp'}, \frac{dA'}{dq'} = \frac{dC'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dy}$

$= \frac{ddB}{dydq'}, \frac{dA'}{dr'} = \frac{dD'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dy} = \frac{ddB}{dydr'}, \frac{dA}{dq} = \frac{dC}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp}$

$= \frac{ddB}{dpdq}, \frac{d(B)}{dr} = \frac{dD}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{drdp} = \frac{ddB}{dpdr}, \frac{d(B)}{dp'} = \frac{dB'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dpdp}$

$= \frac{ddB}{dpdp'}, \frac{d(B)}{dq'} = \frac{dC'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp} = \frac{ddB}{dpdq'}, \frac{d(B)}{dr'} = \frac{dD'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{drdp}$

$= \frac{ddB}{dpdr'}, \frac{dB'}{dq} = \frac{dC}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp'} = \frac{ddB}{dpdq}, \frac{dB'}{dr} = \frac{dD}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{drdp'}$

$= \frac{ddB}{dpdr}, \frac{dB'}{dq'} = \frac{dC'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dp'} = \frac{ddB}{dp'dq'}, \frac{dB'}{dr'} = \frac{dD'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dp'}$

$= \frac{ddB}{dp'dr'}, \frac{dC}{dr} = \frac{dD}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{drdq} = \frac{ddB}{dqdr}, \frac{dC}{dq} = \frac{dC'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{dqdq} = \frac{ddB}{dqdq'}$,

$\frac{dC}{dr'} = \frac{dD'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{drdq} = \frac{ddB}{dqdr'}, \frac{dC}{dr} = \frac{dD}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{drdq'} = \frac{ddB}{dqdr}, \frac{dC'}{dr'} = \frac{dD'}{dq}$

$= \frac{dD'}{dq'}$ cioè $\frac{ddB}{drdq'} = \frac{ddB}{dqdr'}, \frac{dD}{dr'} = \frac{dD'}{dr}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dr} = \frac{ddB}{drdr'}$ ecc.

In

In conseguenza fa di mestiero che si convenga come le formule di *Condorcet* si risolvano finalmente nel teorema solo di *Fontaine* (a), e lo presuppongano trovato e dimostrato, affine di conseguire e provare ciò, che si ottiene da questo metodo nuovo ed universale.

6. Supposta unicamente provata quell' identità d' equazioni, allora si ricavano subito dalla medesima le formule generali di *Condorcet* per l'equazioni di condizione. E di fatti richiamate l'espressioni e denominazioni dei tre §§. antecedenti 5.° 6.° 7.°, ognun vede che

$$d \frac{dB}{dx} - d \left(\frac{dB}{dx} + d \frac{dB}{dp} \right) + d^2 \left(\frac{dB}{dp} + d \frac{dB}{dq} \right) - d^3 \left(\frac{dB}{dq} + d \frac{dB}{dr} \right) + d^4 \frac{dB}{dr} \text{ ecc.} = 0$$

$$d \frac{dB}{dy} - d \left(\frac{dB}{dy} + d \frac{dB}{dp'} \right) + d^2 \left(\frac{dB}{dp'} + d \frac{dB}{dq'} \right) - d^3 \left(\frac{dB}{dq'} + d \frac{dB}{dr'} \right) + d^4 \frac{dB}{dr'} \text{ ecc.} = 0$$

siano equazioni perfettamente identiche a motivo dell' elisione di tutti i loro termini; e perciò ancora, sostituendo, verranno ad essere identiche in generale l' equazioni

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R + d^4 S - \text{ecc.} = 0$$

$$N - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S' - \text{ecc.} = 0 \quad \text{per qualunque funzione differenziale. Sarà però sempre vero che non arrivi}$$

mai a dimostrarle con tutto il rigore, che esigono le verità matematiche, se non col presupporre il teorema solo di *Leibnitz*, siccome mi ero proposto fin da principio di far conoscere agli Analisti (b). In somma tutto il fondo della scoperta è il N. 4. della pagina 5 dove si stabilisce

$$\frac{dV}{dx dy} = \frac{dV}{dy dx}, \text{ senza del qual teorema precognito le formu-}$$

Tom. V.

T

(a) Si legga il N. 7. del seguente Articolo II.

(b) L' equazioni di condizione sono l'istessa cosa del teorema di *Leibnitz*, ma non così i logaritmi di *Neper*, veramente detti *Neperiani* o *Iperbolici*, e quelli d' *Archimede* come scrive a pag. 72 l'Autore della Dissertazione, che segue l' Elogio di *Amerigo Vespucci* pubblicato in Firenze nel 1788. Difatti i logaritmi d' *Archimede* combinano col sistema di *Briggs*,

sebbene ancor esso immaginato da *Neper*. E poi il Tomo III. delle Opere Matematiche di *Vallis*, dove compare per la prima volta il frammento del libro II. della Collezione di *Pappo*, in cui è riportato il metodo di *Archimede*, vide la pubblica luce nel 1699, quando la scoperta di *Neper* (intendo sempre dei logaritmi veri *Neperiani*, non dei *Briggiani* o *Tavolarij*) è del 1614.

le tutte di *Condorcet* mancherebbono di prova, perchè non contengono la condizione dell' integrabilità della data funzione.

A R T I C O L O I I .

Col solo teorema di Leibnitz, anche diversamente dal metodo generale di M. de Condorcet, si trovano, e si dimostrano le sue equazioni di condizione.

1. Quantunque abbiamo fino ad ora osservato come tutte l'equazioni di condizione dipendano nel nuovo metodo di *Condorcet* dal teorema di *Leibnitz*, e come presupposto unicamente questo, acquistino quella piena dimostrazione, che poi la mai essere desiderata; tuttavolta non pare che le suddette formule nascano dal teorema medesimo con tanta chiarezza e semplicità, quanta dovrelb' esservi seguitando la naturale filiazione d'una cosa dall'altra, che forma il bello dei metodi matematici. Mi muove a così pensarne il vedere che nel caso semplicissimo della funzione differenziale di primo grado $A dx + B dy$ il metodo di *Condorcet*, per conservare la sua generalità, sia obbligato a somministrare due equazioni identiche $N - dP = 0$, $N' - dP' = 0$, la seconda delle quali non è altro che la replica della prima (a), e che l'istesso segua rispetto all'altra funzione parimente di primo grado $A dx + B dy + C du + D dz$, dove in cambio di sei sole equazioni identiche, che darebbe il teorema di *Leibnitz* (perchè a quattro variabili corrispondono solamente $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ binarj)

bisogna soffrire che il metodo di *Condorcet* ne dia quattro $N - dP = 0$, $N' - dP' = 0$, $N'' - dP'' = 0$, $N''' - dP''' = 0$, da cui se ne derivano dodici in apparenza, ma sei nella sostanza come quelle, che tutte si trovano replicate (b). Questa sorte di *pleonafmo* analitico, il quale s'incontrerebbe maggiore facendo il confronto dell'equazioni generali di *Condor-*

(a) Vedasi in fondo della pag. 15 *De Calcul Intégral*.

(b) Pag. 15 al v. 5 e segg.

cei colle particolari dedotte naturalmente dal teorema di *Leibnitz* nel caso di funzioni differenziali di più alto grado del primo, oltrechè diminuisce l'eleganza delle formule, e soggetta il Calcolatore a fare una scelta o riduzione dell'equazioni identiche più semplici, onde separare le primitive e sostanziali dall'altre inutili, che le ripetano puramente, mi sembra ancora accennare ch'abbia da esservi nell'Analisi qualche compenso di risparmiare le repliche nella ricerca dell'equazioni di condizione, e conseguire nulladimeno il medesimo fine.

2. Ho adunque tentato di rintracciare questo compenso, e credo d'averlo trovato. Nè m'ha distolto da tentarlo il sapere che il gran Geometra *Leonardo Euler* nell'*Appendice* al Volume III. delle sue *Instituzioni* di calcolo integrale abbia detto essere appena sperabile trovar mezzo di dimostrare

$$l'equazione generalissima di condizione \quad N \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ec.} = 0$$

perchè sia integrabile $\int V dx$ quando non si ri-

corra, com'egli ha fatto per dimostrarla, al *metodo delle variazioni* applicato alla profonda teoria dei *massimi e minimi* (a). Imperciocchè primieramente avvertivo che senza l'ajuto del *metodo delle variazioni* e dei *massimi e minimi* era riuscito al Marchese de *Condorcet* ricavar quella formula universale, e le sue analoghe, dal puro fondo dell'*Algebra Infinitesimale*, ch'è quanto dire dal solo fonte (sebbene egli non lo pensasse) del teorema di *Fontaine* o sivero di *Leibnitz*, il qual teorema non ha nessuna relazione coi *massimi e minimi*, nè tampoco nessun principio indiretto che perturbi l'ordine naturale del calcolo con alterare la dipendenza e successione delle sue parti, non meno che confonde-

T ij

(a) Questo Matematico sommo scrive così a pag. 520 n. l. §. 26. *Demonstratio hujus Theorematis omnino est singularis, cum ex doctrina variationum sit petita, quæ tamen ab hoc argumento prorsus est aliena: vix vero alia via*

patet ad ejus demonstrationem pertingendi. E sembra che si riporti a ciò ch'egli aveva scritto nel Tomo X. dei *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanae* a pag. 234, pubblicato nel 1766.

re le matematiche astratte colle applicate, siccome fecero gli scrittori principalmente del secolo XVII., cui piacque perfino arricchire inopportuna mente la geometria e l'algebra colle dimostrazioni dedotte dalla scienza dell'equilibrio e del moto (a). Forse mentr' *Euler* scriveva quell' *Appendice*, che si pubblicò nell' anno M. DCC. LXX., o non sapeva che *Condorcet* sino dal M. DCC. LXV. avesse scoperto il metodo diretto di derivare dall' *Analisi* pura l' *equazione di condizione* $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S - \text{ec.} = 0$ come criterio d'integrabilità di *SV*, o non reputava possibile ricavarla, come ho fatt'io, dall'unico teorema di *Leibnitz*.

3. In secondo luogo andavo meco iteno pensando che colla sola inversione dell'ordine tenuto da *Condorcet* nel derivare dal calcolo le sue formule potevan agevolmente ottenere quella semplicità, naturalezza, e dimostrazione, che non ebbero uscendo dalla mente sublime del ch. Autore. Basta che in cambio del metodo *analitico* da lui adoperato venga sostituito il *sintetico*, ed in vece d'essere implicito il teorema di *Fontaine* sia esplicito e scoperto, come conviene al fonte primario, da cui prendono origine tutte quelle equazioni. Allora ogni passo sarà misurato, si vedranno grado a grado nascere chiaramente dalle formule più semplici le più composte, e s'osservierà da chiunque il come e perchè debbano essere necessariamente identiche l' *equazioni di condizione*, nella qual nitidezza e natural progressione d'idee consiste appunto il pregio sommo dei metodi matematici. Ed ecco l'esempio del mio discorso, adattato al solo Problema II. per i motivi addotti nel §. 4. dell' *Articolo I*.

4. Sia $A dx + B dy$ la funzione generale del prim'ordine a due variabili. Il suo diretto differenziale è $dA \cdot dx + A dd x + dB \cdot dy + B ddy$; ed essendo di più $dA = \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy$, come

(a) Anche *M. Cousin* è dell'istesso parere a pag. VI. VII. del discorso preliminare delle sue *Leçons* ecc. Ma di poi a pag. 14. del discorso medesi-

mo, ed a pag. 1 delle *Lezioni* si contraddice coll'introire nelle quantità generali l'elemento del tempo.

parimente $dB = \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}$, diventa dopo fatte le debite so-

stituzioni $\left(\frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy\right)dx + A ddx + \left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy\right)dy$

+ $B ddy$. Secondo il vero differenziale, a cui corrispondono ancora le formule del §. 6. dell' Articolo I., abbiamo

$N = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $P = A$, e parimente $N' = \frac{dA}{dy}dx + \frac{dB}{dx}dy$,

$P' = B$. Adunque, facendosi $(N) = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $(P) = A$,

$(N') = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $(P') = B$, otterremo le due funzioni

$Ndx + Ndy + Pddx + P'ddy$ le quali debbono essere identi-

che, e per esserlo conviene solo che sia identica l'equazione

$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. Ma ora si torni a vedere che per mezzo del di-

retto ed immediato differenziale $(N)dx + (P)ddx + (N')dy$

+ $(P')ddy$ o li vero $dA \cdot dx + A ddx + dB \cdot dy + B ddy$ conse-

guirebbero sempre l'equazione identica (inconcludente ed inu-

tile) $dA - dA + dB - dB = 0$, cioè $(N) - d(P) + (N') - d(P') = 0$,

come quella che non si parte dalla condizione d'integrabilità della data funzione $A dx + B dy$. Affine di cambiare que-

sta immediata, ma vana, equazione identica nell'altra equa-

zione identica utile $N - dP + N' - dP' = 0$, a cui si riporta

il metodo di *Condorcet*. bisogna introdurvi la condizione dell'

integrabilità della funzione data $A dx + B dy$, la qual condizio-

ne importa, come abbiám visto, la sola equazione identica

$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ o sia $\frac{ddV}{dydx} = \frac{ddV}{dxdy}$, ch'è il teorema di *Leibnitz*.

E qui avverto primieramente essere di tal natura l'equazio-

ne identica $dA - dA + dB - dB = 0$ che divisi in due dA

$- dA = 0$, $dB - dB = 0$ indipendenti affatto l'una dall'altra

a motivo della nessuna relazione supposta tra le variabili x ,

y , o loro differenziali. In secondo luogo rifletto come per il teorema d'altronde noto di *Leibnitz* non essendovi luogo che alla sola condizione $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, debbano con questa sola necessariamente verificarsi ambedue l'equazioni identiche $N - dP = 0$, $N' - dP' = 0$ assegnate per criterio dell'integrabilità da *Condorcet*, ed altri Analisti.

5. Passando adesso a ragionare delle funzioni differenziali di second'ordine comprese nella formula generale $Adx^2 + Bdx dy + Cdy^2 + Dddx + Eddy$, e fattevi per comodo di calcolo le sostituzioni di $p = dx$, $p' = dy$, onde la funzione data si trasformi nell'altra $Fdx + Gdy + Hdp + Idp'$, dove F, G, H, I rappresentano funzioni delle quattro variabili x, y, p, p' , è certo che avremo per differenziale della medesima

$$dF \cdot dx + Fdp + dH \cdot dp + Hddp \quad \text{ovvero} \quad dF \cdot dx + (F + dH) dp + Hddp \\ + dG \cdot dy + Gdp' + dI \cdot dp' + Idp'p' \quad + dG \cdot dy + (G + dI dp') + Idp'p' \\ \text{o sia} \quad (N)dx + (P)dp + (Q)ddp. \quad \text{Da ciò viene ad essere manifesto} \\ + (N')dy + (P')dp' + (Q')ddp'$$

che siccome sono identiche intuitivamente, e di loro natura ambedue l'equazioni

$$dF - (dF + dH) + dH = 0, \quad dG = (dG + dI) = 0,$$

debbero ancora godere dell'istessa identità le due altre equazioni

$$(N) - d(P) + d^2(Q) = 0, \quad (N') - d(P') + d^2(Q') = 0.$$

Queste equazioni identiche si verifican sempre, nè servono di criterio dell'integrabilità della formula data. Per ottenerlo, e trovare a questo effetto le due altre equazioni identiche, che siano il criterio dell'integrabilità, convien partire dal teorema di *Fontaine*, il quale, relativamente alla data formula $Fdx + Gdy + Hdp + Idp'$, somministra le sei equazioni

$$\text{identiche} \quad \frac{dF}{dy} = \frac{dG}{dx}, \quad \frac{dF}{dp} = \frac{dH}{dx}, \quad \frac{dF}{dp'} = \frac{dI}{dx}, \quad \frac{dG}{dp} = \frac{dH}{dy}, \quad \frac{dG}{dp'} = \frac{dI}{dy},$$

$$\frac{dH}{dp'} = \frac{dI}{dp}. \quad \text{Adunque essendo} \quad dF - dF - d^2H + d^2H = \left(\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dp} dp \right)$$

$$+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dp}dp')-\left(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dp}dp+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dp}dp'\right)-d\left(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp\right. \\ \left.+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp}dp'\right)+d\left(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp}dp'\right)=0, \text{ s'avrà pari-}$$

$$\text{mente } \left(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dH}{dx}dp+\frac{dG}{dx}dy+\frac{dI}{dx}dp'\right)-\left(dF+d\left(\frac{dF}{dp}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dG}{dp}dy\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{dI}{dp}dp'\right)\right)+d\left(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp}dp'\right)=0, \text{ cioè le due fun-}$$

zioni, una considerata di sopra $(N) - d(P) + d^2(Q)$, e l'altra $N - dP + d^2Q$ differisce secondo il vero differenziale, comprovato altresì dalle formole spiegate nel §. 6. dell' Articolo I., faranno termine a termine perfettamente identiche. Di qui ne nasce che dal differenziale immediato ed indentico $(N) - d(P) + d^2(Q) = 0$ derivi la prova dell'identità dell'altro differenziale utile e vero $N - dP + d^2Q = 0$, ch'è appunto l'equazione di condizione assegnata da Condorcet. Col medesimo metodo conseguirebbero $dG - dG - d^2I + d^2I = (N)' - d(P)'$

$$+ d^2(Q)' = 0 = \left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp}dp'\right) - \left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp\right. \\ \left. + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp}dp'\right) - d\left(\frac{dI}{dx}dx + \frac{dI}{dp}dp + \frac{dI}{dy}dy + \frac{dI}{dp}dp'\right) + d\left(\frac{dI}{dx}dx + \frac{dI}{dp}dp\right. \\ \left. + \frac{dI}{dy}dy + \frac{dI}{dp}dp'\right) = \left(\frac{dF}{dy}dx + \frac{dH}{dy}dp + \frac{dG}{dy}dy + \frac{dI}{dy}dp'\right) - \left(dG + d\left(\frac{dF}{dp}dx\right.\right. \\ \left.\left. + \frac{dH}{dp}dp + \frac{dG}{dp}dy + \frac{dI}{dp}dp'\right)\right) + d\left(\frac{dI}{dx}dx + \frac{dI}{dp}dp + \frac{dI}{dy}dy + \frac{dI}{dp}dp'\right) = N - dP$$

+ $d^2Q = 0$ secondo il vero differenziale, come confermano le solite formole del §. 6. sopraccitato. E si potrebbe proceder più oltre senza maggiore difficoltà alle funzioni degli altri gradi se i limiti di questo scritto lo permettenessero.

6. In somma principia il mio metodo da far vedere che il differenziale *immediato* di qualunque data funzione, o integrabile, o no, debba sempre condurre ad un'equazione identica per ciascheduna delle variabili x, y ec. Fa dipoi l'altro passo importante, ed è quello che posto in ordine il differenziale medesimo (che gioverebbe dopo di ciò chiamare

re *mediato*) secondo dx , d^2x ec., dy , d^2y ec., abbiati nel solo caso dell' integrabilità della funzione assegnata, cioè nell'unico caso che si verifichi a tutti i riguardi il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, ognuna dell' equazioni identiche summentovate precisamente l' istessa (termine a termine) di quella di *Condorcet*, nella quale si viene allora a rendere manifesto che debba consistere il criterio della possibilità dell' integrazione. Con questa differenza però che mentre il criterio dell' integrabilità dedotto dal puro teorema di *Fontaine* risparmia le repliche dell' equazioni identiche, come s'è veduto poc' anzi nei §§. 4, e 5, l' altro criterio riduca l' equazioni identiche di *condizione* a minor numero delle prime (a), e comprenda speso più coperte ed involuppate le formule di *Fontaine* (b). Il primo risale dall' equazioni identiche di *Fontaine* all' equazioni identiche di *Condorcet*, e scuoprendo, e misurando, e dimostrando ogni passo, che faccia, conduce a vedere che le seconde dipendano dalle prime. Il secondo discende dall' equazioni identiche di *Fontaine*, ma coperte e nascoste, all' equazioni di *condizione* che sono il soggetto principale della bellissima opera di *Condorcet*, e senza discuoprire e disciferare le formule di *Fontaine* mancherebbe di prova (c). Perchè questo parallelo dei due metodi, uno diretto, e l' altro inverso, si scorra ancora meglio e nel massimo lume, vediamo nella maniera più generale, ed invertendo soltanto il cammino tenuto da *Condorcet* (d).

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s + \text{ec.}$$

$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \text{ec.}$$

Dunque

(a) Ciò si conosce facilmente sino dalla *Remarque* III. del III. Problema dove son quattro l' equazioni identiche, in cambio di sei che dà il metodo di *Fontaine*.

(b) Basta fare il parallelo dei N. 8. e 9. dell' Articolo I.

(c) Ciò vuol dire che $V = dB$, e

$dV = dB$, non sono equazioni valide a determinare il Problema dell' integrabilità di V , come suppone questo celebre Autore.

(d) Confrontisi particolarmente nel metodo, che segue, il proceder del calcolo con quello del II. Problema.

$$\begin{aligned}
 \text{Dunque } dV = & d \frac{dB}{dx} p + d \frac{dB}{dx} q + d \frac{dB}{dp} r + d \frac{dB}{dq} s + d \frac{dB}{dr} t + \text{ec.} \\
 & + d \frac{dB}{dp} q + d \frac{dB}{dq} r + d \frac{dB}{dr} s + \text{ec.} \\
 & + d \frac{dB}{dy} p' + d \frac{dB}{dy} q' + d \frac{dB}{dp'} r' + d \frac{dB}{dq'} s' + d \frac{dB}{dr'} t' + \text{ec.} \\
 & + d \frac{dB}{dp'} q' + d \frac{dB}{dq'} r' + d \frac{dB}{dr'} s' + \text{ec.}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} dV = \\ + d \frac{dB}{dp} q + d \frac{dB}{dq} r + d \frac{dB}{dr} s + \text{ec.} \\ + d \frac{dB}{dy} p' + d \frac{dB}{dy} q' + d \frac{dB}{dp'} r' + d \frac{dB}{dq'} s' + d \frac{dB}{dr'} t' + \text{ec.} \\ + d \frac{dB}{dp'} q' + d \frac{dB}{dq'} r' + d \frac{dB}{dr'} s' + \text{ec.} \end{aligned}} \right\} \text{differ. immed.}$$

ch' è come dire $(N) - d(P) + d^2(Q) - d^3(R) \text{ ec.} = 0$
 $(N)' - d(P)' + d^2(Q)' - d^3(R)' \text{ ec.} = 0$ equazioni

identiche, le quali equazioni intuitivamente identiche, quando col foccorfo unico delle formule di *Fontaine* vi siano sur-

rogate in cambio di $d \frac{dB}{dx}, d \frac{dB}{dp}, d \frac{dB}{dq}, d \frac{dB}{dr}$ ecc. $d \frac{dB}{dy}, d \frac{dB}{dp'}$,

$d \frac{dB}{dq'}, d \frac{dB}{dr'}$ ecc. le loro espressioni identiche, che risultano dal

§. 8. dell'Articolo I., si convertono nelle vere ed utili equazioni di condizione $N - dP + d^2Q - d^3R + \text{ec.} = 0$

$N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + \text{ec.} = 0$, come spiegano con tutta chiarezza i differenzio-differenziali di *B* nell'Articolo I. al §. 6. (a).

7. Che poi tutte l'equazioni di condizione assegnate da *M. Fontaine* siano in sostanza la sola formula data da *Leibnitz*, e che questa sia un teorema, e non già proposizione intuitiva, ognuno lo sa per poco che sappia l'istoria del calcolo differenziale e integrale. E difatti il teorema III. delle *Memoires* di *Fontaine* a pag. 26., il quale si riferisce alla funzione semplicissima di due variabili $A dx + B dy$ differenziale del primo grado, è quello, sopra di cui si sostengono tutte l'equazioni di condizione da lui spiegate nel suo *Premiere*

Tom. V.

V

(a) Gli chiamo differenzio-differenziali relativamente alla funzione *B*, ma in rigore possono ben essere dif-

ferenze terze, quarte ecc. se la funzione data *V* fosse di secondo, di terzo grado ecc.

Methodes fino alla pag. 84. Sebbene il ch. Autore applichi quel teorema all'equazioni differenziali di varj ordini, e non alle funzioni, tuttavia è facile argomentare dalla dimostrazione del Teorema IV, e suo Corollario a pag. 27., che per mezzo del fattore e coefficiente M , comune a tutti i termini, l'equazione diventi funzione di qualunque numero di variabili, e di qualunque grado (a). Ma il precitato Teorema III., che somministra il criterio dell'integrabilità della funzione $A dx + B dy$ mediante l'equazione identica $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, deriva immediatamente dal teorema di *Leibnitz*, il quale stabilisce e dimostra che mentre s'abbia $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \cdot dx$, dove a, x siano due variabili del tutto indipendenti tra loro, venga ad essere $d \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \cdot dx$ facendo solamente variabile a , o sivero la differenza parziale $\frac{d \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \cdot dx}{da}$

$$= \frac{ada \cdot dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}},$$

ed in generale s'ottenga coll'istesso principio dato da *Leibnitz* $\frac{df \circ dx}{dy} = \frac{dy \circ d\mu}{dy} dx$. Ora da quest'ultima equazione deriva appunto l'altra $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, siccome dimostra il confronto dei Teoremi II. e III. dell'istesso *Fontaine*. Tanto è ciò vero, quanto che gli Analisti quasi tutti, i quali hanno dovuto provare nelle loro opere l'equazioni di condizione, l'appoggino al prenotato teorema di *Leibnitz*. Di quelli, che ho adesso sott'occhio, li riscontrino la *Memoria* di M. *Clairaut* tra l'altre dell'Accademia Reale delle Scienze di

(a) L'istesso ho detto relativamente al metodo tenuto da *Condorcet* nel num. 4. dell'Articolo I.

Parigi nel volume per l'anno M. DCC. XL., pubblicato nel XLII., dove tratta dell'integrazione dell'equazioni differenziali di primo grado, e particolarmente ai §§. II. della Parte I., e VIII. del Cap. I. della Parte II., il *Traité du Calcul Integral* par M. de *Bougainville* Parte II. Sez. I. Cap. II. ai §§. XV. XVIII. e XXVIII., le *Institutiones Analyticae* di *Riccati* e *Saladini* al Lib. II. del Tomo II. Cap. XIII. §. 2. e segg., e le *Leçons de calcul différentiel & de calcul integral* par M. *Cousin*, impressè a Parigi nel M. DCC. LXXVII., segnatamente ai N. 52. del Cap. V. a p. 255. 264., e 58. del Cap. VI. a pag. 329. e 330. E riguardo a quei Matematici, ch' hanno voluto per dimostrare il teorema di *Fontaine* discostarsi da quello di *Leibnitz*, come per esempio *Leonardo Euler* nella Parte I. p. 191. e segg. delle *Institutiones calculi differentialis*, I PP. Minimi le *Seur* e *Jacquier* nel Cap. I. della Parte I. al §. XXIX. e segg. pag. 27. e segg. degli *Elemens du calcul integral*, e l'istesso *Cousin* nelle *Lezioni* pre-citate (Parte I. Cap. III. p. 83. e seg.) (a), li veda quanto più operosa e meno chiara comparisca la loro dimostrazione. Intanto non si può a meno di non inferirne come nel medesimo modo che non si sarebbe potuto mai indovinare che dall' *Aritmetica degli Infiniti* di *Wallis* l'Algebra infinitesimale fosse stata per essere nel corso d'un secolo condotta a così alto segno da produrre le *Instituzioni di calcolo differenziale* dell' *Euler* (b), egualmente non si potesse mai far prognostico ragionevole che il teorema di *Leibnitz*, il quale nasce dall'applicazione felice dell'assioma *il tutto è uguale alla somma delle sue parti*, avesse dovuto dar nascita alle differenze parziali, all'equazioni di condizione, ed al calcolo delle variazioni (c) in meno d'un secolo (d).

V ij

(a) Quantunque sia qui il primo luogo dove incominci a parlarne.

(b) L' *Aritmetica ecc.* è del 1655. (sebene la data sia del 1656.), e le *Instituzioni ecc.* sono del 1755.

(c) Num. 5. del seg. Articolo III.

(d) Quel teorema è del 1697., mentre il metodo di M. de la *Grenge* fu fatto di ragion pubblica nel 1762.

A R T I C O L O I I I .

*D'alcuni altri teoremi sparsi nell'opera del Marchese
de Condorcet.*

1. Avanti di tutto gioverà sperimentare il metodo adoperato nell'Articolo precedente, ch'è l'inverso di quello di *Condorcet*, per conseguire la prova del teorema bellissimo, il quale si trova nella *Remarque II.* a pag. 21. del IV. Problema.

2. Sia perciò V una funzione integrabile, ed il suo integrale sia una funzione differenziale del grado prossimamente inferiore. L'espressione generale farà questa

$$\begin{aligned}
 & dA.d\alpha + Adp + Bdq + Ddr \text{ ec.} \\
 V = & Ad\alpha + Bdp + Cdq + \text{ec.}, \text{ laonde } dV = & +dBdp + dCdq \\
 & +A'dy + B'dp' + C'dq' + \text{ec.} & +dA'dy + Adp' + B'dq' + D'dr' \text{ ec.} \\
 & & +dB'dp' + dC'dq'
 \end{aligned}$$

Ma in virtù del II. Articolo

$$dA = N, A + dB = P, B + dC = Q, C + dD = R, \text{ ecc.}$$

$$dA' = N, A' + dB' = P', B' + dC' = Q', C' + dD' = R', \text{ ecc.}$$

Adunque

$$N = dP - d^2Q + d^3R - d^4S \text{ ec.} = dA, \text{ onde } A = P - dQ + d^2R - d^3S \text{ ec.}$$

$$N = dP' - d^2Q' + d^3R' - d^4S' \text{ ec.} = dA' \quad A' = P' - dQ' + d^2R' - d^3S' \text{ ec.}$$

Parimente

$$A + dB = P, \text{ e perciò } dB = dQ - d^2R + d^3S \text{ ec.}, B = Q - dR + d^2S \text{ ec.}$$

$$A' + dB' = P' \quad dB' = dQ' - d^2R' + d^3S' \text{ ec.}, B' = Q' - dR' + d^2S' \text{ ec.}$$

$$B + dC = Q \quad dC = dR - d^2S \text{ ec.}, C = R - dS \text{ ec.}$$

$$B' + dC' = Q' \quad dC' = dR' - d^2S' \text{ ec.}, C' = R' - dS' \text{ ec.}$$

$$C + dD = R \quad dD = dS \text{ ec.}, D = S \text{ ec.}$$

$$C' + dD' = R' \quad dD' = dS' \text{ ec.}, D' = S' \text{ ec.}$$

Cumulando, ed ordinando le ritrovate espressioni, ne nasce

$$\begin{aligned}
 V = A dx + B dp + C dq + D dr \text{ ec.} = & (P - dQ + d^2R - d^3S \text{ ec.}) dx \\
 & + A' dy + B' dp' + C' dq' + D' dr' \text{ ec.} + (Q - dR + d^2S \text{ ec.} \dots) dp \\
 & + (R - dS \text{ ec.} \dots \dots \dots) dq \\
 & + (S' \text{ ec.} \dots \dots \dots) dr \\
 & + (\text{ec.} \dots \dots \dots) \\
 & + (P' - dQ' + d^2R' - d^3S' \text{ ec.}) dy \\
 & + (Q' - dR' + d^2S' \text{ ec.} \dots \dots) dp' \\
 & + (R' - dS' \text{ ec.} \dots \dots \dots) dq' \\
 & + (S' \text{ ec.} \dots \dots \dots) dr' \\
 & + (\text{ec.} \dots \dots \dots)
 \end{aligned}$$

ch'è appunto il teorema da dimostrarsi (a).

3. Altro teorema, ed ancor più elegante, si è quello della *Remarque IV.* dopo il III. *Problema.* *Condorcet* ha qui per oggetto di rintracciare il motivo *analitico*, in virtù del quale le medesime *equazioni di condizione*, che danno l'integrabilità della funzione $\int V$, diano ancora il *massimo* o *minimo* di $\int V$. Le due questioni non appariscono analoghe; e perciò non mancano di presentare ai Geometri un fenomeno raro, che non può a meno di non avere per causa la vera e reale *identità analitica* dei due problemi. Dopo le formule date da M. de la Grange, l'*Euler* spiegò indirettamente questa coincidenza di formule (b), ed il Marchese *de Condorcet*, ch'è stato il primo di tutti a spiegarla in una maniera diretta, lo fa di tal sorte che sembri troppo elaborato e profondo il suo metodo (c). Ciò mi ha dato motivo di pensare a semplificarlo, e dicifrare quell'*identità analitica* in una forma, che sia facile, chiara, ed a portata di tutti.

4. Io la discorro così

$$\int V = \iint dV = \iint N dx + P dp + Q dq + Q dr + \text{ec.} \\
 + N dy + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \text{ec.}$$

(a) Si vedano le *Lezioni* di M. *Confin* nella I. Parte a pag. 108.

(b) Si contuli il Tom. X. dei *Nuovi Commentarj* dell' *Accademia di Pie-*

troburgo alle pag. 133. 34. come ho avvertito nella Nota (a) pag. 127.

(c) Lo contengono le pag. 16. 17. e 18.

Per il *massimo* o *minimo* dev' essere

$$\delta \iint Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + ec. + Ndy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + ec. = 0 . \text{ L'equazione}$$

o equazioni che determinino il *massimo* o *minimo*, qualunque elle siano per essere (che non importa adesso cercarle), devono avere necessariamente questi due requisiti, 1°. cioè hanno da esser composte (nè ora giova di saper come) di $N, P, Q, R, ec., N, P', Q', R', ec.$ e loro differenziali, 2°. hanno da essere le medesime e della medesima forma tanto nel caso che $\int V$ sia integrabile, quanto nell'altro che non lo sia, perchè nella risoluzione generale del problema del *massimo* o *minimo* l'Analisi non riguarda, nè deve mai riguardare se $\int V$ sia funzione integrabile, o piuttosto un integrale *indefinito*. Ecco come l'equazione o equazioni di $\delta \int V = 0$ ha d'*analitica* necessità che debbano essere perfettamente conformi nelle due ipotesi, colla sola differenza che $\int V$ non essendo integrabile, quell'equazione o equazioni non saranno identiche, ma stabiliranno la relazione tra le variabili $x, y, ec.$ della curva superficie *ec.*, a cui s'etti il *massimo* o *minimo* (a), e nel caso contrario di $\int V$ integrabile, quell'equazione o equazioni saranno *identiche*, perchè esclusive del *massimo* o *minimo*.

5. Anzi di qui si deduce che senza l'ajuto del metodo eccellente adoperato dall'*Euler* nella sua grand'Opera pubblicata del M. DCC. XLIV. intorno il problema degli Iperimetri (b), e senza il soccorso del Calcolo delle variazioni perfezionato da M. de la Grange (c), col teorema solo di *Lebnitz* o di *Fontaine* si potessero sciogliere tutti i problemi de' *massimi* e *minimi*. Imperocchè, siccome questo teo-

(a) Pare che Condorcet a pag. 17. v. 9. coll'espressione *qui doit être identique* dia a credere d'aver supposto che l'equazione determinante il *massimo* o *minimo* abbia ancor essa da essere *identica*, cioè debba essere $0=0$, quando al contrario deve fissare la relazione tra le variabili

(b) Intendo di quella intitolata *Methodus inveniendi Lineas curvas ma-*

ximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio Problematis Iperimetrici latissimo sensu accepti.

(c) *Tomus alter* delle Miscellanee di Torino.

Ne tolgono pregio a questa bella parte del calcolo le Osservazioni fatte dal Cav. de *Borda* nel Tomo delle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1767.

rema a forma delle prove datene nell' Articolo II. ha prodotte l'equazioni identiche $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S$ ec., $N - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$ ec. $= 0$ nel caso di $\int V$ integrabile, così in virtù del precedente num. 4°. le medesime equazioni $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S$ ec., $N - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$ ec., ec. $= 0$ son quelle che non altrimenti identiche risolvano ancora il problema di $\int V$ massimo o minimo quando $\int V$ non ammetta integrazione. Questo è un nuovo lustro ed elogio dell'importanza, universalità, e fecondità somma del teorema di *Lebnitz*; per modo che mentr' *Euler* credeva di dover derivare l'equazioni di condizione da quelle dei massimi e minimi (a), io abbia fatto conoscere per il contrario che le seconde si derivino dalle prime (b). Tanto è vero che un ritrovato solo d'un uomo grande faccia spesso cambiar d'aspetto le scienze, e le arti.

6. Taluna volta accade perfino che certi problemi di massimi o minimi non abbiano di bisogno di tutto l'apparato sublime del calcolo delle variazioni, e si risolvano senza di questo colla maggiore semplicità. Ero nella mia adolescenza, nè avevo sentore alcuno del metodo nuovo di *M. de la Grange* quando leggendo nei loro fonti le tante ed operose soluzioni, parte dirette, parte indirette, del famoso problema della curva *brachistocrona*, o come altri la chiamano *oligocrona*, mi venne in pensiero di scioglierlo col solito calcolo differenziale. Tentai la cosa più per ischerzo che per la speranza d'una felice riuscita, ben prevedendo che quel problema non si potesse, nè si dovesse trattare come il massimo o minimo d'una curva data, ma d'una curva variabile all'infinito. E poi se fosse stato possibile, l'avrebbero così risoluto prima di me i sommi Analisti *Bernoulli*, *Newton*, *Leibnitz*, e *Marchese de l'Hôpital*. Tuttavolta il fatto fu che il tentativo riescisse (c).

7. Mi provai dunque nella supposizione Galileana della

(a) Vedaſi il n. 2 dell' Articolo II.

(b) Dal teorema di *Leibnitz* ſi deducono ancora (ved. Nota 3.) le formule conoſciute del metodo delle va-

riazioni $\int f B dx = \int f B dx = \int f B dx$, perchè tutte dipendono da $\int B dx = \int B dx$.

(c) M' accadde d' oſervarlo nel 1764.

gravità costante a risolverlo, facendo $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=0$; e posto per comodo di calcolo dy costante, ottenni subito $\frac{dx \cdot d^2x \cdot \sqrt{x}}{2x\sqrt{dx^2+dy^2}} = dx \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{2x\sqrt{x}}$, che vale a dire $2x = \frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$.

Avvertii facilmente come essendo $\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$ l'espressione ge-

nerale del *Cor Raggio osculatore* (a), veniva questo ad esser duplo dell'ordinata x , ch'è appunto la proprietà della Cicloide primaria inversa, ch'abbia l'estremo della sua base orizzontale nel punto più alto dei due, per cui debba passare l'arco della Brachistocrona ricercata. Credendo che ciò derivasse da una combinazione meramente casuale, passai a sperimentare l'istesso metodo nell'ipotesi di gravità di *Gio. Battista Baliani*, sebbene impossibile e assurda. Allora s'ave-

va $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=0$, cioè $\frac{x dx d^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \sqrt{dx^2+dy^2} dx$, cioè

$x = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}$, o sia il *Cor Raggio osculatore* eguale all'or-

dinata, ch'è quanto dire la Brachistocrona un arco inverso di circolo (b). Andai più avanti, ma non volli altrimenti fidar-

(a) *Analyse des infiniment petits* par de l'Hopital ediz. a' Avignone del 1768. a pag. 106.

(b) M. Montucla nel Tomo II. della sua *Histoire ecc.* a pag. 453. 457. accusa il Galileo per aver supposto la Brachistocrona essere una porzione della periferia circolare. Questo è uno sbaglio pari all'altro, ch'ei fa a pag. 426. 47., rispetto alla Catenaria, dove afferma che il Galileo la suppone l'istessa della parabola Apolloniana. Ho dimostrato l'opposto nella mia Opera prenoche tutta stampata intorno i *Solidi Coelestis*. Oserò però che quanto son perdonabile agli Ombra-

montani degli errori d'istoria sul Galileo, altrettanto non siano scusabili per l'Italia. In un libro d'Elogi d'illustri Italiani stampato a Pisa nel 1784 parlando di Galileo (*Elogio del Perelli*) si dice a pag. 54. „in quella scuola, (dello Studio di Pisa) in cui il Galileo aveva il primo..... annunziato tante sue celesti scoperte, e l'uso mirabile per „ la Geografia e Nautica di quelle dei Satelliti di Giove. „ Eppure ognun sa che quasi tutte le scoperte celesti del Galileo fossero fatte nel 1609. e 1610 nello Studio di Padova, e non in quello di Pisa, ch'egli aveva lasciato fino dal 1592. senza

Adarmi del mio risultato. Lo mostrai immantinente al mio grande amico Cav. *Felice Fontana*, e ne rimase ancor egli sorpreso (a). Adesso però egli è ben facile ravvifare il preciso motivo, per cui da quel metodo falso nascessero delle Brachistocrone vere.

8. Difatti, prevalendoci della legge di *Galileo*, $\frac{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$

dev'essere un *minimo*. Pongasi ora costante dx . Dal teorema di *Leibnitz* a forma del num. 5°. conseguiremo $N - dP' + d^2Q' - d^3R' + \text{ec.} = 0$; ed essendo $Q', R' \text{ ec.} = 0$ per la natura della formula data, e di più ancora $N = 0$, converrà unicamente fermarsi a considerare dP' , che in questo caso, avendosi

$P' = \frac{dy}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2}}$ (b) somministra l'equazione $-dP'$

$= 0$, o si vero (fatto per comodo dy costante) $dP' = 0$

$= -\frac{1}{2x} - \frac{d^2x}{dx^2 + dy^2}$, di dove si ricava $2x = \frac{dx^2 + dy^2}{-d^2x}$. Parimente

furrogata l'ipotesi del *Baliani*, viene ad essere per

l'istessa ragione $P' = \frac{dy}{x \sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e perciò $dP' = 0 = -\frac{1}{x}$

$-\frac{d^2x}{dx^2 + dy^2}$, ed in conseguenza $x = \frac{dx^2 + dy^2}{-d^2x}$. Di qui n'av-

viene che tanto $dP' = 0 = d \left(\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2}} \right)$, quanto d

Tom. V.

X

più ritornarvi. Quando l'Elogiografo non avesse avuto in pensiero quel titolo meramente d'onore di Matematico primario dello Studio di Pisa senza resto di leggervi, nè ritedervi, ch'ebbe tra gli altri il gran *Galileo* sino dal mese di Luglio del 1610. richiamato da Padova dal Gran Duca *Cosimo II*. Ma allora la frase istorica meriterebbe uno schiarimento.

(a) Ben volentieri palefo qui al

mondo la gratitudine ch'io debbo a questo Filosofo insigne, come quello che mi ha dato più volte e comodo e coraggio per applicarmi alle Matematiche, quando specialmente attendevo in Pisa allo Studio della Filosofia delle Leggi.

(b) Si consulti *M. Cousin* nella prima parte delle *Lezioni* precitate a pag. 547. 48.

$$\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}} \right) = 0, \text{ come ancora } dP' = d\left(\frac{1}{x\sqrt{dx^2+dy^2}} \right) = 0,$$

$$\text{e } d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x} \right) = 0 \text{ conducendo rispettivamente ad una me-}$$

desima equazione tra le variabili x, y , s'intenda perchè il problema della Brachistocrona riceva la sua soluzione dal

$$\text{semplice differenziale } d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}} \right) = 0, d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x} \right) = 0.$$

Nè potrebb'essere diversamente: imperocchè in generale tan-

$$\text{to } d\left(\frac{z}{v} \right) = 0, \text{ quanto } d\left(\frac{1}{vz} \right) = 0 \text{ danno l'istessa equazione}$$

finale $v dz = \pm z dv$. E ciò fa conoscere che il problema della Brachistocrona risolverebbesi sempre col medesimo metodo semplicissimo in qualunque ipotesi di gravità, dove la velocità della caduta venisse universalmente rappresentata da $\sqrt{x}$, funzione qualunque di x . La sola divergenza, che si trovi, consiste nell'essere il secondo membro dell'equazione positivo in un caso, e negativo nell'altro, lo che appare ancora dal paragone del *Cor Raggio* trovato in questo §. coll'altro trovato nel §. antecedente. Ma di queste singolarissime soluzioni d'alcuni problemi di *massimi* o *minimi*, non meno che d'alcune particolarità interessanti del metodo delle variazioni, e del rimanente dell'Opera sul *calcolo integrale* del Marchese de *Condorcet* avrò in altro tempo occasione d'esporre al pubblico i miei pensieri.



SULLE RIVOLUZIONI

DEL GLOBO TERRESTRE PROVENIENTI DALL'AZIONE
DELL' ACQUE.

MEMORIA GEOLOGICA

DI ERMENEGILDO PINI

PROEMIO.

Non sì tosto il gusto mineralogico penetrò anche nella Finca che molti si applicarono ad esaminare la fisica costituzione della terra. Le osservazioni però sinora fattevi sono ancora poche in confronto della vastità del globo terrestre; e tra quelle, che sinora furono prodotte, pochissime possono meritare la confidenza de' studiosi della natura. Perciocchè molti osservarono senza principj; altri produssero come generali quelle osservazioni che erano particolari a piccoli tratti; tutti finalmente, se pochissimi se ne eccettuino, mancano nella loro esposizione di quei dettagli che soli possono presentare ad un ragionatore i dati per farne un'atta applicazione.

In ogni modo sul fondamento di così scarse ed imperfette osservazioni molti si affrettarono a fabbricare de' sistemi geologici: onde non è maraviglia se al primo loro sorere rovinarono; nè per altro motivo quello immaginato dal Sig. *Conte di Buffon* ha ancora nella mente di alcuni qualche sussistenza se non in quanto che egli seppe colla decorazione rendere apprezzevole un edificio altronde rovinoso. Egli degli altri più animoso non solo formò una teoria della terra, ma spinse in oltre le sue specolazioni a stabilire le epoche della natura, pretendendo di appoggiarle ai monumenti residui della natura medesima, come a Diplomi i più autentici. Chi però si applica ad esaminare il corpo di questa sua

nuova Diplomatica sentenì tentato a paragonare questo leggiadro Interprete della natura ad un destro Notajo, il quale fu istromenti apocrifi, o confunti, e non intenì tessè la genealogia di una famiglia che non mai esistette, e cerca di renderla plausibile col presentarla in un albero elegantemente diramato e vagamente colorito. (a)

Certamente le tre osservazioni fondamentali, su cui egli appoggia la sua teoria, sono ora generalmente riconosciute per false, e le altre accessorie o non sono vere, o non sono concludenti. Per lo che la Geologia, così come altre scienze fisiche, non altro finora sembra essere che un pelago di opinioni, in cui rare verità ondeggiano, nè in altro modo si può aumentare il numero di queste, se non cominciando dal rettificare le osservazioni.

Ogni osservazione geologica si riduce a riconoscere lo stato che ha una data porzione della superficie terrestre nel tempo che si osserva. Qualunque stato presente di questa superficie è il risultato di qualche variazione che vi è intervenuta; e le variazioni possono essere state prodotte da molteplici cagioni, come sono l'azione del fuoco, dell'acqua, e simili. Il determinare la cagione, o anzi il complesso delle cagioni che produsse una data variazione, e l'assegnare la mutua influenza di una variazione nell'altra, e la loro successione, sono gli oggetti di una teoria geologica; e poichè questa sulle osservazioni dee essere appoggiata, perciò, affinchè possa corrispondere al vero, è necessario che essa non si estenda più di quel che le osservazioni stesse comportano. Quelle, che fino a' nostri giorni furono fatte, sembrano oramai sufficienti per decidere che il globo, dappoichè cominciò ad essere abitato da esseri organizzati, fu soggetto ad una generale inondazione, e per determinare se questa sia stata o permanente, o passeggera. A tale oggetto

(a) Quanto arbitrarie sieno le ipotesi annate dal *Conte di Bufon* su tale oggetto si può riconoscere dalle osservazioni, che alle Epoche della natura fece uno de' più grandi, e più favoloseggi del secolo nostro l'Eminentissimo *Cardinale Gerdil*: come pure dal suo

esame dei sistemi relativi all'antichità del mondo: i quali due scritti sono inseriti nelle di lui opere stampate in Bologna. Quanto vacillino le ipotesi stesse nella parte astronomica fu dimostrato dal sublime Calcolatore *M. de Séjour*. *Essai sur les Cometes*.

è diretta questa Memoria che è divisa in due parti, delle quali la prima contiene le relative osservazioni rettificcate; la seconda si rivolgerà a determinare l'inondazione, a cui devonli ascrivere le principali rivoluzioni che si riconoscono intervenute nel globo terrestre.

P A R T E P R I M A .

Osservazioni sulla presente costituzione della superficie terrestre.

La terra, che da un Geologo può essere esaminata, si riduce soltanto a quella porzione, che dalla sommità dei monti si stende al più fino al fondo dei mari, e questa porzione può riguardarsi come la superficie geologica. Il rimanente, che stendesi a maggiori profondità, non è accessibile alle sue osservazioni, e però non deve formare un oggetto delle sue ricerche. La configurazione di questa superficie, le materie di cui è composta, la disposizione che queste vi hanno, e simili sono gli oggetti, che egli deve distintamente riconoscere; e dal complesso delle sue osservazioni potrà determinare quali cangiamenti vi sieno intervenuti, e da quali cagioni sieno derivati.

C A P O I.

Della figura della Terra.

I. La superficie geologica presenta una curva molto irregolare proveniente dalle sue ineguaglianze, e principalmente dalle elevazioni dei monti. Ma prescindendo da queste, e riguardandola come ridotta tutta al livello del mare, essa, secondo gli Astronomi, forma la superficie di una ellisse, o sferoide compressa ai poli, ed elevata all'equatore. Secondo i risultati del *Sig. de la Lande* (a) il semiasse maggiore ossia il raggio corrispondente all'equatore è di 3281012 tese, ossia

(a) *Astronomie* Tom. 3. §. 2690.

di 1437 $\frac{1}{2}$ leghe comuni di Francia, ognuna delle quali è di tese 2283, il semiasse minore, o il raggio corrispondente al polo è 3262688 tese; onde la differenza dei due semiasse è di 18324 tese ossia di circa 8 leghe, la qual differenza chiamasi l'*appiattimento* della terra ai poli, ed è circa $\frac{1}{17}$, del semiasse maggiore.

2 I metodi finora usati per riconoscere la figura della terra, e per determinare le grandezze dei raggi corrispondenti ai diversi punti della sua superficie si riducono a due. Il primo è la misura di alcuni gradi di latitudine, o di longitudine; il secondo è la variazione della gravità indicata dai pendoli nelle diverse latitudini. Per dedurre dalle misure di alcuni gradi il rapporto dei raggi terrestri supponesi, che la curva sia un'elisse regolare, a cui appartengano almeno due dei gradi misurati. Ora siccome due, o anche più gradi possono appartenere non solo ad un'elisse regolare, ma anche ad una curva irregolare composta per esempio parte di archi ellittici, e parte di curve di altra natura; perciò i risultati non hanno se non quella verisimiglianza, o anzi quella semplice possibilità, che ha l'ipotesi adunata. Altronde l'appiattimento stesso, che coll'indicato metodo si deduce, riesce anche diverso secondo la diversità dei gradi misurati, che si assumono nel calcolo. Così se si scelgono i due gradi di latitudine misurati l'uno all'equatore, e l'altro al circolo polare, quello riesce di $\frac{1}{215}$; ed assumendo i due gradi misurati l'uno all'equatore, l'altro in Francia, risulta di $\frac{1}{104}$. (a).

3 L'altro mezzo consistente nella variazione della gravità, che osservasi nelle diverse situazioni tra il polo e l'equatore, non è più atto del primo. Perciocchè quella può provenire da due cagioni, cioè dalla diversa distanza dal centro della terra, o dalla diversa densità delle parti del globo terrestre. Per lo che dall'aumento della gravità, che si osserva andando verso il polo, non può dedursi l'appiattimento della terra se non nel caso che questa sia omogenea,

(a) La Lande. Astron. §. 2678.

ed egualmente densa, oppure che si abbia il modo di determinare quale sia la densità del globo nei diversi siti per conoscere quanta influenza quella abbia nell'aumento della gravità.

4 Ora la terra, come nella superficie ci presenta nelle materie una diversa densità, così sembra dover essere anche nell'interno. Ma il determinare quale questa sia nelle diverse parti della massa terrestre sarà sempre un assunto superiore alle nostre cognizioni.

5 Quindi non è maraviglia, se gli Astronomi stessi, ai quali massimamente importa la determinazione dell'esatta figura della terra, molto disconvengano nell'assegnarne anche la quantità dell'appiattimento. Lo stesso Sig. *de la Lande*, il quale combinando la misura di alcuni gradi coll'ipotesi di una figura ellittica regolare avea trovato l'appiattimento di $\frac{1}{217}$, (a), in seguito lo ridusse ad $\frac{1}{230}$, combinando cioè l'ipotesi stessa coll'aumento della gravità trovato dal Sig. *Lions* a gradi 79.50' di latitudine boreale (b). Ma anche questa correzione è fondata su diverse ipotesi, ed altronde sensibilmente si allontana dall'appiattimento risultante dai gradi misurati in Filadelfia, al Capo, e nella Lapponia.

6 Attese tali indeterminazioni il lodato Astronomo conchiuse già (c) che la terra o non è ellittica, o non è omogenea. Avrebbe anzi dovuto concludere, che essa non è nè ellittica, nè omogenea. Il difetto d'omogeneità risulta anche dalla considerazione della stessa superficie terrestre. Quanto alla figura noi sappiamo, che le misure dei gradi assunte per il calcolo furono tutte ridotte al livello del mare, e nulladimeno non si possono quelli riportare ad una stessa elisse, qualunque sia il rapporto che si ascriva ai due semiasse della medesima: il che dimostra che la terra considerata anche astronomicamente, ossia che la superficie stessa del mare non ha la figura di un'elisse, quando pure non si vogliano ammettere sensibili errori nelle prese misure o per

(a) *Astronomie* 5. 2690.

(b) *Mém. de l'Académie. R.* an. 1785. pag. 5.

(c) *Astron.* 5. 2682.

inesattezza di osservazione, o per irregolarità intervenuta in esse a motivo dell'attrazione delle montagne. Che se la terra si considera geologicamente, tanto più essa si discosta dalla regolarità di un'elisse geometrica. In quella veggonsi forgere montagne molto estese ed elevate, alcune delle quali giungono fino a 3220 tese sul livello del mare, inoltre dal mare ascendono diverse dolci pendenze, le quali talora giungono all'elevazione di 1460 tese: tale è il piano di Quito verso l'equatore (a); tale è pure l'immenso deserto di Chamo nel Tiber situato a circa 45 gradi di latitudine boreale, il quale secondo il *Pallas* ha un' elevazione non minore di quella del piano di Quito (b). Ora queste elevazioni sono assai sensibili per rapporto al semiasse maggiore, che come ho detto si assume di tese 3281012, e queste inducono anche una sensibile diversità nel rapporto dei due semiasse terrestri considerati nello stato presente e reale della terra. Così se alla lunghezza di 3281012 aggiungansi le 3220 tese, che è l'altezza del Chimboraco sul livello del mare in vicinanza dell'equatore, risultano 3284232 tese per il semiasse corrispondente alla massima elevazione terrestre sotto l'equatore; e supponendo che ai poli non forgano montagne, ossia che la superficie sia colà terminata dal mare o da pianure di ghiacci, come è nelle vicinanze de' poli stessi che sin ora si sono visitate, ne seguirebbe che la differenza tra il semiasse maggiore terminato alla massima prominenzia montuosa ed il semidiametro minore corrispondente ai poli o almeno alle vicinanze loro, il quale è di tese 3262688, farebbe di tese 21544, il che forma circa $\frac{1}{152}$ del semiasse maggiore.

7 Il motivo, per cui sì gli Astronomi, che molti dei Geologi insistono sulla figura ellittica della terra, si è l'opinione, che questa originariamente sia stata fluida, e che perciò debba avere presa quella figura che conveniva ad un globo fluido sottoposto all'azione della gravità, e della forza di rotazione, la qual figura è appunto l'ellittica. Questa opinione

(a) *Condamine Voyage* pag. 33.

(b) *Pallas Observations sur la formation des montagnes* pag. 19.

opinione però non ha verun fondamento nelle osservazioni. Perciocchè in due modi può essere stato fluido quel globo che ora trovasi in parte consolidato, ed eterogeneo, cioè o per una compiuta fusione, o per una soluzione di materie in un liquido come è l'acqua. Che il globo sia stato in fusione è un'ipotesi che discorda dalla natura delle materie che la compongono, siccome altrove sarà dimostrato; altronde è soggetta a quelle difficoltà che devono far escludere anche l'altro genere di fluidità.

8 Nella supposizione che il globo sia stato fluido nel secondo modo, questa fluidità può essere stata omogenea, e perfetta, ovvero eterogenea, ed imperfetta. Nel primo caso sarebbe risultata un'ellissoide regolare senza prominenza nella superficie, e senza cavità nell'interno; inoltre l'appiattimento sarebbe riuscito di $\frac{1}{210}$ (a); e questo sarebbe stato il massimo, giacchè in quella ipotesi le parti avrebbero potuto secondare compiutamente la forza centrifuga, o di rotazione. Nel secondo caso può intendersi l'eterogeneità del fluido o regolare, cioè distribuita nella massa secondo certe leggi riducibili a calcolo; ovvero irregolare; e supponendo che la fluidità eterogenea fosse anche imperfetta, l'appiattimento sarebbe riuscito minore di $\frac{1}{210}$; inoltre ommettendo ora il caso dell'eterogeneità irregolare siccome quello che ha innumerevoli indeterminazioni, ed assumendo soltanto il caso che quella fosse regolare, la superficie sarebbe pure riuscita uniforme. Ora l'appiattimento della superficie terrestre considerata come è realmente è di circa $\frac{1}{172}$ (§. 6.) cioè maggiore di quello che risulta secondo la teoria assunta da *Newton*; inoltre la sua superficie è assai irregolare (§. 6.), e vi si riconoscono considerabili cavità. Per lo che la figura presente del globo non corrisponde allo stato di un fluido nè omogeneo, e perfetto, nè regolarmente eterogeneo, ed imperfetto. L'esistenza di caverne sotterranee anche al disotto del livello del mare è provata dai vortici, che in diversi mari si riconoscono. Tali sono quelli di Scilla e Cariddi nella Sicilia, e quello di Maelstrom nella Norvegia.

Tom. IV.

Y

(a) *Newton Princip. lib. III. prop. 19.*

Lo stesso viene confermato dai sobbissamenti di diversi tratti di terra che nelle storie si rammemorano; dai diversi fiumi che sottoterra corrono, e dei quali alcuni per vie sotterranee si scaricano in mare; e da que' vulcani che col mare comunicano. Frequenti, ed ampie caverne osservansi pure nell'elevazione dei monti, e massime nei calcarei, e nei vulcanici. Tra le accennate cavità alcune certamente sono posteriori all'origine o alla consolidazione del globo terrestre, e queste non hanno influenza sulla questione, di cui ora si tratta. Altre però devono essere contemporanee alla prima esistenza del globo consolidato. Tali sono almeno in parte le caverne vulcaniche, giacchè sebbene debbasi ammettere che alcune o si formarono, o si aumentarono in seguito, pure non può intendersi, che abbiano cominciato le infiammazioni delle materie, se non in cavità già preesistenti (a).

9. Potrebbe altri dire che le prominente, le quali rendono nella terra l'appiattimento maggiore, e la superficie irregolare, non esistevano nell'originaria formazione della figura terrestre, ma che vi si formarono da seguenti mutazioni intervenutevi. Tali mutazioni però in una figura supposta uniforme e regolare possono essere accadute in due modi, cioè o per sottrazione di materia in que' siti che ora sono più bassi, e che formano le valli, ovvero per aumento di materia sopraggiunta in alcuni luoghi della superficie. Il primo modo non potè aver luogo se non per un abbassamento della materia in que' siti che ora sono più bassi; e per ammettere tale abbassamento conviene supporre che al disotto della superficie esistessero grandi cavità, in cui potesse ritirarsi la materia abbassata, la qual supposizione è contraria alla seconda condizione che (§. 8) dovea aver luogo nell'ipotesi di un fluido omogeneo, o regolarmente eterogeneo.

10. Ma neppure potettero le indicate prominente formarsi nel secondo modo. Perciocchè questo nelle fatte ipotesi non potè effettuarsi, se non per l'eruzione di materie della massa terrestre, a produrre il quale effetto noi non conosciamo

(a) Le descrizioni di diverse caverne si possono vedere presso *Buffon* Com. l'Hist. nat., e presso *Bergmann* Phy-

sicaliche Beschreibung der Erd Kugel t. 7. p. 264 ecc. *Pallas* Observ. sur la formation des Montagnes.

altra atta cagione fuori dei vulcani; e se da questi fossero state prodotte o tutte, o almeno le principali prominente terrestri, dovrebbero queste essere composte di materie vulcaniche, il che certamente non è.

11 Se ad altri piacesse di dire, che le ineguaglianze terrestri, compresi i monti, sono deposizioni di acque; egli supporrebbe, che le acque avessero fatto lunga permanenza sulla terra ad una elevazione non minore delle più alte cime ora esistenti; e poichè al presente le acque sono ad una elevazione molto minore, perciò converrebbe dire che esse si fieno abbassate, ritirandosi in altre cavità, cioè in quelle cavità le quali non potevano esistere in un globo risultato dalla consolidazione di un fluido perfetto, ed omogeneo, o regolarmente eterogeneo. Oltre a che è manifesto, che la maggior parte dei monti non è una deposizione di acque.

12 Rimane pertanto a dire, che se il globo ebbe una fluidità, questa dovette essere irregolarmente eterogenea, e tale potè essere per innumerevoli maniere, le quali dipendono dai varj gradi di densità, di affinità, di attrazione, e di altre forze, che nelle diverse parti di un fluido supposto eterogeneo si possono intendere. Ora secondo i varj rapporti di queste forze tra loro, e colla gravità e rotazione poteva risultare nella terra tanto una figura ellittica come un' altra di natura molto diversa. Ma l'investigare quale dovesse realmente risultare dipende del tutto da ipotesi; e tra quelle, che si assumessero per calcolarne i risultati, molte condurrebbero a calcoli irriducibili, altre ad una figura non ellittica, ed irregolare.

13 E' dunque manifesto dalle cose esposte che la figura presente della terra non corrisponde all' ipotesi d' un fluido omogeneo, o regolarmente eterogeneo, e che l'ipotesi di un fluido irregolarmente eterogeneo conduce anche ad ammettere nella terra una figura non ellittica. Per lo che l' ipotesi della fluidità originaria della terra non può somministrare una ragione della presente sua figura, come vicendevolmente la figura presente del globo non può servire per provare che esso sia stato fluido.

14 Che se pure si vuol riguardare come quasi sferoidale la presente figura della terra, e si cerca la ragione per cui

abbia tale figura, converrà a tal fine richiamare la cosa da altri principj: il che si farà nella seconda parte di questa Memoria .

C A P O I I.

Sulla divisione generale della superficie terrestre.

15 La superficie ne' siti più esposti alle osservazioni si presenta divisa quali in due parti, cioè in mari, ed in terra ferma, e sotto tal divisione si suole quella riguardare; ma propriamente voglionli aggiungere due altre divisioni cioè in ghiacci polari, ed in paludi. I mari sono un aggregato di acque raccolte nei siti più bassi della superficie terrestre. La terra ferma è quella porzione di materie solide, che circonda il mare o da esso è circondata. I ghiacci polari sono acque consolidate in ghiaccio che trovansi massimamente ai poli, e questi alternativamente a misura che di nuovo si liquefanno, e che si consolidano, equivalgono a mare o a terra ferma. Per paludi finalmente intendonsi que' vasti terreni coperti di poche acque che sono quali medii tra il mare e la terra ferma; giacchè non hanno tanta altezza di acqua che basti a riguardarle come mare, nè hanno una fermezza di fondo sufficiente per considerarle come terra ferma.

16 La terra ferma per rapporto del mare distingueasi in due grandi continenti, quali che da essi il mare ha contenuto, e l' uno di essi diceli antico, l' altro che riducesi all' America chiamasi nuovo. Al polo antartico il primo di questi continenti è staccato dal secondo, ma all' artico sembrano essere uniti, e se sono uniti, essi non formano che una sola isola, ma se sono disgiunti voglionli riguardare come due grandi isole. Il nuovo continente è più lungo che l' antico, ma di questo meno largo; in complesso la superficie del nuovo è circa la metà di quella dell' antico, e la somma di ambedue ossia il totale della superficie di terra ferma è appena la terza parte della superficie occupata dal mare comprendendo in questo anche i ghiacci. I mari si estendono massimamente nell' emisfero australe, nel quale la superficie dell' acqua supera di molto quella della terra ferma;

Iaddove nell' emisfero boreale la superficie della terra ferma è maggiore di quella del mare . Nel totale la superficie del globo terracqueo computato al presente livello del mare è circa 26 milioni di leghe quadrate .

C A P O III.

Sui mari in generale.

17 Dei mari alcuni sono circondati da una porzione di terra , la quale in superficie è maggiore dei mari medesimi; altri circondano una porzione di terra minore della loro superficie . Tra i mari del primo genere è il Caspio ; del secondo genere è l'Oceano . Il non trovarli vortici nel Caspio fu dal Sig. Conte di *Buffon* assunto come argomento che quello non comunichi coll'Oceano, e sia di questo più elevato . Alcuni seguiti anche dal Sig. *Bergmann* lo reputano più elevato di 120 piedi svezzei . Al presente però è dimostrato, che quello è anzi più basso del livello (a): e tale circostanza somministra una più fondata ragione, per cui tra loro non possano comunicare; giacchè, posta la comunicazione, dovrebbero pres' a poco essere allo stesso livello . Un altro argomento, per cui può provarsi, che quei due mari non comunicano tra loro, si è che nell'anno 1730, in cui in quelle regioni caddero straordinarie nevi, il Caspio si alzò circa 6 braccia, ed in seguito rimase almeno fino al 1769 costantemente due braccia più elevato di quel che fosse per innanzi (b). Ora se il Caspio avesse tal comunicazione, avrebbe dovuto per la legge d'equilibrio diminuirsi tale altezza scaricandosi nell'Oceano, o almeno questo avrebbe dovuto alzarli proporzionatamente: il che certamente non è intervenuto .

18 Le coste, e le spiagge dei mari sogliono essere ritagliate molto irregolarmente, e vi formano golfi, baie, stret-

(a) Nota al Proemio dei viaggi di *Pallas* edizione di Parigi 1788., ove si accenna l'errore preso dal Sig. Abate *Chappe* nell'assegnare l'elevazio-

ne del Caspio, e del Volgo.

(b) *Pallas Voyages* t. 1. pag. 680. ediz. Par.

ti, e seni. In questa irregolarità il Sig. *Conte di Buffon* s'immaginò di trovar certe regole, cioè 1. che le grandi punte di terra ferma sono rivolte verso il polo australe, 2. che le coste occidentali sono generalmente più ripide delle orientali, 3. che gli stretti, e seni sogliono essere diretti da levante a ponente. Quanto però queste regole debbano valutarfi, sarà detto a suo luogo.

19 La profondità dei mari è varia secondo i diversi siti. Se le coste sono montuose, la profondità in vicinanza di esse suol essere assai grande; ma se avvi spiaggia o piana, o in dolce pendenza, la profondità delle acque ad una certa distanza è mediocre, e va diminuendosi a misura che si accosta alla spiaggia. In molti siti, come in America sulle coste del mare del Sud, la profondità è tanto grande, che collo scandaglio non si può riconoscere (a). Sulle coste della Norvegia, che sono occupate da scogli, il mare è profondo dalle 100 fino alle 400 tese (b). Al nord di Schetland il Capitano *Phips* non trovò verun fondo alla profondità di 780 braccia francesi; nella quale anche riconobbe che la temperatura dell' acqua era gradi $2\frac{1}{2}$ di *Reaumur* al disotto del punto di congelazione, quando che l'atmosfera ne avea 7 al disopra del punto medesimo (Viag. al Nord 1773). Generalmente secondo l'opinione di M. *Buffon* il mare di rado ha una lega di profondità, ed ordinariamente è profondo circa 60 tese. Finora però troppo poche sono le osservazioni su tale oggetto per poter formare un verisimile adeguato.

20 La profondità, e vastità dei mari fa, che anche il loro fondo non possa essere bene esaminato. In ogni modo le isole, e gli scogli che sorgono fuori delle acque, e le rupi che collo scandaglio si riconoscono sott'acqua, ci fanno vedere, che se il mare si asciugasse, esso presenterebbe una superficie con disuguaglianze pres'a poco simili a quelle, che ora si osservano sulla terra ferma; e quelle isole sarebbero come i suoi più alti monti.

(a) *Memoires philosophiques* ecc. concernant la decouverte de l'Amerique. Paris 1787.

(b) Pontoppidan *Hist. nat. de la Norvege*. Journ. etrang. Aout 1755.

21 Quanto alle materie componenti il fondo del mare, in diversi siti si trovò, che quello è composto di varj generi di pietre. Avvi pure un'immensa estensione di madre-pore, di coralli, e di altri zoofiti di stirpe fissa, come pure di ostriche (a), e di altre conchiglie che sogliono stare aderenti agli scogli. Dalle spoglie di questi animali risultano fondi permanenti, i quali si vanno aumentando a misura che vi si moltiplicano gli animali stessi; e la loro moltiplicazione è tanto copiosa che quantunque molti di essi sieno vermi microscopici, pure col tempo dalle loro spoglie ne risultano scogli, e rupi di vastissima mole. Sonovi inoltre de' fondi mobili, e questi presentano talora una grande quantità di punte di echini, di conchiglie frantumate, di felci arrottondite (b); i quali corpi vengono continuamente trasportati dalle correnti, e da altri moti del mare.

22 Le acque marine distinguonli per la loro falsedine. Questa o proviene, o è mantenuta dalle materie saline, che vi vengono introdotte dalle acque di terra ferma, e da quelle che si sviluppano massimamente dagli animali, e dalle piante che in mare nascono, e si putrefanno (c).

23 La falsedine non è dappertutto eguale. Verso il polo boreale, come sulle coste della Norvegia, le acque sono meno false che quelle dell'alto mare, e così deve essere in ogni altra situazione di freddo clima: perciocchè nelle regioni circumpolari, e lungo le fredde coste, ove le acque gelano, i sali per la congelazione si separano, e si precipitano; oltre a che l'acqua nei climi freddi deve tenere in dissoluzione una minore quantità di sali (d).

(a) Il Sig. *Bartram* dice essere immensi i banchi di ostriche vive, e morte, che si formano in mare. *Phil. Trans.* an. 1744.

(b) *Dicquemar Journal de Physique* dec. 1775. Il *Donati* nel Saggio della Storia nat. dell'Adriatico scrive che il fondo di questo mare è fangoso misto con madre-pore, conchiglie ecc.

(c) Le Ricerche del Ch. Sig. Cava-
liere *Lorgna* sull'origine del Natro, o

Alkali minerale nativo inserite nelle Memorie della Società Italiana tomo III. meritano di essere studiate per rintracciare una più prossima origine della falsedine del mare, e della conservazione della medesima.

(d) Le belle esperienze del lodato Sig. Cav. *Lorgna* sulla dolcificazione dell'acqua del mare inserite nel citato Tomo III. dimostrano, che quella per la congelazione realmente si dol-

24 Anche in vicinanza delle coste e spiagge, ove sono gli sbocchi de' fiumi, la falsedine del mare per la continua mischianza colle acque dolci deve generalmente essere minore che in alto mare, ove l'acqua de' fiumi non perviene se non dappoichè si è diffusa nella grande massa delle acque salate, partecipando della falsedine loro.

C A P O IV.

Dei Ghiacci polari, ed alpini.

25 I ghiacci sono una consolidazione che per difetto di calore interviene nella sostanza acquea. Questo cangiamento influisce in molte variazioni terrestri, e massime nel cangiamento del clima. I ghiacci che così si formano sono permanenti, o passeggieri. Permanenti trovansi in grande quantità sì nelle parti più basse in vicinanza de' freddi poli, come nelle parti più elevate delle alpi de' climi anche più caldi. I primi noi chiameremo polari, i secondi alpini. I ghiacci delle alpi osservati dal Sig. *de Saussure* sono propriamente una neve penetrata da acqua gelata; e di simile natura devono essere anche i polari all'eccezione di quelli, che si formano in mare, e nei fiumi dalla immediata congelazione dell'acqua medesima. (a)

26

cifica; ma che per congelarsi richiede un freddo molto maggiore di quello, a cui l'acqua pura si agghiaccia; e che inoltre la dolcificazione compiuta delle acque marine molto impure, come sono quelle della laguna di Venezia, non avviene se non dopo quattro successivi agghiacciamenti, in ognuno de' quali si separa una porzione del sale marino, sì che all'ultimo ne rimane del tutto priva. Da che deveasi concludere, che siccome nei mari circumpolari dominano eccessivi freddi, i quali in certe stagioni alternano con sensibili calori, così devono intervenire quelle circostanze, che per gli esperimenti indicati trovansi necessarie alla dolcificazione dell'acqua

marina in virtù dell'agghiacciamento, così che non dovrebbe riuscire strano il trovarsi dolce l'acqua proveniente da' ghiacci polari, ma anche il trovarsi qualche parte di que' mari formata almeno in certi tempi di acqua dolce, e pura.

(a) Stimarono già alcuni, che nessuna parte dei ghiacci polari fosse proveniente da agghiacciamento di acqua marina, riputando che questa in nessun modo possa gelare. La vanità però di questa opinione è dimostrata dalle immediate esperienze sopraindicate del Sig. Cav. *Lorgna*, e del Sig. Ab. *Mann* (tom. I. mem. de l'Acad. R. I. de Bruxelles); e quella ebbe forse il suo fondamento nell'

26 Nelle vicinanze sì del polo artico che dell' antartico i viaggiatori riconobbero un' immensa quantità di ghiacci anche al livello del mare stesso; e le congetture conducono a credere che quelli sieno continui fino ai poli medesimi. Di questi ghiacci alcuni sono fissi, ed altri mobili o galleggianti. Intorno al polo boreale i fissi trovansi già stabiliti fino alla distanza di 9 gradi dal medesimo, ossia a gradi 81 di latitudine boreale. In alcune longitudini si stendono anche di più, cioè fino alla latitudine di gr. 77, come li trovò il *Barentz* nello stretto di *Waigatz*, ed il *Wood* tra lo *Spizbergo* e la nuova *Zembla*, anzi sul capo *Piasida* il banco di ghiaccio solido già estendesi fino a 76 gr. di latitudine boreale. Tutto all' intorno del polo australe i ghiacci fissi sono stabiliti fino alla distanza di 20 gradi dal medesimo, ossia a gradi 70 di latitudine, siccome dalle *Relazioni* del Capitano *Cook* è manifesto, ed in alcuni siti si stendono anche fino a gr. 60 di latitudine australe.

27 Dagli accennati banchi di ghiaccio staccansi spesso immensi massi, che quasi isole galleggiano pel mare. Nelle regioni boreali questi, che talora sono lunghi 200 tese, larghi 80, ed alti 12, pervengono fino al grado 58 di latitudine, ove dall' *Ellis* furono trovati all' Est del capo *Farewel*. Nelle regioni australi i ghiacci mobili giungono in alcuni siti fino al gr. 48 di latitudine. Essendo questi stati osservati anche nell' estate di que' climi, furono perciò riguardati dal Sig. di *Buffon* come permanenti. Tali osservazioni però non altro provano se non che in que' siti trovansi ghiacci anche in estate, ma non già, che quelli, i quali furono osservati in un' estate, sieno quelli stessi che vi esistevano negli anni antecedenti. Attesa la loro mobilità quelli, che negli anni antecedenti all' osservazione, erano nell' accennata latitudine di 48 gr., devono almeno in gran parte essere stati dai venti e dalle onde successivamente trasportati in climi atti a liquefarli; anzi a motivo del calore che domina in quella latitudine una porzione de' medesimi

Tom. V.

Z

avere osservato, che l'acqua marina non si agghiaccia al grado di freddo, a cui si congela l'acqua comune, sen-

za averne tentata la congelazione a gradi di freddo maggiore.

deve essersi liquefatta nei siti stessi. Per lo che que' ghiacci non devon riguardarli come permanenti ma come passeggieri, in quanto che vi esistono solo per una successiva sostituzione.

28 La profondità degli accennati ghiacci è molto varia. In alcuni siti il mare sembra ghiacciato sino al fondo (a), altrove i ghiacci danno una profondità soltanto di 12 piedi. Generalmente i galleggianti, che si formano in terra ferma, e che vengono in mare o per rilascio interveniente ne' ghiacci di terra ferma, o per trasporto che ne fanno i fiumi, sono assai più grossi di quelli che si formano nel mare stesso. Tali sembrano essere quelle isole di ghiacci che il Sig. *Lade* dice trovarsi nei mari di Frisland, le quali sott'acqua s'immergono alla profondità di 80 tese, ed hanno di circuito una mezza lega e più. Aggiugne lo stesso Scrittore (b), che alcuni ghiacci sono alti fuori d'acqua come l'altezza degli alberi de' più grandi vascelli. Allo Spizbergo, dove si va per la pesca delle balene in luglio, e d'onde il freddo costringe a partire in agosto, trovansi ghiacci grossi 80 tese fuori d'acqua. Ora posto che questi massi sporgenti fuori d'acqua vi galleggino, conviene che sott'acqua abbiano una profondità molto maggiore.

29 Le osservazioni ci persuadono, che i ghiacci polari si vanno aumentando. L'antica Groenlandia al presente è perduta tra' ghiacci. Il *Forbicher* nello stretto chiamato dal suo nome trovò già de' ghiacci, i quali però lo lasciavano accessibile, ed al presente è da quelli ostrutto. La baja di Repulse, che per innanzi era praticabile, al presente secondo il *Midleton* è ripiena di ghiacci. Presso la nuova Zembla nello stretto di Waigatz il passaggio a motivo de' ghiacci è divenuto più difficile e quasi impraticabile.

30 E ciò vale dell'aumento de' ghiacci al polo boreale. Quanto a quello del polo australe non si possono avere altrettante osservazioni per essere le vicinanze di esso meno frequentate. Alle osservazioni però si può supplire coll'argo-

(a) *Recueil des Voyag au Nord.* t. 1. p. 154.

(b) *Voyag trad.* per M. *Prevot* t. 2. p. 303.

mentazione. Abbiamo veduto che intorno al polo australe i ghiacci permanenti sono più avanzati verso l'equatore che intorno al boreale. Tale avanzamento non può essere stato che successivo cioè equivalente ad un aumento, onde è da dire che l'aumento de' ghiacci al polo australe sia maggiore che al boreale. Due cagioni inoltre appajono, per cui i ghiacci al polo australe devono anzi aumentarsi più che al boreale. La prima è che il sole nell'emisfero australe ogni anno soggiorna sette giorni, e tre quarti meno che al boreale: il che deve produrre un freddo maggiore nell'emisfero australe. L'altra cagione di maggior freddo in questo emisfero è la minore estensione di terra ferma in confronto di quella che esiste nell'altro. La terra ferma per l'azione de' raggi solari si riscalda più dell'acqua, e ritiene per più lungo tempo il loro calore; così che rimane anche all'inverno una porzione del calore che vi penetrò nell'estate; e questo diffondendosi per l'atmosfera anche nella fredda stagione ne rende la temperatura più mite fino ad una certa estenuazione. Per tal motivo al polo boreale i freddi devon esser minori che all'australe, e però in questo devono i ghiacci aumentarsi più che in quello.

31 Secondo le osservazioni di *Cook* i ghiacci al polo australe sono in superficie circa sei volte maggiori di quegli esistenti al polo boreale; e calcolando i ghiacci d'ambedue i poli secondo la diligente carta formata dal Sig. *de Buffon* sulle relazioni di diversi viaggiatori, trovasi la loro superficie di circa un milione di leghe quadrate, che sono circa $\frac{1}{26}$ della superficie totale del globo terrestre.

32 La permanenza di così vasta mole di ghiacci è accompagnata in que' climi da eccessivi freddi (a). Questi nella Groenlandia cominciano al principio dell'anno, ed in febbrajo, e marzo divengono così aspri, che le pietre talora si spaccano; l'acqua sul fuoco s'agghiaccia prima di bollire; nelle baie, e negli stretti tra le isole vicine si forma sul mare un pavimento passeggiabile, ed il terreno gela fino alla profondità di 17 piedi (b). Fu però osservato, che an-

Z ij

(a) Hist. gen. des Voy. p. 20. t. 19.

(b) Ellis Hist. Voy. t. 15. p. 188.

che in quelle regioni il clima in qualche anno riesce affai meno rigido che all'ordinario, e prende una temperatura contraria a quella d'Europa. Così alla fine del 1739 l'inverno fu sì dolce alla baja di Disko, che le oche selvatiche passarono nel seguente Maggio dalla Zona temperata alla glaciale, siccome quella che allora avea una maggiore temperie. Parimenti nel 1740 non si vide ghiaccio a Disko sino al Marzo, nel mentre che nel generale d'Europa dominò il gelo dall'Ottobre fino al Maggio. Finalmente nel 1753 il freddo, che fu sommanente grande in Europa, si fece sentire così poco nella Groenlandia che la stagione d'inverno vi sembrava più dolce di quel che vi riesca in alcune estati.

33 Non ostanti gli eccessivi freddi, e ghiacci, che nelle regioni circumpolari sogliono generalmente dominare massime nell'inverno, si osservò che di sotto de' ghiacci medesimi scorrono costantemente diverse acque. Nel mentre che gli Olandesi nell'anno 1596 lottavano contro i ghiacci, di cui si andavano coprendo i mari della nuova Zembla, il fianco d'una vicina montagna ghiacciata forniva nell'Agosto copiosa acqua, e questa al giorno 5 di Settembre seguitava a scorrere, sebbene que' mari si fossero per l'agghiacciamento consolidati (a). Il Wood dopo aver dipinti i freddi, che rendono i ghiacci perpetui fino molto addentro nelle terre della Zembla, aggiugne che ad ogni quarto di miglio s'incontrano de' ruscelli, i quali scorrono fino al ghiaccio che cuopre i vicini mari (b). Il Capitano *Phips* attesta pure, che allo Spizbergo l'acqua è abbondante, e prodotta solo dalla fusione delle nevi ossia de' ghiacci, che nella sottoposta loro parte interviene; giacchè la temperatura dell'atmosfera non è sufficiente a produrre nella loro superficie un corrispondente squagliamento.

34 Venendo ora ai ghiacci alpini questi pure trovansi permanenti in ogni clima, ed in vaste estensioni; ma cominciano ad un'elevazione maggiore secondo che il clima per la

(a) Voy. des Hollandois à la nouvelle Zemle an. 1596.

(b) Hist. des Voy. t. 15. p. 167.

situazione geografica è più caldo, ossia più vicino all'equatore. Nelle Cordilliere, che sono intuate sotto all'equatore stesso, le nevi, ed i ghiacci permanenti cominciano ad un'elevazione di circa 2434 tese sul livello del mare, e continuano fino alle cime di quelle altissime montagne, di cui la più elevata è di tese 3220 sul livello medesimo. Nei monti situati tra il polo e l'equatore la linea, ove cominciano le nevi permanenti, non può abbastanza determinarsi sì per difetto di sufficienti osservazioni, come anche a motivo delle molte cagioni fisiche che fanno variare il calore nei siti posti ad un'eguale latitudine. In ogni modo prendendo la cosa in una certa generalità si può stabilire, che tal linea nella Zona torrida è elevata sul livello del mare dalle 2434 tese fino alle 2000, nella Zona temperata dalle 2000 tese fino a 1500, e nella Zona fredda dalle 1500 fino a zero.

35 Fra i ghiacci alpini delle regioni temperate sono celebri quelli della Savoia sì per la loro singolarità, e sì anche per essere stati illustrati dai viaggi, e dalle osservazioni del sublime, ed instancabile Filosofo il Sig. *de Saussure*; e quello, che egli rapportò su' medesimi, può applicarsi ad altri ghiacciaj di simile natura. Formanti questi o nelle valli, o sulle non ripidissime pendenze dei monti. Nelle valli sogliono essere molto più profondi, atteso che in quelle si accumulano in gran parte anche le nevi cadenti dalle alte cime, e dalle pendenze superiori. Oltre a che vi ristagnano più copiose le acque, le quali si agghiacciano insieme colle nevi medesime. A Chamonix, che è al piede del monte Bianco, l'altezza de' ghiacci fu stimata di 100 tese, ma nelle valli forse giugne anche a mille.

36 Se questi ghiacciaj vadano aumentandosi, o diminuendosi, finora non si è potuto decidere con una certa generalità. Allora che io mi trovava a Chamonix fui da molti di quegli abitatori assicurato, che tempo fa esisteva un passaggio da quella valle fino a Courmajeur, e che al presente quello è ostrutto da ghiacci. Parimenti il Sig. *de Saussure* in que' contorni riconobbe diversi piccoli ghiacciaj di recente formazione, e vide sensibilmente aumentato il ghiacciajo di Jaconay dall'anno 1760 al 1778. Sonovi però altre osservazioni che provano una diminuzione in alcune parti sì

di questi ghiacciaj, come di altri ancora. Così il Sig. de *Saussure* conghietture che il ghiacciajo di Bois situato in vicinanza di Chamonix, e l'altro vicino a Montdolent siasi sensibilmente diminuito (a) ed il *Grouner* stima lo stesso per riguardo al ghiacciajo di Grindelwald (b). Per lo che a decider la quistione converrebbe vedere se gli aumenti prevalgono o no alle diminuzioni: il che non si può riconoscere se non per osservazione, e per una valutazione delle cagioni che tendono parte ad aumentare, e parte a diminuire i ghiacci già esistenti.

37 La cagione principale della formazione dell'aumento de' ghiacci alpini è la grande elevazione de' monti, per cui in que' climi le nuvole in vece di acqua vi mandano neve per quasi tutto il corso dell'anno; e di notte verso le cime gela anche nell'estate. Le cagioni di squagliamento, e di diminuzione dei medesimi sono sei massimamente cioè 1. l'azione del sole nei mesi estivi, e temperati, 2. i venti caldi, 3. le acque scorrenti dai ghiacci squagliati nelle parti superiori, le quali inferiormente vi scavano profondi solchi, 4. la svaporazione, la quale, per essere l'aria in quelle altezze più rarefatta, e più rinnovata dai venti, deve produrre maggior effetto, 5. il calore della terra, 6. l'abbassamento, e la discesa de' ghiacci.

38 Di queste cagioni le ultime tre richiedono qualche dichiarazione. E primamente quanto alla svaporazione, l'osservazione immediata ci manifesta il suo effetto massime sulle nevi, ed è visibile verso la cima di quel monte della Lombardia Austriaca che Legnone si chiama, ed altrove da me fu descritto (c). Allorchè la sua cima è coperta di neve (il che è per la massima parte dell'anno) spesso si vede a cielo serenissimo quasi come una nuvoletta o fumo, che si parte dalla cima stessa, ed ascendendo va poc'a poco sfumando, e svanendo nella direzione dell'aria, che allora domina. Questa nuvoletta, la quale dura per lunghissimo tem-

(a) *Sauss.* Voyag. aux Alpes t. I. p. 461. & tom. 2. pag. 292.

(b) Dei ghiacciaj degli Svizzeri tom.

3. p. 153. ediz. tedesca.

(c) Dell'elevazione dei principali monti della Lombardia Austriaca.

po, certamente non è che neve in attuale svaporazione, giacchè non si presenta che quando la cima è coperta di neve massime recente, ed altronde non si può dire, che quella sia composta di piccoli fiocchi, che la forza del vento stacchi dalla massa nevosa: il che facilmente si riconosce paragonando la direzione del vento con quella dell'indicata nuvoletta. Il vento, quando è permanente, suole avere una direzione quasi orizzontale, laddove quel vapore ha una direzione sempre ascendente, la quale tanto meno potrebbe aver luogo nel caso che i fiocchi di neve fossero staccati dal vento, giacchè essendo questi più pesanti dell'aria dovrebbero dopo di essersi elevati nuovamente abbassarsi e discendere: il che certamente non interviene. Un'altra prova della svaporazione de' ghiacci ci viene somministrata da quella specie di fumo, che si alza dai ghiacci polari e che è visibile massime nell'inverno, attesa la maggiore condensazione che dal maggior freddo viene prodotta.

39 Quanto al calore della terra, il suo effetto si manifesta massimamente nelle acque, che anche nei più rigidi inverni scorrono al disotto de' ghiacci medesimi, nel mentre che alla loro superficie non solo non si squagliano, ma anzi gelano maggiormente. Tale squagliamento come intervenga ne' ghiacci polari già fu accennato più sopra; negli alpini lo stesso fu parimenti osservato. Il fiume Arveron, che nel piano della valle di Chamonix esce continuamente di sotto de' ghiacci, ne è uno de' più rimarchevoli esempj. Il Ticino parimenti, che ha la sua origine da diversi ghiacciaj esistenti alla montagna del S. Gotardo, continua a scorre anche in inverno mantenendo il suo corso al disotto delle nevi, che sopra al suo letto in diversi siti si accumulano. Altri molti esempj di simile natura furono raccolti dal Sig. *de Carla* (a).

40 Affinchè però abbia luogo lo squagliamento de' ghiacci e delle nevi in quella parte, in cui toccano il terreno, è necessario che la loro mole sia tanto alta ed ampia, che preservi il terreno dal freddo dell'aria esterna. Questa condizione indica, che non d'altronde può provenire questo ef-

(a) Du Feu souterrain.

fetto, se non da un calore proprio della terra, la cui temperatura sia superiore a quella del ghiaccio. Il lodato Scrittore nel citato opuscolo osservò che le acque escenti di sotto de' ghiacci alpini nell'inverno hanno una temperatura di 10 gradi di *Reaumur*. Da che raccoglie che altrettanta sia la temperatura del globo terrestre. Poito però che il calore di tali acque sia di gr. 10, conviene che sia considerabilmente maggiore quello del globo. Perciocchè primamente il ghiaccio alpino suole essere ad una temperatura minore dello zero, onde per ridurlo in acqua che abbia 10 gradi di calore, conviene che s'impieghi un calor maggiore; inoltre tra il terreno e la parte inferiore de' ghiacci una certa quantità d'aria sempre s'insinua per quelle aperture stesse per cui escono le acque; la quale perciò deve parimenti essere mantenuta alla temperatura indicata; e siccome l'aria stessa comunicando col rimanente dell'atmosfera trasmette continuamente a questa una porzione di calore, perciò affinchè il globo mantenga nell'aria interposta tra il ghiaccio ed il terreno un calore di 10 gradi deve somministrarne continuamente una quantità maggiore.

41 Dall'indicato scioglimento della parte inferiore de' ghiacci deriva un altro curioso fenomeno, ed è che avendo perciò poca, o nessuna coerenza col sottoposto terreno, essi allorchè questo ha una certa pendenza, scendono pel proprio loro peso come su di un piano inclinato; e così quelli che erano più elevati, e perciò in una situazione più fredda vengono poc'a poco scendendo in una situazione più favorevole alla liquefazione anche della loro massa esterna (a): il che forma l'ultima delle accennate cagioni della diminuzione de' ghiacciaj alpini. Da ciò anche proviene che in certi siti bassi, i quali all'estate sarebbero liberi dai ghiacci, spello da questi sieno o perpetuamente o per lungo tempo occupati: il che avviene quando quelli vi scendono in masse tanto grandi che non possano essere compiutamente liquefatte dal calore estivo di un certo numero di anni.

42 Dal-

(a) *Statistique* l. c.

42 Dalle cose esposte rilevasi, che i ghiacci alpini si vanno continuamente rinnovando, e che perciò non sono propriamente perpetui sebbene perpetuamente si trovino ghiacci in un dato sito. 2. che l'aumento de' ghiacci in un tratto di paese talora è congiunto colla diminuzione de' medesimi in un altro vicino tratto. 3. che l'aumento annuo de' ghiacci in un dato sito riducesi alla differenza tra la quantità che annualmente vi si va formando, e quella che vi si scioglie.

43 Quindi per decidere se le cagioni d'aumento prevalgano alle cagioni di diminuzione de' ghiacci alpini converrebbe calcolare quale sia l'effetto di ciascuna di esse; il che da troppi, e non determinabili elementi dipende. In ogni modo pare che in generale finora la massa dei ghiacci, che si va aumentando, prevalga a quella che si va diminuendo. Considerando però le cagioni sì dell'un che dell'altro effetto, sembra che l'aumento debba finalmente avere certi limiti, giacchè i ghiacci aumentandosi devono avvicinarsi a quelle situazioni, in cui prevalgono le cagioni di diminuzione. Così nel dilatarsi pervengono dalle più elevate, e più fredde regioni alle più basse, e più calde, nelle quali i ghiacci non possono perpetuarsi. Parimenti col crescere essi in altezza diverranno finalmente superiori alle nuvole, cioè giungeranno a quella regione, in cui i vapori non più si possono condensare in acqua, o neve; onde non più potrà essere somministrata materia all'aumento della loro altezza: ed allora prevalerà la diminuzione proveniente dallo squagliamento della parte inferiore de' ghiacci medesimi.

44 Quello che ho detto dei limiti de' ghiacci alpini vale con proporzione anche dei polari; e posto che sì gli uni, che gli altri debbano avere certi limiti nell'aumento, non sarà da temere quell'universale agghiacciamento del globo terrestre, che il Sig. Conte *de Buffon* ci minaccia in conseguenza del suo sistema, il quale per altro incontra ne' ghiacci medesimi un' insuperabile opposizione. Secondo tale sistema la terra ha un calor centrale che è residuo dell'insuocamento, in cui suppone essere stato il globo; e poichè quella verso i poli è meno elevata, perciò stima che colà si affreddata più rapidamente, e che perciò verso i poli il calore proprio della terra sia minore che verso l'equatore.

Ma noi abbiamo veduto, che il calor sotterraneo nelle regioni circumpolari fa liquefare la parte inferiore delle grandi masse ghiacciate, come avviene anche verso l'equatore. Ora posto che le acque scorrenti dal disotto dei ghiacci polari nell'inverno abbiano una temperatura di 10 gradi, cioè eguale a quella che si osservò nelle acque scorrenti dal di sotto dei ghiacci alpini, ne seguirebbe che il calor sotterraneo verso i poli fosse maggiore che verso l'equatore. Perciocchè colà il freddo esterno proveniente dalla situazione geografica è maggiore che altrove, e però que' ghiacci devono essere d una temperatura più fredda che quelli di altre regioni. Per lo che se il calore centrale nello squagliarli comunica all'acqua una temperatura di 10 gradi, conviene che esso sia maggiore verso i poli, che altrove. Finora non fu riconosciuta la temperatura delle acque scorrenti da' ghiacci polari, ma conservandosi esse fluide da terra ferma fino al mare, non ostanti gli eccessivi freddi esterni, conviene che quella sia almeno di 10 gradi. Il che così essendo è chiaro che il calor sotterraneo verso i poli non è minore, anzi è probabilmente maggiore di quello, che altrove si manifesta in maggiore distanza dai medesimi.

C A P O V.

Sul Livello del Mare.

45 Il livello del mare è un termine che si riguarda come fisso, e da cui si suole prendere regola per determinare l'elevazione dei monti, e le cadute delle acque correnti. Alloraquando però si cerca di fissare ciò che debbasi intendere per livello del mare troviamo mancanti i dati per formarne un termine costante. In generale si può dire che quello è la superficie, a cui termina l'acqua del mare, quando da estranee cagioni, come sono i venti, non è alterata. Ma coll'escludere le cagioni estranee supponesi che per altre non estranee cagioni il mare si disponga in una determinata superficie; e nel determinare tali cagioni, e la superficie da queste risultante trovansi difficoltà insuperabili.

46 Quindi per formare un' idea del livello costante con-

viene ricorrere ad ipotesi. La più semplice è di supporre, che l'acqua sia perfettamente fluida, e tenda per la gravità ad uno stesso punto come centro, escludendo l'intervento di ogni altra forza. In tale ipotesi è facile il dimostrare, che ogni mare, o aggregato di acqua distesa sulla superficie terrestre deve terminarsi alla superficie di una sfera, la qual superficie formerà una sfera compiuta, quando l'acqua non sia ritenuta da continenti, e possa liberamente diffondersi per ogni parte; ma quando i mari fossero contenuti dalla terra ferma, e non avessero fra loro comunicazione, come sembrano essere il Caspio, e l'Oceano, allora la superficie di ciascuno formerebbe bensì un segmento sferico, ma questi segmenti potrebbero essere di diverse sfere concentriche. Quindi la linea, o la superficie di livello di ogni mare sarà una curva sferica, il cui raggio sarà eguale a quello, che dal centro della terra giugne alla superficie stessa, e però ogni punto della superficie medesima sarà egualmente distante dal centro stesso; inoltre la linea o la curva di livello sarebbe quella a cui è perpendicolare la direzione della gravità de' corpi terrestri, quando pure questa fosse diretta allo stesso punto, a cui supponesi tendente la gravità dell'acqua. Finalmente la curva di livello sarebbe anche la curva di equilibrio, in quanto che per essere l'acqua a livello sarebbe anche in equilibrio, ossia stagnante. Queste verità però non possono aver luogo nello stato reale della terra: perciocchè primamente avendo un moto di rotazione la superficie dell'acqua deve tendere a disporsi in una figura ellittica; di più a motivo della diversa densità, e della irregolare configurazione delle parti del globo terrestre sembra che il centro di gravità, verso cui tende l'acqua ed ogni altro corpo terrestre, sia diverso dal centro della figura; e forse che diversi anche sono i centri, ai quali è diretta la gravità de' corpi medesimi. Per lo che rimane primamente indeterminata la curva, a cui termina la superficie del mare, la quale sembra dover essere irregolarmente ondeggiata. Inoltre la superficie del mare non deve essere una superficie d'equilibrio, siccome è provato dalle molte correnti, che vi esistono; ed è bensì vero che queste sono sensibili soltanto in certi siti, ma per la comunicazione, che hanno tra loro le acque, il moto

particolare delle correnti deve essere accompagnato più o meno da un movimento generale delle acque stesse. Ma quand'anco fosse una curva d'equilibrio, non sarebbe possibile il determinarne la natura, giacchè le molteplici forze, che concorrono a produrla, non potrebbero ridursi a calcolo. D'onde parimenti deriva che non possano determinarsi le condizioni che devono avere due punti per essere riguardati come posti tra loro a livello. Nelle ipotesi sopraccennate due punti allora sono a livello, quando sono egualmente distanti dal centro della terra, come per contrario uno è più basso dell'altro, quando il primo è più vicino al centro di quel che sia il secondo. Ma questo non può aver luogo fuori di quella ipotesi, e neppure al caso, che la superficie terrestre fosse esattamente sferoidale. In questo caso tutti i punti situati nella superficie sarebbero allo stesso livello, e nulladimeno non tutti sarebbero egualmente distanti dal centro della sferoide; e quantunque gli uni fossero più vicini al centro stesso, non perciò sarebbero più bassi di livello degli altri più lontani.

47 Queste indeterminazioni non possono produrre un sensibile errore, alloraquando si tratta del livello di due punti che tra loro abbiano una insensibile distanza per rapporto alla circonferenza della terra, onde è che da esse si può prescindere nelle pratiche livellazioni. Ma i principj, che possono valere nel caso di due punti poco tra loro distanti, non possono assumersi per determinare quale debba essere la costituzione generale delle acque marine, e tanto più quanto che oltre alle cagioni indicate di alterazione del supposto livello del mare altre ne sono, le quali sebbene per un certo riguardo possano dirsi estranee, nulladimeno attesa la loro costanza, variata però in diversi siti e tempi, e nella efficacia della loro azione, voglionli riguardare come intrinseche alla reale costituzione del mare medesimo. Tra queste cagioni sono 1. la svaporazione più copiosa che in certe parti della superficie marina interviene in un dato tempo, a motivo della quale può in quella estensione diminuirsi di più l'altezza dell'acqua senza che per l'espansione naturale del rimanente venga nel tempo stesso ristabilita la precedente altezza. 2. L'influenza di copiosi fiumi, le cui acque richiedo-

no un certo tempo per diffondersi equabilmente in tutta l'estensione del mare; e siccome quelle sono continue, così devono mantenere la superficie del mare più elevata a misura che è più vicina al loro sbocco 3. La diversa densità che le acque marine hanno in diversi siti, la quale è varia per diverse cagioni, e massime pel calore, e per la maggiore, o minore quantità di materie saline che tiene sciolte. 4. Le angustie degli stretti di mare e gli avanzamenti di terra ferma, per cui le acque soffrono maggiori resistenze all'equabile loro diffusione. 5. Il flusso, e riflusso. 6. I venti, per cui le acque si accumulano nella direzione, in cui quelli spirano, e col cessare di questi ritroccono formando una corrente. Queste ed altre cagioni fanno che sebbene il mare tenda continuamente a mettersi in equilibrio, pure questo rimanga in diverse parti sbilanciato. Onde vi hanno luogo diversi moti, e correnti, per cui esso si può riguardare come un complesso di fiumi a sponde mobili formate da quella porzione di acqua, che rimane o stagnante, o con insensibile moto.

C A P O V I.

Sulle Paludi.

48 Le paludi sono tratti di terra misti con acqua, che non hanno nè la consistenza di terra, nè la fluidità propria dell'acqua. Queste formano vaste pianure, massime colà dove intervengono interrimenti prodotti da materie trasportate o da' fiumi, o dal mare.

49 Le più celebri paludi d'Europa sono quelle della Moscovia in vicinanza del Tanais, e quelle di Savolax, ed Enafak nella Finlandia. Grandi paludi sono pure nella provincia di Lincoln lungo il mare, e nella Scozia allo sbocco del fiume Ness. L'Inghilterra è parimenti occupata da paludi, che verso il Baltico formano una specie di golfo, d'onde si comincia ad ascendere all'alto paese della Russia. Nella Vestfalia, e in diverse parti de' Paesi bassi le paludi sono frequenti, e tutta l'Olanda sarebbe una palude se l'industria non prevenisse le inondazioni.

50 Nell'Asia tra le principali paludi sono quelle dell'Eufrate, e della Tartaria, e la Meotide. Avvene parimenti in Africa, ma l'America è in gran parte quasi come una continua palude. Tale nell'America meridionale è la Gujana nell'estensione di 120 leghe, cioè dallo sbocco del fiume Cajenna fino a quello delle Amazzoni, il qual tratto è a livello del mare e per fondo ha una fanghiglia. Anche al piede delle Cordilliere e nelle vaste pianure di Buenos-aires sono molti bassi terreni esposti alle inondazioni, ed a ristagni d'acque (a). Ma l'America Settentrionale, ove i paesi piani sono in maggiore quantità che gli elevati, è nella massima parte de' terreni non montuosi occupata da paludi. Così è sulle basse coste orientali che si stendono da Honduras, e bordano l'Yucatan ed il Golfo del Messico, portandosi poi verso la Luigiana, e la Florida, come pure sulle coste situate quasi a livello del mare che stendonli lungo il canale di Bahama fino alla nuova Inghilterra. La Florida, ed i terreni, che di là si stendono verso il Nord, compresa la nuova Inghilterra fino al fiume S. Lorenzo, sono paesi piani, che per più leghe si stendono fino ai monti detti *Apalaches*. All'Havana, ed al lato detto Caies, e nelle baie di Panfaccola, e di Luigiana i terreni dalle maree sono sommersi a grande distanza; ed all'imboccatura del Mississippi l'inondazione del mare si stende fino alla distanza di 15 leghe (b). In questi, ed altri paesi piani, su cui le maree si estendono, l'acqua sempre ristagna a più o meno altezza, e forma terreni paludosi.

51 Le cagioni d'onde le paludi derivano si possono ridurre alle seguenti, cioè l'elevazione o anche l'abbassamento delle acque marine, le escrescenze de' fiumi, le sorgenti, e le acque piovane. Affinchè però queste cagioni producano l'impaludamento di un dato terreno conviene che questo manchi di quella elevazione, e ponzione che lasci luogo allo scolo delle acque che vi pervengono.

(a) Ulloa. *Memoires philosophiques*.

(b) Ulloa l. c.

C A P O V I I.

Su i varj movimenti del mare.

52 I principali movimenti del mare, che o si conservano o si alternano con una certa costanza, si riducono ai seguenti. Il primo è un moto generale, che le acque marine sotto all'equatore, ed a qualche distanza da ambe le parti del medesimo conservano da oriente verso occidente: il qual moto forma quasi una lenta corrente atta a far tre leghe in ventiquattro ore (a).

53 Tra l'Africa e l'America il mare ha una corrente verso il nord-ovest, per cui quel tratto si può quasi riguardare come un vastissimo fiume. Altre correnti sono pure nell'Atlantico, tra le quali le principali sono presso la Guinea, ed hanno una direzione da occidente in oriente, cioè contraria al moto generale delle acque sotto all'equatore: esse però si stendono solo a 20 leghe di distanza dalle coste.

54 Dalla Gujana alle Antille sono correnti così veloci che coi venti appena si possono superare, quando che in cinque o sei giorni si perviene dalla Gujana alle Antille andando a seconda del loro corso. Questa rapidità di corso fece credere a *Cristoforo Colombo* che il mare colà ascendesse, ed il Sig. *Conte di Buffon* riguardando l'opinione di quello scopritore di nuovo mondo come un errore a que' tempi escusabile attribuisce tali correnti alla velocità de' molti fiumi influenti nel mare la quale si conservi, e si comunichi alle acque marine anche in molta distanza. A ben considerare però l'influenza di que' fiumi, i quali per se non sono molto veloci, ma però copiosi di acque per la ragione sopra arrecata (§. 47), deve mantenere fino ad una certa distanza dalle coste le acque assai più elevate, e produrre per conseguenza rapide correnti; ed in ogni modo è manifesto, che l'acqua di una continua corrente deve verso l'origine del suo corso avere una maggiore elevazione; onde è anzi erro-

(a) *Soncrat Voyag. aux Ind. Orient.*

re inescusabile in ogni secolo il riguardare come falsa l'accennata opinione del *Colombo*.

55 Tra le correnti alcune hanno una direzione alternativa, cioè ora tengono una direzione, ed ora un'altra contraria. Così alle Maldive, e tra mezzo a tutte le isole del mare delle Indie le correnti vanno come i venti, cioè a dire per sei mesi sono dirette da oriente in occidente, e per altri sei mesi vanno in contraria direzione.

56 In alcuni siti trovansi anche due, o più correnti opposte, e ciò in due modi, in quanto che talora una è a fianco dell'altra, ovvero l'una è al di sotto dell'altra. Le correnti laterali opposte osservansi spesso anche nei laghi, e nei fiumi massime lungo le rive. Il *Conte Marfigli*, e prima di lui *Procopio* riconobbe simili correnti al passaggio dei Dardanelli, altre pure ne osservò al canale di Costantinopoli. Parimenti allo stretto di Gibilterra entra dall'Oceano una corrente verso la costa d'Africa, e va proseguendo per tutte le coste del Mediterraneo sortendo dal medesimo stretto sulla costa d'Europa. (a) Le correnti sopraposte furono diligentemente riconosciute dal Sig. *Des landes* nelle vicinanze del Capo Gonsalves, e di S. Caterina verso la Guinea in Africa. Egli alla distanza di sette leghe da terra trovò in un'altezza d'acqua di 50 braccia francesi varie correnti contrarie, la cui velocità era di mezza lega, ed anche di una lega per ora. Queste però non sono permanenti, giacchè nel corso di due mesi e mezzo, in cui continuò le osservazioni, solo si manifestarono per lo spazio di un mese in diversi tempi, e nelle interruzioni la marea discendeva totalmente nel golfo della Guinea.

57 Le cagioni delle correnti sono in gran parte quelle stesse, che impediscono nel mare un esatto livello, ed equilibrio. Tali cagioni in diversi tempi, ed in certi tratti di mare producono nell'acqua una maggior elevazione, e pressione, per cui prevale in forza, e prende un certo corso; e dagli ostacoli che nel suo corso incontra, e dagli stretti, per cui

(a) V. sulle Correnti l'opera di M. *Marcadier*.

cui deve passare, è determinata a prendere una direzione anzi che l'altra. Se avvenga che l'acqua nella direzione principale incontri qualche ostacolo, essa si riflette, e per tal riflessione si ha nella prima corrente la cagione di altra contraria. Le correnti indicate tanto più facilmente devono intervenire colà dove vasti mari comunicano per uno stretto angusto, come sono l'Oceano, ed il Mediterraneo, onde non ostanti i dubbj del Sig. *de Buffon* (a) non può negarsi ciò che molti hanno scritto, cioè che allo stretto di Gibilterra sieno correnti contrarie.

58 Da cagione del tutto particolare dipende un altro moto del mare consistente nel flusso, e riflusso. L'attrazione della Luna è il principale agente. L'effetto è di far per un certo tempo rialzar il mare in una certa estensione, dopo del qual tempo torna ad abbassarsi. Le maree che per questo moto vengono prodotte si diffondono massime dall'Oceano, e riescono più o meno sensibili in altri mari secondo che è più o meno ampia la comunicazione che questi hanno con quello: onde è che nel Mediterraneo, e nel Baltico non sono molto sensibili; esse inoltre in circostanze eguali giungono più tardi nei siti più lontani. La loro altezza in diversi siti è varia. La media è di circa 15 piedi, ma per l'angustie degli stretti, e per opposizione degli sporgimenti di terra ferma talora si alzano con violenza fino a 100, ed anche 200 piedi (b).

C A P O VIII.

Su i cangiamenti di mare in terra, e di terra in mare.

59 Egli non è da dubitare, che le acque sieno un tempo pervenute sino alla sommità de' più alti monti. Una prova convincente si presenta nelle conchiglie, ed altri corpi

Tom. V.

Bb

(a) Hist. nat. Vol. I.

(b) *Pallas* observat. sur la formation des montagnes pag 43. sul flusso V. la *Lande Astronomie* lib. XXII. dell'ediz. 2.

marini, che trovansi fino all'altezza di 2200 tese sopra il livello del mare presente; la quale altezza nel generale dei monti è tra le maggiori. Ed è bensì vero, che sonovi alcuni monti, i quali sono superiori di circa 1000 tese all'indicata altezza, ma è facile ad attenderli che le acque dovettero avere una elevazione molto maggiore di quella in cui trovansi que' corpi marini. Questi per lo più sono sparsi, ed inseriti dentro a materie calcaree al presente indurite in pietra, le quali in origine dovettero essere stemperate, e sospese nell'acqua, da cui finalmente si separarono per deposizione. Ora affinchè le acque potessero depositare in que' elevati siti gl' indicati corpi esse dovevano essere affai più elevate; dovettero cioè que' luoghi essere come fondi di mare, e siccome al presente le acque del mare sono generalmente elevate sul fondo circa 1000 tese, così d'altrettanto dovettero allora essere elevate al di sopra delle deposizioni che lasciarono.

60 Tra queste proposizioni, le quali hanno tutta l'apparenza di verisimiglianza, alcune certamente avrebbero bisogno di pruove per essere ridotte ad una certa evidenza: queste però, siccome dipendono da altri principj non ancora da me stabiliti, perciò io riservo ad altro luogo.

61 Tra questi è la determinazione del modo, con cui le acque pervennero all' indicata altezza di 2200 tese, ed anche maggiore, e due sono le maniere, con cui potettero pervenirvi. Primamente si può supporre che la terra ferma in origine fosse occupata dalle acque, e che quelle vi sieno rimaste per lungo tempo, nel corso del quale si sieno poco a poco ritirate, ed abbassate fino al livello presente. In secondo luogo si può dire che anteriormente all'accennata elevazione delle acque il mare fosse molto più basso di livello, e che per una straordinaria inondazione sianli rapidamente elevate, e quindi in breve tempo ritirate. La prima maniera riducea ad una tranquilla e permanente, la seconda ad una straordinaria e passeggera inondazione.

62 Il Sig. Conte di *Buffon* si studiò di dare alla prima tutte le più efficaci pruove; e se quella avesse avuto luogo, ne seguirebbe in riguardo all'oggetto presente, che la terra ferma ora abitata dall' uomo sarebbe dovuta ad un successivo cangiamento di mare in terra.

63 Ma a suo luogo sarà dimostrato, che le pruove di quella ipotesi sono appoggiate a false osservazioni, e che realmente intervenne una straordinaria, e passaggio inondazione: nel qual avvenimento intendei che la terra fu soggetta a due rapidi cangiamenti, l'uno di terra in mare, e l'altro di mare in terra.

64 Questi cangiamenti però furono generali a tutto il globo, ed ebbero singolari cagioni. Ma oltre a questi sono vi de' cangiamenti parziali derivanti da generali cagioni, e di questi, i quali possono essere oggetto di osservazioni locali, è qui luogo di parlare.

65 In tale proposito comincerò a dire di que' cangiamenti, che sono confermati da fatti storici, o da positive osservazioni, quindi ne esporrò le diverse cagioni, e finalmente esaminerò se certe mutazioni da altri congetturate o immaginate sieno conformi al vero.

66 Tra i cangiamenti di terra in mare si rammemorano dal Sig. Conte di *Buffon* i seguenti. L' isola di Ceylan dal lato di nordovest ha perdute 30 a 40 leghe di terreno che furono occupate dal mare. Il mar Baltico ha guadagnato poc' a poco una considerabile parte della Pomerania, ed ha coperto, e rovinato il famoso porto di Vineta. Il mar di Norvegia ha formate varie piccole isole, e si è avanzato nel continente. Un avanzamento verso l' Olanda presso di Catt ha pure fatto il mare di Alemagna, così che le ruine di un' antica cittadella de' Romani, che già era sulle coste, ora sono molto addentro nel mare. Nell' anno 1446 una grande inondazione fece perire più di 10 mila persone nel territorio di Dodrecht, e più di cento mila nella Frisia, e nella Zelanda, nelle quali due provincie furono sommersi circa 300 villaggi, le torri dei quali spuntano ancora colle loro sommità fuori dell' acqua. Le terre di Godwin nell' Inghilterra, che erano coltivate, ora sono sabbie coperte dal mare. Platone nel *Timeo* racconta che gli antichi sacerdoti dell' Egitto (600 anni avanti l' era cristiana) assicuravano, che presso le colonne d' Ercole era un' isola detta Atlantide più grande dell' Asia, e della Libia prese insieme, e che questa per un grande tremuoto fu sobbissata, ed inondata dal mare per un' alluvione che durò un giorno, ed una notte.

Su di ciò il Signor *de Buffon* osserva che queste terre sommerse sono forse quelle che univano l'Irlanda colle Azorie, e queste al continente dell'America: giacchè in Irlanda trovansi gli stessi fossili, e le stesse conchiglie, e produzioni marine che sono nell'America, delle quali alcune sono diverse da quelle che osservansi nel resto d'Europa.

67 Più copiose, e certe sono le mutazioni di mare in terra, attesa la grande moltitudine di fiumi che ai loro sbocchi in mare conducono immensa quantità di materie terrestri ricolmandone i vicini fondi, e rialzandone le spiagge. L'isola di Faros, che secondo *Omero* era distante dall'Egitto il cammino di 24 ore, al presente vi è quasi contigua a motivo de' prolungamenti delle spiagge prodotte dal Nilo. Il terreno d'Olanda che ora è quasi a livello del mare, e che secondo *Buffon* altre volte in diversi siti era più basso di circa 50 piedi, fu pure sottratto al mare per mezzo degl' interimenti condottivi dalla Mosa, dal Reno, e da altri fiumi. Il Mississippi al di sotto della nuova Orleans formò una vasta punta di sabbie e terre, che già fu osservata dal *P. Charlevoix* (Voy. p. 440. t. 3.), il quale aggiugne che allo sbocco di altro fiume dell'America vide arrestarsi gli alberi in grandissima quantità, i quali ricoperti di fanghiglia non solo mutano il mare in terra ferma, ma dopo dieci anni lo popolano di boschi che germogliano dagli alberi seppelliti. Un simile trasporto di alberi ha ricolmato alla profondità di 50 piedi e più un tratto di mare vicino a Bruges nelle Fiandre, ed un altro a Youl nella provincia di Yorck. Ma non è necessario aggiugnere esempj di cangiamenti di mare in terra prodotti da interimenti de' fiumi. La cosa è manifesta dalla fisica costituzione de' fiumi, e può essere da ognuno verificata in qualunque fiume che sbocchi non solo in mare, ma in qualunque lago: e se il prolungamento delle spiagge agli sbocchi talora non è molto sensibile, ciò deriva massimamente dall'azione delle acque marine, le quali corrodono le spiagge stesse, e trasportano altrove le materie depositatevi. Dai trasporti delle terre depositate dal Pò al suo sbocco è probabilmente stata aumentata la spiaggia di Ravenna, che ora non è più città marittima, sebbene già v' esistesse un porto degli Esarchi.

68 Nella provincia di Kent nell'Inghilterra un porto di mare a Hith si è ricolmato di sassi, conchiglie ec. non ostanti le diligenze e pre-nure per tenerlo espurgato. Parimenti la gran palude di Lincoln, e l'isola d'Ely si riguardano come terre abbandonate dal mare. *Uberto Thomas* nella descrizione del paese di Liegi scrive, che il mare al presente è distante 35 leghe dalla città di Tongres, quando che gli anelli esistenti nelle mura di quella città destinati ad attaccarvi le navi pruovano che le acque giugnevano sino alle mura stesse. *M. Barrere* (presso *Buffon* t. 1. p. 597.) scrive che Aigues-mortes era un porto ai tempi di S. Luigi Re di Francia, e che ora è distante dal mare più di una lega e mezza. Parimenti Psalmodi era un'isola nell'anno 815, ed ora è in terra ferma in distanza di più di due leghe dal mare. Lo stesso è di Maguelone.

69 Sonovi pure de' terreni, i quali alternativamente sono coperti di acqua, e scoperti: nel qual caso sono varie isole della Norvegia, della Scozia, e delle Maldive, come pure al golfo di Cambaje ec. Questa alternativa dipende dalle escrescenze de' fiumi, ed anche del mare, le quali in certi tratti intervengono o per l'azione dei venti, o pel flusso, e riflusso.

70 I cangiamenti esposti sono una minima parte di quelli che devono essere realmente accaduti; e molte pur sono le cagioni che possono, e sogliono concorrere a questi effetti, le quali io qui verrò esponendo, e serviranno anche alla spiegazione di que' fatti, che dagli Storici furono raccontati senza esporne le circostanze.

71 Un tratto di terra può divenir mare 1. se l'acqua si alza di livello. 2. se quel tratto di terra si abbassa al di sotto del livello precedente del mare. 3. per corrosioni operate dalle acque marine.

72 L'alzamento di livello può essere prodotto 1. da aumento dell'acqua marina. 2. da diminuzione del recipiente dell'acqua stessa, la qual diminuzione può provenire o da rialzamento del fondo, o da restringimento delle sponde del recipiente.

73 L'abbassamento dei terreni non di rado accade, e ciò per più motivi, cioè 1. per tremuoti. 2. per cedimen-

ti sotterranei. 3. per restringimento della materia terrestre in altezza, come avviene nei terreni torbivi. 4. per corrosioni prodotte in superficie dalle acque marine, e dai fiumi. 5. per detrazione di terre, e sabbie operate dai venti.

74 Le corrosioni operate dalle acque marine provengono dai diversi moti che quelle hanno, e che più sopra furono esposti.

75 Tutte le cagioni che nei §§. 71 72 73 ho accennate come atte a produrre cangiamenti di terra in mare hanno realmente luogo in diversi siti e tempi, eccetto quella che consistette nell'aumento dell'acqua marina, giacchè, come più sotto sarà provato, sembra anzi che questa tenda a diminuirsi.

76 Dalle cagioni stesse per contraria ragione si possono rilevare quelle, per cui alcuni tratti di mare si possono mutare in terra ferma. Questo può intervenire 1. se il mare si abbassa di livello. 2. se un tratto di terra, che per innanzi era più basso di livello del mare, si alza al di sopra del medesimo.

77 L'abbassamento di livello nel mare può intervenire 1. per diminuzione della massa acquea. 2. per aumento del recipiente. 3. per l'una, e l'altra cagione insieme.

78 Al rialzamento di un tratto di terra possono concorrere 1. gl'interrimenti prodotti dalle materie terrestri, che i fiumi continuamente conducono al mare. 2. le sabbie, e terre che dai venti vengono trasportate e depositate sulle spiagge marittime. 3. le materie che il mare trasporta, e depolita in certi siti. 4. le eruzioni vulcaniche. 5. gli aumenti della vegetazione intervenienti massimamente nelle vaste torbiere, quali sono nei Paesi bassi.

79 I depositi delle materie trasportate dal mare si fanno massimamente colà dove le maree, le correnti, ed altri movimenti del mare o si rallentano, o s'incontrano in contrarie direzioni (a).

(a) All'incontro delle maree opposte, che depongono sabbie, e fanghiglia, meritamente attribuisce il Sig. Ab. Mann la formazione dei banchi esistenti sulle coste dell'Olanda, e del

gran Banco chiamato Doggers-banc, che trovasi tra l'Inghilterra e il Jutland, e che traversa quasi tutto quel mare. Mem. de l'Acad. R. I. de Bruxelles t. 2.

80 Tra le cagioni esposte come atte a produrre un cambiamento di mare in terra ferma alcune richiedono qualche dichiarazione. Primamente è da vedere quali sieno le cagioni, per cui debba intervenire una diminuzione nella quantità delle acque marine. Una di queste è l'aumento de' ghiacci sì alpini, che polari. I ghiacci alpini sono formati da vapori acquei, che in massima parte si alzano dal mare, e che alle alpi si mutano in nevi, e ghiacci, di cui una considerabile porzione vi si perpetua, e non più ritorna al mare. I polari in parte sono formati in simile maniera, ed in parte dall'immediato agghiacciamento dell'acqua marina. Per lo che i ghiacci alpini sono una reale sottrazione di acqua del mare, per cui questa deve diminuire di altezza; ma i polari sebbene la diminuiscano nella massa in quella porzione, che rimane perpetuamente agghiacciata, pure non vi producono una diminuzione d'altezza proporzionata alla massa sottratta: perciocchè di questi ghiacci una porzione occupa nel mare press' a poco quello stesso sito che per innanzi vi occupava in forma di acqua, e però non devono produrre in esso una diminuzione di altezza se non per riguardo a quella loro porzione che galleggia fuori dell'acqua, e la quale si aumenta, come dissi, nello stesso modo che interviene nei ghiacci alpini.

81 Un'altra cagione della diminuzione dell'acqua marina è che una porzione considerabile di questa si combina nella formazione, ed aumento dei corpi organizzati, cioè degli animali, e vegetabili viventi massimamente in mare; e sebbene quella in gran parte nuovamente se ne separi, massime dappoichè hanno cessato di vivere, pure una considerabile porzione rimane combinata coi residui terrei de' corpi medesimi. Ciò vedesi nei vegetabili anche terrestri i quali risolvonsi in una terra che sempre contiene acqua: e che continuamente aumenta la massa terrea. Lo stesso massimamente si riconosce nelle conchiglie, nei coralli, ed altri litofiti, li quali anche dopo la morte de' loro abitatori ritengono la natura di terra combinata con acqua: ma perciocchè questi corpi marini rimangono sempre nel mare, ed in questo entrano continuamente materie terrestri rimaste dai vegetabili, ed animali scomposti, perciò la diminuzione del-

le acque marine proveniente dalla combinazione di esse coi corpi organizzati non deve produrre una diminuzione nell'altezza delle medesime, giacchè il volume d'acqua sottratta al mare per l'accennata combinazione è compensato abbondantemente dal volume dei loro residui che o continuamente rimangono, o successivamente entrano in mare.

82 Quanta sia la diminuzione interveniente nell'acqua marina non è determinabile. Qualunque però sia, essa deve avere certi limiti, giacchè tal diminuzione proviene massimamente dall'aumento de' ghiacci; e l'aumento di questi, come fu provato, ha certi limiti. Oltre a ciò l'aumento dei ghiacci alpini concorre in parte all'aumento delle acque de' fiumi che ritornano al mare, così che per questo titolo la diminuzione dell'acqua marina riesce minore.

83 Quanto all'aumento del recipiente delle acque marine, quello può intervenire per abbassamento del fondo del mare, il quale accaderebbe quando al di sotto di esso esistessero delle cavità, e si aprisse una comunicazione tra esse e le acque del mare. Che molte cavità esistano nella massa terrestre è da me altrove provato; e che tra queste ed il recipiente del mare si aprano di quando in quando nuove comunicazioni è facile a conghietturarsi dalle varie cagioni che possono operare tal effetto. Tra queste sono i tremuoti, le eruzioni vulcaniche, la continua pressione, ed azione delle acque marine, la quale può rompere le pareti, che cuoprono quelle cavità, alloraquando quelle sieno divenute di poca consistenza.

84 Finalmente l'effetto dei venti nel trasporto delle minute sabbie e terre si riconosce in molte spiagge esposte a forti venti. Nell'Olanda veggonsi in tal modo formate molte collinette, che *Dune* si chiamano; nella Francia in vicinanza della città di S. Paolo di Leon dopo il 1665 fu abbandonato un tratto di terra a motivo delle copiose sabbie, che vi si accumularono fino a coprire i camini delle case: l'origine del qual danno è una spiaggia coperta di sabbie (a) che si stendono da S. Paolo fino a quattro leghe,
e che

(a) Acad. R. des Sciences an. 1722.
Nei deserti vedesi anche più sensibil-

mente l'accennato effetto dei venti sulle sabbie. Il Sig. Volney ne' suoi

e che dai venti vengono trasportate, e dai depositi di mare sono continuamente rinnovate. Finalmente sulle coste occidentali sì della Francia, che della Spagna e dell'Africa i venti di ovest spesso formano simili ammassi di sabbie.

85 Dalle cose esposte è manifesto, che alcune cagioni tendono ad aumentare la terra ferma, altre a diminuirla, mutandola in mare; altre finalmente tendono a produrre simultaneamente e reciprocamente ambedue questi generi di cangiamenti. In questa classe sono gl' interimenti provenienti dai fiumi, giacchè nel mentre che quelli vanno ad occupare una parte dell'alveo marino, e rialzandola al di sopra del precedente livello delle acque, la mutano in terra ferma, fanno rialzare le acque stesse, e le obbligano ad inondare altrove quelle spiagge che per innanzi erano più elevate del mare, ma che per l'indicato rialzamento di questo divengono al medesimo inferiori. Un simile effetto producono anche le materie corrose, e trasportate dall'acqua marina, le quali riducono la terra in mare nei siti d'onde la trasportano, e mutano spesso il mare in terra nei siti dove la depositano.

86 Quindi per determinare in generale se la terra ferma siasi aumentata o diminuita, e quale di questi due generi di cangiamenti sia per prevalere nella successione de' tempi, converrebbe conoscere in particolare l'effetto di ciascuna delle esposte cagioni, e quindi determinare la differenza tra gli aumenti e le diminuzioni: il che, attesa la vastità del globo terraqueo, la irregolarità della sua superficie, e la molteplicità delle variazioni di cui per un dato tempo dovrebbero tener conto, è cosa superiore alle osservazioni ed alle teorie. E quando pure si pensasse ad avere qualche precisa determinazione su tali cangiamenti sarebbe prima di tutto necessario che molti osservatori in diversi siti fissassero sulla terra ferma certi punti per poter da questi riconoscere se nel mare in un certo tempo intervenga una permanente mutazione nell'altezza del suo livello.

Tom. V.

Cc

viaggi per l'Egitto nota, che nel deserto d'Africa adjacente all'Egitto sono colline di sabbia formate dai

venti a tale altezza, che sommergono gli alberi di Palme.

87 Esaminando ora i cangiamenti sopra esposti, ed altri simili, che alle storie, o alle osservazioni sono appoggiati, facilmente si ritroverà la loro cagione riposta in alcune di quelle che sopra accennai, e massimamente negl' interrimenti provenienti da' fiumi, e nelle corrosioni fatte dalle acque marine.

88 A determinare però quale cagione abbia realmente influito in un dato cangiamento converrà esaminarne le circostanze particolari, le quali per altro dagli Storici sogliono essere ommesse. Così per distinguere se un interrimento sia provenuto dai fiumi o dal mare servirà spesso l'esame delle materie depontate, le quali, se conterranno copiose conchiglie marine in istato naturale, indicheranno che la deposizione fu operata dal mare; in questo caso è il soprannominato porto di Hith nell' Inghilterra. Dall'esame delle circostanze parimenti dipenderà il riconoscere come sia intervenuto il sobbissamento di que' 300 villaggi che sopra accennai, e se questo, ed altri simili accidenti, che nell'Olanda, e nei Paesi bassi non sono rari, sieno provenuti da abbassamento di terreno, o da rialzamento permanente del mare. Esaminando quelle basse, e vaste pianure vedesi in esse manifestamente che sono soggette ad abbassarsi. Que' terreni per la maggior parte sono composti o di sabbie inobili, e poco consistenti, ovvero di torbe molli, e soffici (a). Le sabbie pel continuo disseccamento divengono sempre più cedevoli, e meno consistenti; la torba, quando si dissecca, restringesi circa di un terzo. Essendo pertanto sì le une che le altre riducibili in minor volume, esse per il loro proprio peso si vanno comprimendo, ed abbassando, e con esse si abbassano anche gli edifizj soprappostivi, come sono le case, e gli argini. Quindi se il mare si va poc'a poco stendendo su quelle basse spiagge, e se va diminuendosi la distanza verticale tra la superficie del mare e la sommità di quegli edifizj, come realmente in alcuni siti interviene, ciò deve ascriversi al successivo abbassamento de' terreni, e degli edifizj medesimi. Che se avvenga che per una straordinaria escrescenza del mare,

(a) *De Lue* Lettres Physiques ec. tom. 4. & 5.

che suol procedere da qualche furiosa tempesta accompagnata da una forte marea, le acque inondino ad una certa altezza que' terreni, allora per il peso delle acque stesse compri-
messi rapidamente ed a molta profondità il terreno sottopo-
sto, e talora viene così abbassato al di sotto del livello ordi-
nario del mare, e perciò il sobbissamento rimane costante
anche dopo di essere cessata la straordinaria inondazione: in
tal maniera deve essere intervenuto il sopraccennato sobbissa-
mento, come pure la formazione del golfo Zwyder-see ac-
caduta nel 1222 (a). All'abbassamento di que terreni dee
pur concorrere un'altra cagione; e questa è riposta nella in-
filtrazione delle acque, che per vie sotterranee si scaricano
in mare, le quali devono formarvi continue, e frequenti
corrosioni, e lasciarvi molti spazj vuoti, e così lasciar luo-
go a continue depressioni del terreno. Certamente i soprac-
cennati effetti non possono ascriversi a rialzamento del livel-
lo del mare, giacchè, se questo fosse reale, dovrebbe offer-
varsi egualmente anche nelle vicinanze di quelle basse spiag-
ge. Ma dove il terreno è fermo, non si riconosce veru-
na mutazione di livello; e dove è cedevole, l'apparente e-
levazione è varia in varj siti cioè secondo che il terreno
più o meno si abbassa. Gli accennati sobbissamenti non so-
no dunque argomento di elevazione costante di livello del
mare, anzi devono essere accompagnati da un abbassamento
generale di livello, il quale per altro non può essere che
insensibile, cioè proporzionato alla espansione delle acque ma-
rine di que' tratti di terra inondati, che sono assai piccoli
in confronto della superficie del mare.

. Cc ij

(a) Il livello del mare lungo i Paesi Bassi è variabile a motivo delle maree: la qual variazione nella Fiandra marittima è di piedi $17\frac{1}{2}$, essendo di altrettanto la differenza tra le alte e le basse maree: altronde que' paesi in diverse parti declinano dalle dune verso l'interno de' medesimi; così per esempio quasi tutta la Fiandra marittima (tom. 2. Ac. R. de Brux.) in una estensione di circa 5 leghe in di-

stanza dal mare trovasi nelle parti più basse lei fino a nove piedi al di sotto del livello delle alte maree, qua do che in vicinanza delle dune è circa tre piedi più elevata del livello medesimo. Da che tanto più facilmente intendosi, come dopo certe straordinarie escrescenze possono essere rimasti costantemente inondati alcuni tratti di que' paesi.

89 In simile modo si riconoscerà che l'esserfi trovati a Venezia due pavimenti uno sopra l'altro, dei quali uno era al di sotto del livello del mare, è argomento anzi di abbassamento di terreno che di elevazione del mare: giacchè è manifesto che quella città è fondata su un terreno paludoso, e cedevole.

90 Peraltro tra le storie dei cangiamenti sopra esposti alcune ne sono, le quali non hanno quella certezza che il Sig. *de Buffon* facilmente vi suppone. Così il ritiro del mare da Tongres, e gli anelli residui in muri vicini a quella città dopo l'esame fattone sopra luogo dal Sig. *de Luc* (a) devonfi annoverare tra le vane credulità di quel popolo. Parimenti il sobbissamento dell'Atlantide non è riportato con dettagli sufficienti a poterne formare una chiara idea.

91 E' ora da vedere quanto sieno da valutare i grandi cangiamenti di mare, che il Sig. *Conte de Buffon* stima di aver rilevati non da storie, ma dai monumenti molto più autentici di natura. Egli, che molto osservò sulle carte geografiche, vuole primamente che tra i tropici sieno state corrose le coste orientali dei continenti per una estensione di circa 500 leghe. In pruova di che assume il moto del mare da oriente in occidente prodotto massime dalla rotazione del globo intorno al suo asse, come pure le ineguaglianze della superficie terrestre, le quali egli dice essere maggiori tra i tropici che altrove. Parimenti egli stima che i principali seni e stretti di mare sieno diretti da oriente in occidente, e che perciò essi sieno stati scavati dall'azione delle acque marine in virtù del loro moto poc' anzi indicato.

92 Questi fatti però, che egli adduce per provare la corrosione delle coste orientali, e la scavazione dei principali seni e stretti di mare, o non sono veri, o non provano il suo assunto. Primamente non vedesi come tra i tropici esistano le maggiori ineguaglianze del globo. In questo tratto stendesi nel mare una parte dell'America, dell'Africa, e dell'Asia, e sono sparse molte isole. Ora se per maggiori ineguaglianze intende una maggiore quantità di corrosioni,

(a) *D^e Luc*. l. c.

questa non può comprovarti se non dall'esistenza di una maggiore quantità di mare in confronto della terra ferma: ed in tal modo dovrebbero riguardarli come maggiori le ineguaglianze che esistono fuori dei tropici, e che sono contenute tra il polo australe ed il tropico del capricorno, giacchè in questo tratto l'estensione del mare in confronto della terra ferma è molto maggiore di quel che sia tra i tropici. Che se per disuguaglianze maggiori intende una maggiore irregolarità nel contorno dei continenti e nelle isole, difficilmente la cosa sotto tale aspetto potrà estimarsi, ed in ogni modo le disuguaglianze in questo senso appariranno maggiori tra il polo boreale ed il tropico del cancro, che tra i tropici. Se finalmente si estimano le maggiori ineguaglianze dalla maggiore quantità di montagne, com'egli sembra fare (pag. 585. t. 1. Hist. Nat.), neppure in questo senso la sua proposizione può aver luogo: giacchè è bensì vero, che le più alte montagne sorgono in vicinanza dell'equatore; ma se dal tropico del cancro verso il polo boreale si prende una zona di circa 47 gradi, cioè eguale al numero di gradi della zona contenuta tra i due tropici, si troverà che in quella esiste una quantità di monti maggiore che in questa. Non si può adunque ammettere, che le principali disuguaglianze del globo sieno tra i tropici. Ma neppure è vero, che i principali seni, e stretti di mare sieno diretti da levante a ponente. I seni da lui rammentati sono quelli di Magellan, e di Hudson, ed i due di Forbisher; gli stretti sono quelli di Ceylan, di Corea, e di Kamtschatka. Ora questi, per quanto rilevasi dalle carte geografiche, non sono certamente nella direzione di levante a ponente: e quand'anco lo fossero, non servirebbero al suo intento, giacchè quasi tutti sono fuori dei tropici, cioè fuori di quella zona, dentro la quale egli ripone la cagione dell'escavazione de' seni, e stretti nella supposta direzione; ed è pure da osservare che anche altri dei principali stretti, come quelli di Gibilterra, e del mar Baltico, non solamente sono fuori dei tropici, ma inoltre sono scavati in direzione contraria alla da lui supposta, essendo la loro apertura manifestamente situata sulle coste occidentali.

93 Venendo ora al moto del mare da oriente in occi-

dente, questo certamente esiste, ma non può aver prodotto gli effetti che il Sig. *de Buffon* gli ascrive, mentre quello stendesi a poca distanza dall'equatore, ed è così piccolo che fa solamente tre leghe in 24 ore. Oltre a che dal trovarsi corrofe le coste orientali non può, come egli fa, assumersi quel moto come cagione di tal corruzione, giacchè noi troviamo molto corrofe anche le occidentali. Che anzi se quelle coste devono riguardarsi come più corrofe, le quali sono più ripide, e sono in maggior vicinanza delle montagne, noi dovremo dire che le occidentali sieno state più corrofe delle orientali. Certamente occidentali sono le coste d' America, lungo le quali si stendono le Cordilliere; e quelle sono assai più ripide delle orientali, sulle quali stendonfi le vaste pianure di Buenos-aires. Che debbanfi riguardare come più corrofe le coste più ripide, e che le occidentali sieno più ripide delle orientali è principio ammessò dallo stesso *Buffon*. il quale alla pag. 129 del Tomo V. de' Supplementi dice che il moto delle acque d'oriente in occidente ha travagliata la terra in questo senso, e per pruova adduce, che in tutti i continenti la pendenza delle terre considerata dalla sommità delle montagne è sempre più ripida dal fianco d' occidente, com' è nelle Cordilliere, che da quello d'oriente. Ma in questo luogo egli suppone che il moto delle acque abbia corrofe le coste occidentali, quando che altrove ascrive a tal moto la corruzione delle coste orientali, come dovrebbe essere realmente se tal moto fosse atto a produrre sensibili corruzioni; la qual contraddizione fu pure notata da *M. de Maritz* (pag. 180 tom. 1. *Phylique du Monde*). Comunque però siasi, egli è certo che la mutazione di terra in mare nella estensione di 500 leghe sulle coste orientali dell' America non ha nessun fondamento; anzi sembra che su queste coste debba aver luogo la mutazione di mare in terra, attesi i vastissimi fiumi che vi formano continuamente un' immensa estensione d' interrimenti, i quali sono molto maggiori delle corruzioni che da quel moto delle acque possono esservi operate.

94. Per altro è ben singolare, che il Sig. *de Buffon* riguardi i seni, e gli stretti come cangiamenti di terra in mare, e determini le corruzioni dei continenti senza avere pri-

ma stabilito quale stato avesse il globo al principio dell' avvenimento di questi cangiamenti . Ogni cangiamento è un rapporto tra uno stato antecedente ed altro susseguente ; e la determinazione di questo secondo dipende dal primo : onde non avendo egli stabilito quale fosse la costituzione della terra allorchè suppone che abbiano avuto principio le escavazioni dei seni, o stretti, e le corrosioni dei continenti, facilmente conchiudesi che questi cangiamenti sieno arbitrarij.

95 A simili opposizioni sono soggetti tutti gli altri simili cangiamenti, che egli conghiettura ; e molto più quelli coi quali intende a provare che la terra ferma risulta da successiva mutazione di mare in terra proveniente da un continuo abbassamento del livello del mare. Egli (a) per esempio riguarda come una terra nuova lasciata da abbassamento del mare quel vasto tratto di palude, che è tra lo sbocco del fiume di Caienna e quello del fiume delle Amazzoni, e ciò appoggia a due fondamenti. Il primo è che le colline, in cui va a terminare questa palude dalla parte di terra ferma, sono coperte di molta terra vegetabile; l' altro è che in una di queste colline detta Gabriele avvi un piccol lago abitato da cocodrilli detti Caymans . Ma la situazione di questa palude, che è posta tra i due accennati vastissimi fiumi, indica abbastanza, che quella è anzi un acquisto che la terra ferma va facendo per rialzamento operato dalle materie da quelli depontate nell' alveo marino . Nè l' esistenza della molta terra vegetale sulle colline è argomento che questa sia un deposito fattovi recentemente dal mare, il quale in seguito liati abbassato; giacchè molte sono le colline anche nell' interno de' continenti che sono composte in gran parte di terra vegetale . nè perciò si riguardano come prodotte da recenti depositi marini . Finalmente l' abbassamento del mare in quel tratto sarebbe in qualunque modo provato dall' esistenza de' cocodrilli nell' indicata collina, quando questi per natura vivessero soltanto in mare . Ma la stessa loro esistenza nell' accennato lago, che non comunica col mare, è argomento deciso, che questo non è necessario alla loro vi-

(a) Supplem. t. V.

ta, onde possono ora esistervi, ed avervi per antico vivuto senza che siavi stato mare. Altro argomento di abbassamento del mare egli trova negli aumenti di terra ferma che si riconoscono sulle coste dell'Oceano verso la Francia, e l'Olanda, e sul Mediterraneo nella Provenza; d'onde conchiude che quando si osservasse in tutto il mondo, vedrebbe che il mare generalmente si ritira dappertutto e ciò per abbassamento delle acque, le quali egli stima che si ritirino in caverne sotterranee. Ma gl' indicati aumenti di terra ferma, come altrove provai, provengono massimamente da interimenti, nè in alcuno di essi mai si riconobbe un indizio che dimostrasse abbassamento di livello nelle acque marine. Che se generalmente si osserverà quali cangiamenti in questo intervengano, risulterà che il mare anzi che abbassarsi tende ad alzarli, sebbene però press' a poco si compentino le cagioni influenti sì nell'abbassamento, che nell' elevazione di livello delle acque marine.

96 Per le cose esposte si può conciliare l' opposizione, che nelle osservazioni talora appajono, delle quali alcune comprovano l' elevazione del livello del mare, altre l' abbassamento. Certamente se si considera la sola naturale diffusione delle acque, l' aumento, e la diminuzione deve essere comune in tutta l' estensione marina. Ma il livello, come fu accennato nel Capo V., viene modificato da diverse cagioni parziali, e variabili. Per esempio le maree producono in un dato sito una certa elevazione di acque, la quale dipende anche dalla situazione e costituzione delle coste, e degli stretti circostanti; e siccome tale costituzione non di rado si muta, così può mutarsi in modo che le maree in certi siti producano nelle acque una maggiore, ed in altri una minore elevazione.

C A P O IX.

Sulla costituzione generale dei monti.

97 Passando dal mare in terra ferma, questa si presenta in tre forme principalmente, cioè o si stende in vaste pianure, o ascende in dolci pendenze, o si alza in ripidi monti.

ti. Le pianure in una certa distanza dal mare sogliono mutarsi in mediocri pendenze; a queste ordinariamente succedono piccole colline, dalle quali si passa ad alte montagne, e queste, allorchè si succedono in una certa estensione, formano quelle che si chiamano catene di monti.

98 Tra le pianure sono varj deserti. Quelli dell' Arabia ora sono piani, ora ondeggianti con prominenze di scogli, e rupi. Così è da Aleppo fino al mare d'Arabia, e dall' Egitto al golfo Persico in uno spazio lungo 600 leghe, largo 300 (a). L'inverno non vi piove; trovasi bensì acqua dappertutto nella profondità di sei fino a 20 piedi, ma è salmastra, come lo è in tutto il deserto d'Africa.

99 Alcuni de' terreni, che dolcemente ascendono, giungono a grande elevazione prima che prendano la natura montuosa. Tale è quello di Quito nell' America, il quale ha una elevazione di circa 1400 tese (b). Tale è pure l' immenso deserto che sotto il nome di Gobè, o di Chamo si stende dai confini del Tibetto fino alle frontiere di Nerchinsk il quale dal *Pallas* (c) è riputato egualmente rilevato come quello di Quito.

100 Le misure trigonometriche, le livellazioni, ed il calcolo delle altezze barometriche sono i mezzi più esatti per determinare l'elevazione di un terreno al disopra di un dato punto; questa però si può comparativamente rilevare anche dal corso de' fiumi che vi scorrono, giacchè deve pendere a seconda del loro corso, e quanto più questo è rapido e lungo, tanto più elevato deve essere il terreno verso l' origine de' fiumi medesimi.

101 In diverse parti di tutto il globo corrono vaste catene di monti. E cominciando dall' Europa noi primamente vediamo l'Italia divisa dagli Appennini, che sono monti di mediocre altezza, e tra ponente e settentrione è cinta dalle altissime alpi dell' Elvezia, della Rezia, e della Savoia. La Spagna dalla Francia è separata dai Pirenei; tra l' Ongheria

Tom. V.

D d

(a) *Volney Voyage en Syrie.*

(b) *Condamine Journal du voyage a l'equateur.*

(c) *Oster. sur la formation des montagnes.*

e la Polonia sorgono i monti Carpatici; per la Svezia, e la Danimarca gira la grande catena boreale de' monti, e nella dominazione Russa i monti Orali, che formano i limiti naturali tra l' Europa e l' Asia, si diramano in varie direzioni.

102 Nell' Asia alzanfi le montagne chiamate *Gates*, che separano la costa di Malabar da quella di Coromandel, stendendosi dal capo Comorino fino a 500 leghe verso Cachemire (a). Le montagne di Gingi, che sono composte di rupi staccate arrotondate, sono una dipendenza di questa catena (b). Nel regno di Cachemire, e nel Tibet sorgono grandissime montagne, in cui l' Indo, il Gange, ed il Goango hanno le loro sorgenti; e poichè questi fiumi per un lunghissimo cammino vanno a scaricarli nell'Oceano, perciò quelle montagne sembrano essere tra le più alte dell'Asia meridionale; e da tal sito così elevato quei felici terreni pendono verso il tropico, e pel beneficio dei venti di mezzodì ricevono l' influenza della zona torrida. Di là pure partono le catene che percorrono la Persia verso l'occidente le due penisole dell'India al sud, e la China verso l'oriente (c).

103 Nell' Asia settentrionale le montagne dette Altai sembrano essere più elevate in quelle regioni, tra le quali il monte Bogdo (*Sourano*) è comunemente riputato il più alto. Da questo monte, su cui regnano perpetue nevi, partono due grandi catene, e due mediocri. La prima è diretta al sud sotto il nome di Mouffart, un'altra mediocre va all'occidente col nome di Alak; la terza chiamata Khanghai corre all'oriente; la quarta è quella che propriamente dicesi Altai, e che forma la frontiera della Siberia dal fiume Irtisch fino all'Amur (d).

104 Nelle catene dei monti Asiatici distinguonsi il Taurus, ed il Caucazo, come pure i monti del Giappone, i quali dal Sig. *Buffon*, non so su quali fondamenti, sono riputati più elevati che quelli d' Europa.

(a) *Sennerat Voyag. aux Indes orient. t. I. p. 59.*

(b) *Sennerat l. c.*

(c) *Pallas l. c.*

(d) *Pallas l. c.*

105 La Siria è come una catena di monti che da un ramo principale si distribuisce a destra, ed a sinistra in diversi seni. Da una parte vi si giunge per un vasto deserto, ed alcuni rami vanno verso il mare, ove hanno ripide pendenze, come veggonsi nel monte Carmelo. Verso il Libano, il quale, benchè sia di mediocre altezza, pure è il più elevato della Siria, i monti prendono maggiore elevazione; ed avanzandosi verso la Giudea si stringono le valli, le quali sul mar Morto finiscono in rocche selvaggie piene di precipizj e di caverne, di cui alcune possono contenere fino a 1500 uomini (a).

106 Nell' Africa, il cui interno finora fu pochissimo frequentato dagli osservatori, non bene si sa quale sia la costituzione dei monti. Pure è noto che vi corrono grandi catene, delle quali le principali sono quelle del Monomotapa, l'Atlante, e quelle in cui sorge l'altissima montagna di Luna. Al capo di Buona speranza termina la catena nella montagna della Perla, che è formata di un solo masso di granito (b).

107 L' America è la parte del globo, in cui sorgono le più alte montagne. Queste sono le Cordilliere, le quali, comprese le colline dette Sierra, sono lunghe 1700 leghe, e larghe circa 40, e sono dirette quasi tra settentrione e mezzodì. Altre catene minori sono sparse in diverse direzioni sì nell' America meridionale, che nella settentrionale.

108 Non solo i continenti, ma anche le isole sì grandi che piccole sogliono essere in gran parte montuose. Tali sono l' Inghilterra, l' Irlanda, e la Scozia (c), la Corsica (d), l' Elba (e), le Canarie, le Azorie, Ceylan, Sumatra, Borneo, le isole dei Celebi, di S. Domingo, Madera ecc. (f), le quali generalmente sono traversate pel lungo da montagne.

Dd ij

(a) *Volney* l. c.

(b) *Sonnerat* l. c.

(c) *Pallas* l. c.

(d) *Barral* sur l' isle de Corse.

(e) *Pini* Osservazioni mineral. sull' Isola d' Elba.

(f) *Burton* t. V. Hist. nat.

109 La costituzione montuosa dei continenti, e delle isole fu riconosciuta anche nei siti più vicini ai poli. Per tali furono riconosciute le coste di Kamtschatka, e quelle dell'America più settentrionale, come pure le isole delle Volpi, e di Bering, le Alute, e quelle di Kadjak, le quali ancora furono vedute coperte di boschi (a).

110 L'andamento delle principali catene di monti fu dal *Zimmermann* disegnato nella sua carta zoologica; e da quello così come dalle descrizioni particolari rilevasi, che la direzione di queste catene è molto varia, trovandosene altre tra settentrione e mezzodì; altre tra levante e ponente, altre finalmente in direzioni medie. Quindi non vedo, su quale fondamento abbia il Sig. *de Buffon* asserito (t. 1. p. 319) che le principali catene dell'antico continente sono dirette da oriente in occidente: ed è bensì vero che nel Tomo V. de' Supplementi si corresse, dicendo che le principali catene del globo sono dirette da settentrione al mezzodì; ma questa proposizione manca d'esattezza per due motivi, primamente perchè la direzione è sempre tra due punti, onde nella posizione dei monti non evvi ragione per dire che quella sia da settentrione a mezzodì, anzichè in senso contrario. In secondo luogo esaminando in generale le direzioni delle catene montuose si trova che la maggior parte non è diretta tra settentrione e mezzogiorno.

111 La materia, di cui è formata la maggior parte delle descritte montagne, è il granito, cioè un sasso di un tessuto granoso composto di quarzo, e di feldispato misto spesso volte con mica o con altri generi di pietre, le quali però ordinariamente non sono calcaree (b). Le descrizioni che i di-

(a) *Domajchenett* presso *Buffon* t. V. suppl.

(b) Una piccola porzione di terra calcarea sembra essere sempre combinata coi due principali componenti del granito, giacchè nel feldispato cristallizzato di Baveno il Sig. *Scopoli* ne trovò, e nel quarzo le analisi la manifestano. Questa combinazione però non è quella unione, di cui ora si parla, la quale si riporta alla mitchian-

za di pietra calcarea colle masse di granito. In questo senso essa si presenta in due modi, cioè a dire primamente trovasi pietra calcarea in filoni inseriti nel granito alla superficie del monte, ed allora essa si riguarda come una materia sopraggiunta al granito già esistente. In secondo luogo trovasi essa in filoni, che corrono per entro al massiccio de' graniti stessi. Le nuove mine di piombo argentife-

versi osservatori fecero delle catene sopraindicate tutte concorrono a stabilire questa verità, la quale da me fu pure riconosciuta in diverse parti, e massime nella val d'Aosta, nella val Sesia, che è terminata dall'altissima montagna detta la Rosa, in una porzione delle montagne della Savoia, del Vallese, del Tirolo, e della Carintia, e nelle alpi che dividono l'Italia dagli Svizzeri, e dai Grigioni. Nè solo le più alte montagne, come le Cordilliere, le alpi della Savoia ec. sono granitose, ma tali sono anche molte delle minori; il che da me pure fu osservato nell'alta Lombardia, ed in altre parti dell'Italia, della Germania, e della Savoia, e potrà rilevarsi dalle particolari descrizioni, che da diversi osservatori in questi ultimi tempi furono prodotte (a).

112 Nel granito è da osservare, che alloraquando si scompone nelle alte cime esso spesso volte si riduce in grandi lastroni, o guglie, come fu osservato dal Sig. *de Saussure*; ma quando è ancora in uno stato di solidità forma nella montagna de' massi arrotondati, così che per questa figura esso si può riconoscere anche da lontano. Tale osservazione fu da me fatta in molte montagne granitose, e veggio essere conforme a ciò che altrove fu da altri osservato. Così il

ro, che coltivansi nei monti granitosi di Vallerà nella Lombardia Austriaca presentano tali materie calcaree nel copioso fluore minerale che è unito nei filoni, che vi si cavano. Se la pietra calcarea si trovasse sottoposta ai monti granitosi, sarebbe questa un'altra rimarchevole maniera di unione del granito colla pietra stessa; e quella dovrebbe massimamente riconoscersi nei Pirenei, nei quali domina il calcario. Non mai però fu essa incontrata dall'efimio Sig. Barone *de la Peirouse*, che molto esaminò quelle montagne, sebbene altri abbia asserito che vi esiste (*Traité sur les mines de fer* ec. Notes pag. 337.)

(a) Su tale oggetto veggasi *Pallas* l. c., *Ferber Lettres sur la mineralogie* ec., *Saussure voyages aux Alpes*, *Barval* sur l'île de Corse; *Charpentier mineralogische Geographie der chursäch-*

sischen Lande; *Bexon* presso *Buffon* t. V. supplem.; parlando della Lorena; *Edai* sur la mineralogie des Pyrenees; *Volney Voyag. en Syrie, & en Egypte*, in cui descrive l'Oreb, ed il Sinai come formati di granito grigio; ed un altro granito rosso esistente tra la città di Afovan, e le cataratte del Nilo, come pure la montagna di granito, porfido, e diatpro, che a certa distanza dal Nilo stendesi nella direzione di questo fiume in lunghezza di 20 leghe, e forse in altrettanta larghezza. Finalmente merita di essere letto il capo IV. della sezione 5 della sopracitata opera di *Bergmann*, nella quale non solo sono raccolte le osservazioni di tal genere già da altri prodotte, ma ancora sono esposte molte particolari notizie riguardanti le montagne granitose della Svezia.

Sommerat (*Voyag. aux Indes Orient.*) scrive che la catena passante per Gingi nelle Indie è di quarzo, e feldispato ossia di granito, e che presenta rupi quasi rotonde.

113 Un'altra materia assai copiosa nelle alte montagne è il quarzo misto con mica disposto a grandi lastre irregolari. Questo è il *Saxum fornacum* del *Vallerio*, lo schisto di molti, che dovrebbe distinguerli coll'aggiunto di *quarzoso*, ed il gneis di molti Tedeschi. Quello forma spesse volte quasi la base, su cui si alza il granito, e talora l'uno all'altro è frapposto.

114 La materia calcarea forma pure una considerabil parte delle prominente terrestri. Dei monti calcarei alcuni sono formati a strati per lo più orizzontali, hanno una sufficiente uniformità nella materia, racchiudono corpi marini pietrificati, ed esistono al di fuori delle grandi catene di monti in situazione generalmente più bassa. Altri per contrario o non sono stratificati, oppure hanno strati di irregolare, ed incostante direzione, ed inclinazione, non contengono corpi marini, sorgono anche a grandi altezze nel centro di vaste catene, e la loro materia non è omogenea, ma combinata con quarzo, mica, steatite, amianto, granati, e feldispato. Questa così grande differenza, che riconoscesi nei monti calcarei, e massime dei Pirenei (a), dimostra vana l'opinione di quelli, che stimano essere tutta la materia calcarea prodotta da depositi marini. La qual opinione era appoggiata all'ipotesi che tutti i monti calcarei fossero a strati orizzontali, e contenessero corpi marini pietrificati.

115 Una non dissimile costituzione hanno anche i monti composti di schisti argillosi.

116 Innumerevoli altre materie entrano nella composizione di altri monti, come porfidi, diaspri, e simili, le quali nelle particolari descrizioni di diversi osservatori si potranno rilevare.

(a) *V. De la Peirouse Traité sur les mines de fer du Comte de Foix Notes* pag. 337. Anche il *Sig. de Saussure* riconosce una materia calcarea molto

più antica di quella, in cui trovansi residui di corpi organizzati, come alla pag. 175 Vol. II. de' suoi viaggi alle Alpi.

117 E qui per generalizzare le idee, e facilitare le espressioni gioverà distinguere i monti in originarj, e derivativi. Originarj o primitivi diremo quelli che già esistevano, allora che il globo cominciò ad essere abitato da corpi organizzati; derivativi, o secondarj quelli che si formarono dopo l'abitazione del globo. Secondo tal definizione tutti i monti composti di materie, nelle quali non mai trovansi racchiusi corpi organizzati, e che non derivano da successivi trasporti di tali materie, si riguarderanno come originarj. Tali sono i monti granitosi, quelli formati di quarzo micaceo e di altre rocche, di cui questo forma la base; ad essi devono pur aggiugnersi i monti calcarei, in cui appajono gl' indizj di non essere formati per depoliti di acque, o per trasporti, come pure i porfidi, ed alcuni schisti argillosi, come sono quelli su cui è sovrapposto talora il granito. Per contrario que' monti, che contengono corpi organizzati, e quelli che bensì non ne contengono, ma si mostrano formati da materie trasportate, saranno derivativi. Tali sono alcuni monti calcarei, ed alcuni schisti argillosi. Io ho fissata la distinzione tra i monti originarj ed i derivativi dipendentemente dal tempo, in cui il globo cominciò ad essere abitato; perciocchè anteriormente a quest'epoca poco o nulla importa il sapere quale stato abbia esso avuto; ed altronde in esso si possono supporre tanti stati diversi, quanti ne saprà immaginare una fervida fantasia, senza che però nella terra stessa si possano trovare argomenti per realizzare le supposizioni. Laddove dopo tal epoca la storia del globo c'interessa per le mutue relazioni della successione degli esseri organizzati, tra' quali noi pure siamo; e nei loro residui abbiamo un dato sufficiente per determinare diversi generi di variazioni intervenute al globo, che abitiamo.

118 Tra i monti derivativi vuoll' annoverare la maggior parte delle colline; e queste quanto alle materie componenti sono di due generi; alcune sono un aggregato confuso di massi trasportati derivanti da monti originarj, altre sono composte di diversi generi di materie simili a quelle che compongono i monti derivativi, e nelle quali sono spesse volte mischiati corpi organizzati. Nelle colline del primo genere non si sogliono trovare massi calcarei, e le materie

originarie, di cui quelle sono composte, sono della stessa natura di quelle, di cui sono formati i monti originarj superiori alle colline stesse, e situati in una certa distanza dalle medesime. Questa osservazione fu da me trovata tanto costante, che dai sassi originarj, che io incontrava in tali colline, potetti congetturare la natura dei monti originarj che aveansi a trovare inoltrandosi verso de' medesimi. Così nel traversare le colline dello Stato Veneto per passare nel Tirolo, i diversi graniti, e porfidi che in quelle incontrava furono da me riguardati come indizj che superiormente si avessero a trovare monti di simile natura, e realmente giunto a Bolzano, tali li trovai in tutti que' contorni. A questo genere di colline si possono riportare anche quei monti che il Sig. Barone *de la Peirouse* assicura essere frequenti nei Pirenei, e che egli chiama *di trasporto* (a). Sono questi composti di granito comune, coi quali talora sono mischiati porfidi, e rocche argillose, ma quai mai non vi si veggono rocche calcarie. Tutti questi massi sono arrotondati nei loro angoli, e seppelliti in terra vegetale in modo però che talora il totale rimane quasi distinto in banchi orizzontali. Tali monti corrono a seconda delle sinuosità delle valli, e sono sempre appoggiati contro un'altra catena di montagne o granitose, o calcarie, o di pietroselci, o di schisti diversi. Quale uso abbiano queste osservazioni nella teoria della terra, e massime per confermare gli effetti di una straordinaria e generale inondazione sarà esposto a suo luogo.

C A P O X.

Sull' altezza dei monti.

119 L'altzze de' monti si suole calcolare dalla loro perpendicolare elevazione sul livello del mare; e questa chiamasi altezza assoluta. Ma quando si computa l'altezza verticale della cima di un monte da un punto superiore al livello del

(a) Da la Peirouse nell' opera citata pag. 332.

del mare, quella dicefi altezza relativa. Tra le montagne finora misurate la più elevata è il Chimboraco nell' America, il qual monte è alto 3220 tese, e forma una catena con altri di altezza non molto inferiore all' accennata (a). Nell' Europa il più elevato è forse il monte Bianco situato nelle alpi della Savoia, l' altezza del quale fu trovata dal Sig. *de Saussure* di 2450 tese (a). Nell' Asia, e nell' Africa non si sono per anco fatte sufficienti osservazioni sulle altezze de' loro monti. Solo si sa che molti hanno un' assai grande elevazione, la quale però non deve forse giugnere a 3000 tese (b). La misura dell' altezza di molte montagne fu esposta in una tabella inserita nei giornali di Fisica di *Rozier*, e negli Opuscoli scelti di Milano t. X. p. 242; la quale però ha bisogno di varie emendazioni (c).

120 Siccome il Chimboraco, e gli altri altissimi monti con esso uniti nelle Cordilliere si trovano assai vicini all' equatore; così lo spirito d' analogia potrebbe facilmente indurre a stimare che i monti maggiori esistessero sotto alla linea equinoziale, e che si diminuissero in altezza a misura che vanno da essa discostandosi coll' avvicinarsi a' poli. Ma primamente in quelle parti stesse dell' America, e dell' Africa che sono assai vicine all' equatore avvi una grande estensione, che o non ha montagne, o le ha di un' altezza minore di quella che osservati in altri monti remotissimi dall' equatore. Così per esempio l' America sotto all' equatore

Tom. V.

E e

(a) *Condamine Voyag. au Perou.*

(a) Diverse altezze dei monti situati nell' Europa Settentrionale furono raccolte dal *Bergmann* l. c. In queste appare, che il monte più elevato dell' Inghilterra è il Pico Ruivo, il quale però secondo le misure barometriche del Sig. *Heberdeen* giugne soltanto a 808 tese. Non molto diverse da questa sono le altezze che furono misurate in alcuni monti della Svezia.

(b) Nell' Africa il Pico di Teneriffe secondo le osservazioni barometriche dell' *Heberdeen* (Phil. Transf. anno 1752) è alto 2412 tese. Nell' Asia i monti della Tartaria al nord-est della gran

muraglia furono per mezzo del barometro trovati dai PP. *Grimaldi*, e *Verbieß* di un' altezza di 2411 tese.

(c) Per esempio al S. Gottardo si attribuiscono 1650 tese d' altezza senza assegnare quale sito s' indichi con tal nome; il quale, quando fosse la cima, detta Fieudo soprastante all' Ospizio avrebbe l' altezza di 1405 tese, come espone nelle Osservazioni mineralogiche sul S. Gottardo. Parimenti al Legnone situato al nord-est del lago di Como si assegnano 1490 tese, quando che la sua vera altezza da me fissata nelle nominate Osservazioni è solo di tese 1406.

comprende uno spazio di circa 30 gradi di longitudine , e di questi soltanto due al più sono occupati dalle montagne di maggiore altezza , non essendovi nel rimanente che pianure , o monti di poca elevazione . Inoltre alla latitudine compresa tra i gradi 46 e 50 sorgono il monte Bianco , e le altre altissime alpi della Savoia , de' Grigioni , degli Svizzeri , e del Vallese , alle quali finora non si sono trovate altezze eguali alle maggiori vicinanze dell' equatore , eccetto che quelle d' America . Per lo che non si può dire , che generalmente le elevazioni montuose divengano maggiori coll' accostarsi all' equatore , ossia a quella situazione , che nell' ipotesi della figura sferoidale della terra ha la massima elevazione .

121 Sebbene molte montagne granitose abbiano una mediocre altezza , pure la massima elevazione appartiene ai monti di tal natura : il che si riconosce nel Chimboraco , ed in altre montagne dell' America . La maggiore altezza , a cui giungono le cime calcarie in Europa , sembra essere quella del monte Perduto situato nei Pirenei , a cui il Sig. de la Peirouse ascrive più di 1900 tese d' elevazione . Nell' America la pietra calcaria deve avere un' elevazione molto maggiore , essendosi trovate conchiglie pietrificate ad un' altezza di 2200 tese . Vedi il §. 169.

C A P O X I.

Sulla quantità della materia, che forma le ineguaglianze al di sopra del livello del mare .

122 Le innumerevoli varietà delle ineguaglianze , che si alzano al di sopra del livello del mare , rendono impossibile un esatto calcolo delle medesime . In ogni modo la quantità loro si può per approssimazione calcolare nel seguente modo .

123 Le principali catene dell' America sono lunghe circa 5000 leghe , la loro larghezza nelle Cordilliere talora è maggiore di 40 leghe , ma altrove è minore ; cosicchè per larghezza media si possono assumere 30 leghe . Quanto all' altezza , la maggiore è di 3220 tese , ma la media è di circa 2300 tese ossia di una lega . Quindi supponendo che la lar-

ghezza sia uniforme, la massa loro sarebbe 150000 di leghe cubiche, da cui dovrebbero dedursi i vuoti lasciati dalle valli, dalle caverne, e simili, i quali forse giungono alla metà dell' indicata mole. Ma siccome oltre alle indicate catene sono sparsi per l' America altri monti minori, ed in diversi siti il terreno ha considerabili pendenze, perciò si può questa materia considerare come equivalente a quella che dovrebbe dedursi, e ritenere l' indicato numero di 150000 di leghe cubiche come eguale alla massa delle ineguaglianze nell' America.

124 Nelle altre tre parti del globo le principali catene hanno verisimilmente una lunghezza di 16000 leghe; la larghezza media può assumersi di circa 25 leghe. Quanto all' altezza la massima tra le descritte è quella del monte Bianco che è di 2450 tese. Ma la maggior parte appena giugne a mezza lega; onde questa si può assumere per altezza media. Quindi per la massa delle principali catene risulteranno 200000 leghe cubiche, le quali rappresenteranno anche la mole totale delle disuguaglianze, quando si assuma che le deduzioni da farsi pei vuoti, che sono in quella mole, equivalgono alla massa delle altre ineguaglianze esistenti fuori delle calcolate catene. Unendo pertanto in una somma i due sopraindicati valori risulteranno 350000 leghe cubiche per il prossimo valore delle disuguaglianze del globo sul livello del mare. Quindi appare che queste disuguaglianze sono assai piccole in confronto della terra, la quale è eguale a circa 12366 milioni di leghe cubiche.

125 Dall' assegnata quantità sarà facile lo stabilire per approssimazione quale sia la proporzione tra la massa de' monti originarij e quella che costituisce le prominente composte di materia derivativa.

126 Il Sig. *de Buffon*, allorchè verso la metà del corrente secolo formò la sua teoria della terra parte su ipotesi, e parte sulle poche, ed imperfette osservazioni geologiche che sin allora erano state prodotte, pose per una base della sua teoria che generalmente i monti erano formati di materia calcarea stratificata; ma nei Supplementi, che dopo 30 anni pubblicò, trovossi obbligato in virtù delle seguenti osservazioni a rovesciare quella base, ed a dire che la sostanza

calcareea era pochissima in confronto dell'altra che egli chiama vitrescibile, e che secondo la soprapposta distinzione (§. 117.) è del genere delle materie originarie . A che vuoltì aggiungere , che essa è ancora molto più poca di quel che dalle osservazioni appare : e veramente gli osservatori generalmente hanno enunciati come calcarei que' monti, nei quali hanno riconosciuta come tale soltanto la superficie, supponendo che anche nell'interno fossero della stessa natura . Ma in molti ho osservato che la materia calcarea forma soltanto una coperta più o meno elevata sul nocciolo interno, il quale è di tutt'altra natura , e ordinariamente è di granito o di altra materia originaria . Così nei monti della Valsatina, che si stendono sino a Bellano sul lago Lario, riconobbi in diversi siti che la base è di granito sebbene in superficie sino alla cima sieno coperti di pietra calcarea, anzi talora tra il granito e la calcarea è frapposta una breccia jaspidea di rosso colore . Parimenti l'Autore delle osservazioni sui Pirenei avverte in più luoghi (pag. 98 100 ec.) che la pietra calcarea fu da lui veduta soprapposta ai graniti . Lo schisto sotto alla calcarea fu pure osservato dal *Ferber* (a) in varj monti del Padovano, del Vicentino, e Veronese che sono parte della catena che separa la Germania dall'Italia, come pure in diversi monti dell'Austria, della Stiria, e Carniola . Finalmente il Sig. *Grignon* in una nota comunicata al Sig. *de Buffon* osserva, che tutte le montagne primitive (ossia originarie) e metalliche, nelle quali penetrò per gallerie, e pozzi sino a 1500 piedi, sono composte di rocca viva vitrea (cioè di granito, o altra materia originaria); e soggiugne che perciò si può in generale conchiudere che di tal materia sia il nocciolo delle montagne stesse abbenchè sui loro fianchi dalla parte delle valli si veggano massi argillofi o strati di pietra calcarea in altezze considerabili . Per lo che i monti, che vengono enunciati come calcarei, generalmente vogliono riguardare come tali soltanto sino ad una certa profondità della loro esterna copertura (b).

(a) *Lettres sur la Mineralogie* ec.

(b) Il Sig. *de la Peirouse* sebbene conceda anch'egli, che ne' Pirenei molte

volte la materia calcarea è soprapposta al granito, e ad altre materie originarie, pure asserisce che molti de'

127 Se altri opponesse che anche nelle montagne di altra natura si prende dalla loro superficie argomento per giudicare del loro interno, egli dovrebbe avvertire che quando un monte si presenta nella superficie composto di materie originarie, come sono i graniti, esso ha un maggiore diritto per essere riputato di simile materia anche nell'interno, giacchè non appajono tante cagioni di riputarlo non uniforme, quante sono in una materia derivativa, la quale, essendo stata trasportata da altri luoghi, dovette essere depositata anche su' monti o terreni di altra natura che antecedentemente esistevano. Oltre a che i monti formati di granito, o di altro sasso originario spesso presentano de' fianchi tagliati verticalmente, e sono sottoposti a più frequenti diroccamenti, siccome quelli che formano le più alte montagne; e poichè si ne' loro fianchi tagliati, come nei diroccamenti generalmente si riconosce una materia simile a quella della superficie, perciò que' monti che esternamente mostrano una materia originaria disposta in grandi, e continui massi, a ragione si riguardano generalmente come composti di simil materia anche nell'interno. Per contrario nei monti che esternamente sono formati di materia calcarea, o non originaria spesso si trova sotto di essa o granito, o altro sasso originario; onde questi generalmente non si possono riguardare come uniformi nel totale della loro massa.

128 Quello che ho detto della materia calcarea in confronto della granitosa, vale anche di altre materie derivative, come sono argille, e simili in confronto di altre materie originarie. Quindi essendo pochissimi i monti derivativi per rapporto agli originarj, ed altronde essendo spesse volte soltanto in parte di materia derivativa que' monti, che pel

più alti monti di quella catena, e tra gli altri l'altissimo monte Perduto sono totalmente calcarei. La cosa non ha veruna intrinseca difficoltà, massime trattandosi di quel genere di materia calcarea che ha i caratteri di originaria. L'osservazione però non si stende oltre a quelle profondità che si manifestano nei naturali diroccamenti; altronde anche in monti composti

di materia calcarea, che presenta i caratteri di originaria, talora si riconosce a quella sottoposto il granito o altro sasso primitivo: tale è quell'altissima montagna che dal Sig. *de Saussure* fu osservata a fianco del Buonomo. Per lo che la regola generale accennata dal Sig. *Grignon* non sembra dover essere soggetta a molte eccezioni.

solo esame della loro superficie si enunziano, o si reputano di simile materia anche nell'interno, sembra che la materia derivativa che costituisce le ineguaglianze della superficie terrestre non sia maggiore di un centesimo del totale delle ineguaglianze medesime, onde può riputarli di circa 3500 leghes cubiche.

C A P O X I I .

Sulla Stratificazione.

129 La stratificazione finora fu riguardata come una chiave della teoria della terra, in quanto che si suppose generalmente, che questa nelle materie consolidate potesse essersi formata solamente nell'atto della loro consolidazione, anzi si stimò che queste materie prima di consolidarsi dovessero essere stati sedimenti di acque. Quindi i Mineralogisti si occuparono a riconoscerla ne' monti determinando anche diligentemente la direzione, ed inclinazione degli strati, ed altre più minute circostanze. La maniera di determinare le circostanze relative agli strati fu già da me esposta in un Opuscolo (a), ed in questo luogo sembrami pregio dell'opera l'esaminare alquanto più diligentemente la natura della stratificazione.

130 Delle materie, che trovansi sulla superficie terrestre, alcune sono consolidate in masse di considerabile grandezza, altre sono un aggregato di corpi minori tra loro non consolidati come sono terre, sabbie, ghiaie, e simili. Sì le une che le altre spesso trovansi distinte per piani più o meno regolari, i quali anche spesso sono tra loro paralleli; e questi piani talora sono tra loro fermamente connessi, come nella pietra calcaria alternante col pietroselce, talora sono staccati, come sogliono essere nelle pietre calcarie; e di questi secondi è ora il nostro ragionamento. Nelle materie non consolidate la distinzione dei piani risulta dalle diverse qua-

(a) *Della maniera di osservare nei monti la disposizione degli strati* ec. inserita negli Opuscoli scelti di Milano an. 1780.

lità delle materie stesse, che formano un dato aggregato, il quale se per esempio è composto di due ammassi l'uno di sabbia, e l'altro di argilla, essi rimangono tra loro distinti nel piano, in cui si uniscono o si combaciano. Ma nelle materie consolidate, come sono pietre calcarie, e graniti, la distinzione dei piani spesso si osserva abbenchè il totale sia sensibilmente omogeneo, e tal distinzione può intendersi accaduta o dopo che la materia era già consolidata, o prima di consolidarsi. Se la distinzione dei piani si formò dopo la consolidazione, queste altro non sono che sfenditure, le quali ben possono essersi formate con un certo parallelismo; e tali spesso si trovano, come anche dalle diligenti osservazioni del Sig. *de Saussure* rilevasi (a). Ma se intervenne nell'atto che la materia antecedentemente non consolidata prese consistenza, allora quelle distinzioni dei piani chiamansi commessure, e quando queste sono parallele, la disposizione dicesi a *Strati*.

131 L'idea pertanto di stratificazione nelle materie consolidate dipende non solo dal parallelismo dei piani, ma anche dalla supposizione, che la materia avanti di ricever tal disposizione non fosse consolidata. Tale supposizione, qualunque essa sia, fu certamente fatta da quelli che nella stratificazione riposero il fondamento delle loro teorie geologiche; ed introducendo tale supposizione si ha la distinzione tra le sfenditure e le commessure in quanto che le sfenditure sono una distinzione di piani intervenuta in materia consolidata, e le commessure una distinzione di piani formatasi nell'atto della consolidazione.

132 Ora per le osservazioni di molti è manifesto, che varj generi di pietre trovansi a strati distinti da commessure; e quelli per lo più sono in piani rettilinei, talora però sono curvilinei, o concentrici, o serpeggianti. Di questo secondo genere sono alcuni strati calcarei al Nant d'Argens ec. nella Savoia (b), come pure al monte Tura, e più frequentemente nei monti situati verso il centro delle Alpi (c).

(a) Voyages aux Alpes tom. 2. pag. 175.

(b) Sauss. Voy. aux Alpes t. 1. p. 399.
(c) Saussure l. c. p. 279.

Tali pure furono osservati da me sul fianco di un monte calcareo in vicinanza di Argegno terra situata sul lago di Como, e dall'Autore della mineralogia de' Pirenei (a) nel monte calcareo presso Laran, e nell'altro di Portalet, nei quali due monti gli strati curvilinei si uniscono anche con altri quasi verticali.

133 Gli strati inoltre sono talora angolari. Tali furono da me veduti in diversi siti, e massime sulla sinistra entrando nel golfo di Portoferraio nell'isola d'Elba. Tali pure furono osservati dal Sig. *de Saussure* (b) i quali inoltre aveano un prolungamento quasi a forma di una Λ .

134 Quanto alla inclinazione degli strati essa si suole valutare dall'angolo che è formato coll'orizzonte dal loro piano, e generalmente si calcola solo nei rettilinei. Questi spesso sono orizzontali, ma molte volte sono verticali, e per lo più hanno un'inclinazione media di più o meno gradi, così che questa non può essere ridotta sotto una regola generale.

135 Innumerevoli variazioni trovansi anche nella direzione degli strati essendo diretti talora tra levante e ponente, talora tra mezzodì e settentrione, e talora avendo una direzione intermedia alle accennate (c).

136 La grossezza degli strati è pure molto varia; mentre trovansene di quelli che sono grossi un pollice, altri hanno la grossezza di 60 piedi, e più. Ordinariamente però ogni strato suole essere divitibile in altri, sebbene all'esterno non vi appaja veruna sensibile commessura, o sfenditura.

137 Una incostante varietà nella inclinazione, e direzione degli strati trovasi non solo in montagne diverse, ma spesso anche in uno stesso monte: il che da me pure fu riconosciuto spesso volte anche in una piccola estensione. Ma generalmente gli osservatori fecero comune a tutto un monte

(a) *Essai sur la Mineralogie des monts Pyrenées* Paris 1784.

(b) Tom. 1. p. 296.

(c) L'incostanza, e varietà sì dell'inclinazione che della direzione degli

strati calcarei fu riconosciuta anche dal sig. *de la Peirouse* massime nei monti calcarei primitivi della catena de' Pirenei pag. 336 l. c.

te quello che riconobbero soltanto in una piccola parte della sua superficie; e sebbene attesa la difficoltà di riconoscere tutta la disposizione della superficie di un monte, e l'impossibilità di riconoscerne l'interno, essi in ciò sieno escusabili, pure pel motivo accennato le loro osservazioni su tali oggetti devono essere valutate con molte cautele, e riserve.

138 Le materie che generalmente sono stratificate, e che negli strati hanno maggiore regolarità, sono le calcaree, e massime quelle che racchiudono conchiglie, ed altri corpi marini. Le brecce, gli schisti argillosi, ed altri generi di pietre derivative trovansi pure a strati più, o meno regolari.

139 Quanto ai graniti gli osservatori prima de' Sigg. *Charpentier*, e *Saussure* generalmente asseriscono, che non mai si trovano a strati, ma bensì in massi irregolari. Ma que' due celebri Professori cominciarono a produrre osservazioni di alcuni graniti stratificati (a), ed ora da alcuni si è molto estesa tale idea volendo che generalmente anche i graniti sieno a strati. Su tal quistione già diverse cose esposi nella mia Memoria mineralogica sulla montagna di S. Gottardo, ed ora gioverà il dichiararla maggiormente.

140 Più sopra ho detto che le materie consolidate, come sono anche i graniti, spesso sono a piani paralleli distinti o da commessure, e da sfenditure, e che il determinare se sieno sfenditure, o commessure dipende dal vedere se la distinzione dei piani si formò nella materia già consolidata, o nell'atto della consolidazione; e poichè gli osservatori per giudicare dell'esistenza degli strati in un dato monte sogliono accontentarsi di riconoscerne i piani paralleli, perciò nelle osservazioni loro rimane a determinare se la stratificazione da essi enunciata nei graniti sia a commessure o a sfenditure.

Tom. V.

Ff

(a) Ne' graniti de' Pirenei alcuni dal Sig. *de la Peirouse* si enunziano come disposti a strati orizzontali, o poco inclinati l. c. Anche il Sig. *de Trebra* in qualche granito della Sassonia riconobbe alcuni banchi con una cer-

ta regolarità; lascia però in dubbio se quelli formino nell'interno del monte una stratificazione regolare (*Observations sur l'intérieur des montagnes Paris 1787.*)

141 A dichiarazione di tal questione io prenderò per esempio la stratificazione del granito osservata dal Sig. *de Saussure* nella montagna Breven, che tra le descritte è la più dettagliata. Egli dice, che questo granito ha verticali gli strati, e che inoltre ha sfenditure orizzontali. Primamente dunque anche pel giudizio di questo esimio osservatore il granito presenta sfenditure orizzontali, e perciò parallele come sono le commessure degli strati. Ma di più a me sembra che come sfenditure formatesi in materia già consolidata debbansi riguardare anche quelli che egli enuncia come strati: il che ad altri pure sembrerà considerando la natura di questo granito. Questo, così come sogliono essere gli altri, è composto di quarzo, di feldispato, e di mica. Il feldispato è formato a lastrine che sono tra loro meno coerenti di quel che sia il quarzo, e si sfendono assai più facilmente nella direzione dei loro piani, che nelle altre. La mica è resista di scaglie o fogliette pochissimo coerenti. Di più sì le lastrine del feldispato, che le fogliette della mica sono disposte con una certa direzione, per cui i piani di molte riescono in un piano comune, di modo che nel granito del Breven distinguesi visibilmente il parallelismo di moltissimi piani della mica stessa, i quali nel profilo vi formano come altrettante vene. Nella direzione di questi piani il fatto tanto per arte, quanto per natura si sfende assai più facilmente che in altre direzioni, giacchè in quella incontrasi una maggiore quantità di tali fogliette poco coerenti.

142 Ora i massi di granito, così come di altre pietre, generalmente tendono a sfenderli, come è comprovato dalle stesse sfenditure orizzontali, che nel granito del Breven si osservano, e da altre sfenditure in diverse direzioni che incontransi nei grandi massi di ogni qualità di pietra. Altronde le sfenditure devono formarsi massime nella direzione delle parti più deboli, le quali nell' indicato granito sono nei piani delle esposte fogliette, e lastrine; ed in questa direzione appunto esistono quelli che il Sig. *Saussure* chiama strati verticali. Perlochè troppo naturale è di dover riguardare anche questi come strati a sfenditure; ed essi a motivo massimamente della molteplicità delle fogliette micacee esistenti in uno stesso piano ben possono presentare de' piani abbastan-

za rettilinei, e lisci, come sogliono essere negli strati a commesure.

143 E' dunque da dire, che finora nei graniti non è provata una stratificazione a commesure: il che vale degli originarj come sono quelli delle Alpi. Ma nei derivativi cioè in quelli, che furono formati dalla scomposizione degli originarj, la cosa è altrimenti. Tali sono que' due graniti che accennai alla pag. 105 della mia Memoria mineralogica sul S. Gottardo. Tali pure sono i graniti de' monti della catena che passa per Gingi, i quali sono formati di quarzo, e di feldispato scomposto, ed in cui M. *Sonnerat* trovò inseriti diverfi tronchi d'alberi pietrificati (*Voyag. aux Ind. Orient.*). Della stessa natura sono i graniti scomposti che l'Autore del libro intitolato *sur les Pyrenees* p. 98 dice aver veduto nelle sfenditure di monti calcarei. Fra quelli pure dovranno annoverarsi que' graniti che il *Sig. Lefebure di Villebrune* (a) dice di aver veduti nell'Auvergne correnti su strati calcarei, argilloui, e schistosi, quando faranno più distintamente descritti, e riconosciuti.

144 La stratificazione dei graniti si riguarda come un oggetto di molta conseguenza in quanto che, come dissi, si suppone che sì in questa come in altra materia gli strati non possano provenire se non da depolizioni di acqua, le quali dipoi nianti consolidate per disseccamento. Ma tale ipotesi si trovò falsa a misura che si moltiplicarono le osservazioni. Primamente si riconobbe che a strati sono disposte molte materie che certamente non ebbero origine dalle acque: tali sono le lave, ed i tufi vulcanici che hanno origine dal fuoco. Inoltre se gli strati fossero prodotti in materie depositate dalle acque, quelli sarebbero almeno per la massima parte orizzontali, o quasi orizzontali, la quale situazione appunto si attribuì alle materie stratificate prima che si rendessero più generali le osservazioni. Ma in seguito si trovarono per la maggior parte o molto obliqui all'orizzonte, o verticali.

145 I sostenitori della poc' anzi accennata ipotesi sentirono la forza massimamente di quest'ultima opposizione: onde

F ij

(a) Note alle Memorie Filosofiche ec. dell' *Ulloa*.

si ridussero ad immaginarne un'altra non meno mancante di pruove che l'antecedente, dicendo che intanto gli strati hanno inclinazioni tanto varie in quanto che nei monti intervenne un rovescio prodotto da caverne aperteli al disotto de' medesimi: nel qual rovescio il Sig. *de Buffon* pone il limite di una inclinazione di 45 gradi, ed altri non dubitano di far pervenire l'inclinazione degli strati dalla posizione orizzontale fino alla verticale. Che sia avvenuto un grande sconcerto sulla superficie del globo non può certamente negarsi, ma che nei monti ora esistenti sia intervenuto un rovescio tale per cui s'inclinassero di 45, o anche di 90 gradi, ciò non può provarli, anzi è del tutto inverisimile. E veramente per ispiegare come in un monte il corpo degli strati sia passato per esempio dalla situazione orizzontale alla verticale, conviene tra le altre cose supporre 1. che sotto di esso siati aperta un'ampia caverna. 2. che in qualche sito della base del monte fosse un punto d'appoggio, sul quale si potesse rivolgere il corpo degli strati per passare dalla situazione orizzontale alla verticale. 3. che la caverna fosse di tale profondità, ed ampiezza, che potesse lasciar luogo a tale rivolgimento, e farlo terminare nè più, nè meno al momento, che esso avesse formato un angolo retto: le quali supposizioni non possono aver luogo se non in un moto assai più regolare di quello che avviene nei rovesci di monti, e negli aprimenti di caverne. E poniamo pure che con sufficiente regolarità potesse cadere un monte isolato, ma che questa potesse conservarsi nello sconvolgimento di tanti monti connessi, quanti sono quelli che ora si osservano cogli strati verticali, sarà sempre cosa impercettibile, e tanto più quanto che in tale circostanza avrebbero dovuto anche gli strati di uno stesso monte sconcertarsi reciprocamente, quando che per contrario noi generalmente li troviamo in una situazione abbastanza regolare.

146 A spiegare pertanto la varietà delle forme, e delle disposizioni degli strati conviene ricorrere ad altro principio; e questo è che la stratificazione è dipendente in gran parte dalla cristallizzazione. Ai Filici è noto, che la materia nel passare dallo stato di fluidità o quasi fluidità a quello di solidità tende a prendere nelle sue parti una figura regolare. Nel-

la supposizione pertanto che una terra calcarea sia stata un sedimento d'acque, cioè semifluida, avrebbe dovuto consolidarsi anche per cristallizzazione, ed allora gli strati sarebbero corpi regolari, alla formazione de' quali farebbe concorso anche la cristallizzazione: onde possono avere diversissime direzioni, ed inclinazioni, come le hanno le lastre d'onde sono composti i cristalli di quarzo, di feldispato, ed altri.

147 Potrebbe forse altri dire, che siccome la cristallizzazione si opera per le affinità chimiche, e queste non possono estendersi su grandi masse, così la cristallizzazione non può aver parte negli strati, che generalmente sono di ampia mole. Ma in primo luogo piccole non sono le masse di que' cristalli di rocca isolati, che hanno di diametro più di un piede, e di lunghezza quattro; e quelli che formano una piramide larga circa tre piedi come furono trovati nel Vallese, e da me stesso veduti; piccoli pure non sono que' parallelepipedi di feldispato, che trassi dalla montagna di S. Gottardo, i quali hanno un piede di larghezza; e quando le colonne di basalte, che ne' monti Euganei, nell'Islanda, ed in altri liti ritrovati, si annoverassero tra veri cristalli, non più potrebbe dubitarsi, che dalla cristallizzazione possano risultare grandissime masse.

148 Che se alcuno volesse ancora riputare questi corpi come piccoli in confronto dell'ampiezza degli strati, io saprei volentieri da lui, quali sieno i limiti, dentro de' quali l'affinità chimica può estendersi; e quando credesse di averli determinati secondo le nozioni comuni de' Chimici dipendenti da una precedente fluidità, io gli farei presente potersi cristallizzare anche le materie già consolidate, e doverli allora operare la cristallizzazione in masse di grandissima mole. Certamente la fluidità di un corpo non differisce dalla solidità se non nel più e nel meno, trovandosi varie degradazioni sì nei fluidi, che nei solidi, per le quali gli uni agli altri vicendevolmente si rassomigliano. Altronde è manifesto per esperienze, che nelle pietre contensi una certa quantità di fluidi, come aria, ed acqua, così che anche per tale mischianza questi solidi partecipano in qualche modo dei fluidi. Quindi se nel passaggio dalla fluidità alla solidità spesso interviene una cristallizzazione, non farà maraviglia che essa

intervenga anche nel passaggio della materia da un certo grado di solidità ad una maggiore consolidazione : il qual passaggio certamente ha avuto luogo nelle materie componenti i monti, e massime nell' ipotesi che queste sieno state depolizioni d'acque.

149 Ora una delle condizioni per la cristallizzazione si è che l' affinità mutua delle parti le combini tra loro formando corpi distinti di una data forma, e grandezza. Affinchè tale combinazione si compia è necessario che le particelle mutino luogo, la quale traslocazione è prodotta dalla forza d'affinità più o meno difficilmente, secondo che la massa, che deve dividerli in molteplici cristalli, è più o meno coerente, o consolidata; giacchè allora le parti fanno una maggiore o minore resistenza alla forza d' affinità. Quanto più facilmente l' affinità può produrre l' indicato effetto, tanto più presto le parti si combinano in cristalli, ossia in corpi regolari tra loro distinti; e dappoichè nel totale della massa è intervenuta tale distinzione, rimangono essi ad una certa distanza, e però non più la forza d' affinità di uno stende la sua azione sull' altro, e così rimangono distinti sotto a certe grandezze. Onde è che allora quando l' affinità trova minori resistenze, i cristalli devono riuscire di mole minore; e forse che si potrebbe dire che in parità di altre circostanze la grandezza de' cristalli risultante da una data massa deve dipendere dal rapporto tra la forza d' affinità che tende a combinarne le sue parti, e la resistenza della forza di coesione che tende a ritener le particelle della massa nel proprio luogo, così che allora abbiano a risultare cristalli distinti in certe grandezze, quando la forza d' affinità in ciascuno di quelli sia maggiore della forza di coerenza che tendeva a ritenerne le parti nella precedente loro situazione. Quindi nelle materie fluide o semifluide, le cui parti facilmente possono cedere alla forza d' affinità, i cristalli devono riuscire affai minori che nelle materie già consolidate; ed in queste quanto enormi masse possono essere prodotte dalla forza di cristallizzazione si riconosce dalle osservazioni. Certamente le sfenditure parallele, e verticali che talora osservansi nei graniti, sono prodotte in materie già consolidate; e la regolarità più o meno esatta che ne risulta in gran-

di massi che presentano una figura prismatica, o parallelepipeda, dà a questi il dritto di essere riguardati come opera di cristallizzazione. Come tali devono pure riguardarsi le sfenditure che dividono gli strati delle pietre calcarie con una direzione perpendicolare alle loro commessure; le quali sfenditure sono assai frequenti, siccome rilevati anche dalle osservazioni del Cavaliere *Ferrussac* (a), e del Sig. *Saussure* (b). Finalmente gli strati arcuati, ed angolari che vedonli in molte pietre calcarie (§. 132), ed anche in graniti (c), gli strati ferpeggianti ad angoli alterni, che il Sig. *Saussure* osservò in una pietra arenaria (d), quelli a doppia inclinazione l'una perpendicolare, e l'altra orizzontale dallo stesso riconosciuta in una rupe calcarea, come pure i perpendicolari che nel monte Brezon vide uniti ad orizzontali, i grandi prismi poligoni, in cui trovansi distinti molti basalti (§. 147), non possono certamente intendersi formati per un semplice disseccamento di materia per innanzi semifluida, e però voglionli riguardare almeno in parte come effetti della cristallizzazione.

150 E' però d'avvertire, che sebbene gli strati sieno almeno in parte opera della cristallizzazione, pure essi non devono riguardare come cristalli compiuti. Per tali si sogliono riguardare soltanto quei corpi per natura più o meno regolari, i quali si sogliono trovare quali come isolati dentro masse di diversa natura, e sono terminati in ogni loro parte da piani formati nell'atto stesso della cristallizzazione; in virtù della quale spesso trovansi anche incrociocchiati, ed inseriti l'uno nell'altro. Ora tali caratteri mancano del tutto agli strati, i quali soltanto nei due piani opposti delle loro commessure presentano una mediocre regolarità, e talora anche nelle sfenditure, le quali nelle pietre calcarie sogliono essere perpendicolari alle commessure. Lo stesso è nei prismi basaltici, i quali nei piani non hanno una decisa re-

(a) Presso *Rozier* Journal de Physiq.
t. 15 p. 458.

(b) I. c. tom. 2 p. 364, e 277.

(c) Mem. mineral. sul S. Gottardo
§. 124.

(d) t. 2. p. 182 (5) p. 364.

golarità, ed uniformità (a). Questo però non impedisce che si abbiano a riguardare tali corpi come operati da cristallizzazione. L'effetto di questa non è sempre di produrre cristalli compiuti, ma solo di tendere a produrli: il che riesce più o meno secondo che l'operazione è meno, o più turbata dal complesso delle circostanze che v' intervengono.

151 Raccogliendo ora le cose esposte sulla stratificazione risulta 1. che quella può formarsi sì nelle materie non ancora consolidate, come nelle consolidate. 2. che sì nell' uno come nell' altro caso quella almeno in gran parte è opera della cristallizzazione. 3. che la posizione presente degli strati, quanto alla varia inclinazione, e direzione loro, non può in generale essere stata prodotta da rovesci accaduti sulla superficie del globo, ma bensì risultò in gran parte da cristallizzazione.

152 Quindi per formare una teoria geologica appoggiata alla stratificazione, quale ora si osserva, converrebbe primamente determinare se la materia avanti che si disponesse a strati era consolidata o no, e quali variazioni o modificazioni sieno in essi intervenute per giungere a quello stato, in cui al presente si ritrovano. A tal fine la sola esistenza degli strati non sarà sufficiente, attese le molteplici cagioni d'onde possono essere derivate le materie stratificate, e le modificazioni degli strati medesimi; onde converrà assumere altri dati, i quali altronde per se soli basteranno all'intento. Così se alcuno volesse provare che una data materia fu depositata dalle acque, sarebbe a ciò provare insufficiente la
stra-

(a) I basalti da alcuni sono riguardati come prodotti vulcanici; ed il Sig. Dolomieu stima che provengano da lave raffreddatesi in vicinanza del mare. Altri però, e tra questi il Sig. Bergmann (Opuscul t. 3.) è di contrario sentimento. Potrebbe conciliare un' opinione coll' altra dicendo, che tali pietre non furono in fusione, come è provato dall'esser del tutto compatte senza esser vitree; ma che provennero da materie fangose eruttate dai Vulcani insieme con acqua: il

che in questi talora interviene. Quanto alla forma dei prismi lo stesso Bergmann non li riguarda come cristalli; ed il Sig. de Launay (t. V. Acad. R. I. de Bruxelles) stima parimenti, che i prismi basaltici sieno formati per solo restringimento, o disseccamento di materia, come avviene anche nei fanghi che si asciugano, ed in una maniera palustre di ferro trovata in Ofseg, ovvero Hofchinitz nella Boemia, la quale si dita a prismi simili ai basaltici.

stratificazione, perciocchè questa può formarsi anche in materie già consolidate, e non depositate dall'acqua (§. 144). Che se per comprovare il suo assunto assumesse le copiose conchiglie, che in quegli strati si contengono, allora assumerebbe un dato, il quale per se solo basterebbe all'intento. Così dunque la stratificazione non ha tanta importanza nella teoria della terra quanto finora ad ella fu attribuita.

C A P O XIII.

Sulla posizione degli angoli sinuosi, e rilevati, che osservansi nelle Valli.

153 Il Sig. *Bourguet* asserì già che i monti nel loro contorno formavano da ambe le parti della loro lunghezza de' rilievi, o risalti che li corrispondono, così che se per esempio un monte è diretto tra levante e ponente, esso forma sì a settentrione che a mezzo giorno dei risalti o angoli rilevati, i quali presi due a due dalla stessa parte formano un seno ossia un angolo sinuoso corrispondente al rilevato. Questa corrispondenza di angoli sinuosi, e rilevati (*angles rentrants & saillans*) anche secondo il Sig. *Conte di Buffon* è assai sensibile anche nelle valli, in quanto che se il monte da una parte forma un angolo rilevato, l'altro monte opposto presenta in corrispondenza un angolo sinuoso. Avendo il Sig. *Bourguet* passate le Alpi più di trenta volte in diversi siti e fatto il giro di quelle montagne, e del monte Jura, meritò egli una compiuta fede presso il Sig. *Conte di Buffon*, il quale generalizzando la cosa anche per riguardo a tutte le altre montagne riguarda col Sig. *Bourguet* questa osservazione come la chiave principale della teoria della terra, in quanto che stima che tal corrispondenza sia una pruova decisa della formazione delle montagne per l'azion delle acque.

154 Per dire che le montagne abbiano dei risalti, e conseguentemente anche dei seni, o angoli sinuosi non è necessario avere girate trenta volte le Alpi: basta avere una volta veduto qualche monte, e considerare che non è possibile che in masse esposte alle continue ingiurie del tempo si con-

servi un contorno in linea retta, o in una curva uniforme. Ma ad asserire che nei risalti, e seni sia una corrispondenza non basta d'aver molte volte veduti i monti: conviene di più stabilire in che consista tale corrispondenza, e poi riconoscere con misure, ed osservazioni che questa realmente esista. Se tale corrispondenza si facesse consistere soltanto nell'essere i monti formati a risalti sì a destra che a sinistra della loro lunghezza senza una regolarità nella corrispondenza, questo farebbe abusare dei termini; ed altronde non farebbe questa una chiave che aprisse l'adito ad una teoria. Per formare un'idea di regolare corrispondenza converrebbe almeno

1. che da una parte fosse un numero di risalti eguale a quello che esiste nell'altra, e che conseguentemente fosse anche eguale da ambe le parti il numero dei seni.
2. che gli angoli sinuosi da una parte fossero press'a poco di eguale grandezza, e forma cogli angoli rilevati esistenti nell'altra.
3. che gli angoli sinuosi esistenti da una parte corrispondessero in determinate distanze cogli angoli rilevati sporgenti nell'altra, come press'a poco vedesi ne' fiumi che corrono in letti di poca consistenza.

Che se si volesse, che la corrispondenza degli angoli servisse a provare qualche teoria, come se s'intendesse con quella di dimostrare che le valli furono scavate o formate dalle acque; allora converrebbe vedere quale sia la corrispondenza degli angoli che suole essere formata dalle acque; e l'esistenza di questa dovrebbe per osservazione essere riconosciuta nei monti. Ma lo stabilire quale corrispondenza di angoli sarebbe provenuta dall'azione delle acque dipende da più alti principj, che già altrove accennai (a), nè giova qui il richiamarli, giacchè da quelli risulta l'impossibilità di determinare in tale oggetto qualche cosa di preciso; ed altronde a decidere la presente quistione basta la semplicissima idea di corrispondenza, che poc'anzi accennai. Certamente il Sig. *Bourguet* non ha riconosciute nei monti quelle proprietà che ho detto essere necessarie per formare una regolare corrispondenza d'angoli sinuosi, e rilevati, nè potea riconoscerla, giacchè questa certamente non vi esiste. Il

(a) Mem. mineralogica sul S. Gottardo §. 67.

Sig. *de Saussure*, che esaminò il monte Jura, ed una parte di quelle Alpi che dal *Bourguet* furono percorse, non ve la trovò (a); e generalmente i Geologi più recenti che cercarono di riconoscerla in diverse provincie non ve la trovarono (b); io pure in vano la cercai in quelle molte montagne, che a tal fine esaminai, così che credetti di non doverne più fare oggetto di osservazione.

155 Se le valli fossero descritte con una certa esattezza, potrebbero da ognuno sulle carte geografiche riconoscere l'irregolarità delle loro prominenze, e sinuosità. In mancanza loro però possono servire i laghi, e le grandi aperture di mare, che sono come altrettante valli, in cui tuttora risiedono le acque; ed in queste ognuno potrà riconoscere che nella terra ferma che serve di continente alle acque non è la supposta corrispondenza di angoli: giacchè spesso trovanfi o due seni, o due rilalti opposti, cioè o allargamenti, o restringimenti, senza alcuna regolarità.

156 Questo vale quanto alla semplice osservazione diretta a riconoscere la presente costituzione dei seni, e rilalti esistenti nelle valli. Ma se si riferisce l'osservazione alla immaginata teoria dell'azione dell'acque, tosto comprendesi che quella a questa niente corrisponde. Se le acque avessero scavate le valli ora esistenti, dovrebbero negli angoli sinuosi, e rilevati riconoscere quelle circostanze che sogliono accompagnare la formazione de' medesimi proveniente dalle acque correnti. Così noi vediamo per esempio che negli angoli formati dall'azione delle acque ogni angolo rilevato corrispondente in parte opposta al sinuoso è generalmente formato da depolizioni di terre e ghiaie, o di altre simili materie che l'acqua nelle parti superiori scava formando un angolo sinuoso, e che trasporta nelle inferiori. Se dunque esistesse nei monti una corrispondenza d'angoli prodotta da acque correnti, dovrebbero per lo più gli angoli rilevati essere formati da materie di natura, o almeno di consistenza diver-

G ij

(a) Voyages aux Alpes t. I. pag. 511, e secondarie valli.

ove assicura trovarsi qualche corrispondenza di angoli solo nelle piccole (b) V. Pallas sur la formation des montagnes ec.

fa da quella che forma gli angoli sinuosi, ossia la massa dei monti medesimi. Ora gli angoli rilevati, o sieno essi corrispondenti o no, generalmente nei monti sono di eguale natura, e consistenza col rimanente del monte contiguo massime quando è di materia granitosa, o originaria. Non possono adunque quegli angoli attribuirli ad azione di acqua massime nei monti originarj, quali sono quelli delle grandi Alpi.

157 Ma avvi di più. Una generale corrispondenza d'angoli proveniente dall'azione di acque non solo non esiste, ma neppure vi può fisicamente esistere. Perciocchè o già eranvi monti al tempo, in cui supponesi cominciata l'azione delle acque, o non esistevano. Se già esistevano, dunque dovevano esservi valli formate con certo contorno indipendente dall'azione delle acque, il quale, attesi i varj giri delle valli, dovea avere de' seni, e de' risalti, e però quand'anco le acque avessero in seguito prodotti angoli sinuosi, e rilevati, pure quelli, che ora esistono, sarebbero in ragione composta dell'azione stessa delle acque, e della precedente costituzione del contorno de' monti: onde non potea formarli quella corrispondenza di angoli che fosse proporzionata alla sola azione delle acque stesse. Che se non suppongonvi per anco esistenti i monti al tempo, in cui cominciò la supposta azione delle acque, allora la terra sarebbe stata un globo o una sferoide senza risalti, e le acque sarebbero state egualmente distribuite in tutta la superficie terrestre formandovi una tranquilla inondazione. Ora in questa massa d'acque, benchè altissima si supponga, non poteva essere una cagione atta a farla agire in modo che producessè escavazioni nella terra che le serviva di base: giacchè per ipotesi essendo in equilibrio, e non essendovi rialzi di monti nè pendenze, non poteva formare costanti correnti se non forse quelle che vengono da un moto generale delle acque, dai venti, e da altre accidentali cagioni, le quali correnti, come altrove accennai. (6. 93) sarebbero altronde state di forza insufficiente a scavar il fondo per formarvi le valli ora esistenti.

158 E' dunque chiaro, che generalmente non esiste, nè può ora per le cagioni esposte esistere nei monti una regolare corrispondenza di angoli sinuosi, e rilevati: dico general-

mente; perciocchè in qualche valle, e massime nelle piccole una certa regolarità talora vi appare, sebbene però questa ordinariamente provenga dalle escavazioni, che vi hanno prodotto, ed attualmente vi producono le acque defluenti dai monti, le quali hanno un'azione del tutto diversa da quella, che avrebbero avute le acque nell'ipotesi di una permanente e generale inondazione. Che se pure in alcune anche delle grandi valli si trovasse qualche corrispondenza di angoli, questa, come altrove dimostrerò, sarà una pruova di una passeggera, e straordinaria, anzi che di una permanente, e tranquilla inondazione.

C A P O XIV.

Delle conchiglie ed altri corpi organizzati fossili che si trovano sulla superficie terrestre.

159 I corpi organizzati fossili formano un oggetto importante di osservazione: ed affinchè servano di fondamento a qualche teoria geologica conviene esattamente riconoscere le varie circostanze da cui sono accompagnati, e massime la loro diversa qualità, la quantità, e la situazione.

160 In riguardo alla qualità trovansi anche ne' monti animali di ogni classe e vegetabili di diversi generi, e specie. La classe più copiosa di animali fossili è quella dei vermi marini, le cui spoglie, o gusci trovansi spesso in ottimo stato di conservazione. Le conchiglie talora sono incorporate colla pietra, in cui sono racchiuse, così che vi formano un solo masso, e ciò è generalmente nei monti calcarei di mediocre altezza; spesse volte però sono soltanto ammucchiate con terra frapportavi, colla quale hanno poca, o nessuna coerenza, ed in tale stato generalmente trovansi in colline più o meno rilevate, ed anche in dolci pendenze, e in pianure, e massime in quelle vicine al mare. L'esistenza di copiose conchiglie in ogni parte della superficie terrestre è ora tanto nota che sarebbe inutile il rammemorare i siti, in cui si possono riconoscere. Che esse sieno spoglie di animali, che già furono viventi, è pure manifesto, giacchè di moltissime esistono anche al presente gli originali viventi del tutto simili alla struttura dei fossili.

161 A questa classe dei vermi marini appartengono pure le madreporè, ed i coralli fossili, sebbene però non si trovino in una quantità proporzionata a quella che ora esiste in mare. Il genere più singolare de' vermi fossili è quello dei molluschi, giacchè non così facilmente comprendesi come abbiano potuto conservarsi essendo gelatinosi, e perciò facilmente corruttibili. Tra questi sono l' *Asteria ophiria radiata* trovata in una pietra arenaria in Oberlauter nel Principato di Coburgo, l' *Asteria radiata* trovata nel contado di Papeenheim, l' *Arterias aranciaca* scoperta a Moutone nel monte Jura (a), e gli encriniti, che trovansi nelle vicinanze di Brunswick, e nel Vescovado d'Hildsheim, alcuni esemplari dei quali ottimamente conservati mi furono trasmessi dall' egregio Naturalista il Sig. Dottore Giovanni Taube.

162 Tra gl' insetti fossili sono abbastanza copiosi i granchj marini, i quali trovansi nel Veronese, dal lato di Cerna nell' Elvezia, nella Svezia, ed altrove.

163 Molte montagne sono pure il tumulo di una grande copia di pesci marini. Il monte Bolca nel Veronese è forse in questo genere il più copioso. La pietra, che li racchiude, è calcarea bituminosa, e fìsile. Le specie, che vi sono racchiuse, generalmente sono del Mediterraneo, ma talora trovansene anche dell' Oceano indiano; e tutti sogliono essere a maraviglia conservati, non mancandovi che la sostanza carnosa, così che in molti si può riconoscere non solo il genere, ma anche la specie. Nei seguenti luoghi sonosi parimenti scoperti pesci impietriti, o le loro impressioni, cioè al monte Viale nel Vicentino in uno schisto di carbon fossile; a Sapezzano nella campagna Romana (b), nella valle di Glaris in pietra calcarea fìsile, al monte Pilato nel cantone di Lucerna (c), nelle Ardèie di Angers (d), in Eichstet, nella Siria tra Batron e Djebail (*Volney voyag. en Syrie*), nelle montagne di Castravan sopra di Barut (*Buffon t. 1.*) ed in Antigue all' altezza di 900 piedi sul livello del mare (*Abregè des transact. philosoph. t. 1.*)

(a) Saussure t. 1. p. 284.

(b) Ferber Lettres ec.

(c) Promenade au mont Pilat. Journ.

étrang. Mars 1766.

(d) Guetard Mém.

164 I pesci di tali siti generalmente si riconoscono per marini, altrove però trovansi pesci fluviatili, o lacustri: tali sono il ciprino carpione, e la perca fluviatile che scopronsi nelle miniere di rame d' Eisleben, il carpione, e l' albula che trovansi dentro una pietra calcaria fistile bianca nel contado di Pappenheim, l' albula trovata in Oeningen nella Svevia, le trote dentro l' argilla indurata della Contea di Mansfeld (a).

165 Degli anfibi poche sono le specie fossili: e di queste generalmente non si hanno che alcune parti. Tali sono i denti e le ossa de' cocodrilli scoperti dal chiarissimo Sig. Giovanni Arduino nella Favorita, collina del Vicentino (b), come pure i denti di squali, e di altri simili anfibi nuotanti, che sotto il nome di glossopietre dagli antichi sono indicati, e che in molti luoghi si scoprono.

166 La classe degli uccelli appena presenta qualche individuo fossile.

167 Pochi pure sono i residui fossili spettanti alla classe dei poppanti, da altri detti quadrupedi. Tali sono le ossa umane, che in uno strato misto con conchiglie giacciono sotto la rocca di Gibilterra elevata circa 1200 piedi sul livello del mare (c). Il Sig. Fortis (d) scoprì parimenti ossa umane fossili con pietrificazioni di diverse specie a poca profondità lungo l' Adriatico. Nella Toscana frequenti sono le ossa, ed i denti d' elefanti (e). In diversi siti scopronsi residui di poppanti acquatici come di balene, e d' altri cetacei. Le colline stratificate, ed arenarie della Siberia racchiudono le reliquie di grandi animali terrestri delle Indie, come d' elefanti, rinoceronti, e buffale mostruose, anzi lungo molti fiumi della Siberia scopronsi tali reliquie con copioso avorio, che forma un ramo non indifferente di com-

(a) Vide *Born Index fossilium*.

(b) Presso *Ferber Lettres sur la minéralogie* pag. 47.

(c) V. *Boddington*, e *Hunter Trans. Phil. an.* 1760 t. 60. Per relazione, che ebbi da M. *Johnston*, nelle escavazioni intorno la Rocca di Gibilterra trovansi frequenti ossa di scimmie, le

quali forse furono riguardate come ossa umane.

(d) Vedi *Viaggi in Dalmazia*, e *Saggio d' Osservazioni sopra l' Isola di Cherso*.

(e) *Targioni Tozzetti Viaggi per la Toscana*.

mercio (a). Ciò che è più singolare si è, che degli accennati animali talora trovansi cadaveri coperti ancora della loro pelle, tra' quali è un rinoceronte che nelle terre ghiacciate lungo il fiume Viloui fu trovato con alcuni residui di tendini, di ligamenti, e di cartilagini, e che dal Pallas fu depositato nell' gabinetto dell' Accademia di Pietroburgo. Cessa però in parte la maraviglia, se si considera che la pelle e l'altre sopraccennate parti di questi giganteschi animali è di una forte consistenza, e che i ghiacci, per entro ai quali essi trovansi, hanno la facoltà di preservare dalla corruzione anche le parti molli degli animali. Questa seconda e principale cagione della conservazione delle indicate parti di tali animali forma una insuperabile difficoltà all' ipotesi del Sig. di Buffon. Egli dalla quantità delle spoglie di questi animali, che trovansi nella Siberia, asserì già che essi fossero indigeni di quelle regioni, e che perciò queste fossero di una temperatura assai più calda di quella che vi è al presente. Ma se così fosse stato, le parti carnose di quegli animali si farebbero ben tosto putrefatte, e tanto più quanto che anche al presente si trovano quasi alla superficie del terreno. Nè si può intendere che sienti conservate, se non supponendo due cose, cioè 1. che sieno state trasportate prima che si putrefacevano, come facilmente intendesi poter essere avvenuto in una straordinaria, e generale inondazione. 2. che inoltre il clima della Siberia già fosse assai freddo di modo che quelle parti carnose venissero prestamente involte da ghiaccio, e così sottratte alla putrefazione.

168. Abbastanza copiosi sono anche i vegetabili fossili. Tronchi d'alberi pietrificati, cioè mutati in agata, trovansi in diversi siti; frequenti pure sono in diverse pietre le im-

pres-

(a) Pallas. l. c. p. 38. Il Sig. Esprè descrive diversi zoologi incorporati con pietre trovati in gran copia in caverne della Contea di Bareit, e dell' Hartz, come pure in Transilvania, ed in Ungheria presso i monti Carpatici. Il Sig. Guettard (memoires sur differ. parties des sciences &c. 1715) da

la descrizione di diverse ossa fossili trovate in Francia, ed il catalogo di molti scrittori, che parlarono di tali ossa scoperte in diversi siti. Rimane però ancora indeterminato a quali specie d'animali debbasi riportare la maggior parte di queste ossa riguardate come d'animali terrestri.

pressioni di foglie, e di ramoscelli d' alberi, massime negli schisti argillosi. Bellissime tra le altre sono le impressioni vegetali dello schisto in cui trovasi il carbon fossile di *Schwannich* in Derbyshire (*a*), come pure quelle che vidi in vicinanza di S. Maurizio nel Vallese esistenti pure in uno schisto argilloso.

169 La massima altezza, in cui finora sonosi scoperti corpi marini fossili, è nell' America, ove si scoprirono conchiglie all' elevazione di tese 2222 (*b*). In Europa al monte Veron il Sig. *Saussure* trovò ostriche all' altezza di tese 1772 (*c*), ed il Sig. de *Luc* corni d' ammone a 1333 tese (*Modification de l' atmosphere*). Come si trovano corpi marini a grandi elevazioni sul livello del mare, così ne esistono al disotto del medesimo: tali sono quelli che si scavarono in una pianura di Amsterdam alla profondità di 322 piedi (*d*).

170 Nei corpi organizzati fossili sono da notare molte circostanze, e singolarità, da cui vengono accompagnati. Primamente osservasi, che essi spesse volte sono proprj di climi e paesi del tutto diversi da quelli, in cui si trovano. Tra i pesci del monte Bolca alcune specie sono indiane; nella Toscana trovasi un turbine scalare che è dell' Oceano orientale; nei monti, e nelle pianure del Chili scoprionsi conchiglie che non sono analoghe a quelle che si pescano nei mari vicini (*e*). Le spoglie di cocodrilli, d' elefanti, ed altri simili animali, che abbiamo detto trovarsi in diverse parti dell' Europa, sono parimenti di animali che vivono in climi del tutto diversi. Il Sig. *Jussieu* osservò parimenti in Europa impressioni di piante esotiche tutte dirette in una simile maniera.

171 Cosa non meno singolare è che di molti corpi organizzati fossili o si sono perdute le specie, o certamente non più trovansi gli originali viventi. Tra queste specie sono i così detti corni d' ammone, e molte altre conchiglie.

Tom. V.

Hh

(a) *Dietrich* note alle Lettere di *Ferber*.

(b) *Acad. R.* an. 1752 1768. - *Genève* presso *Rozier* *Obs. phys.* t. VIII.

(c) *Saussure* t. I. p. 393.

(d) *Buffon* *Suppl.* t. 5. p. 278.

(e) *Ullea* *Mem. philosophiques*.

172 Un'altra circostanza rimarchevole in questo oggetto è che i corpi organizzati marini spesso sono mischiati coi terrestri. Agl' impronti dei pesci del monte Bolca spesso sono unite impressioni di ramoscelli, e foglie di diversi alberi terrestri. Alla Mora nel Piemonte insieme colle conchiglie talora veggonsi de' frutti pietrificati; in altri siti diversi del Ducato medesimo spesso alle conchiglie sono mischiati legni impietriti (a). Nei monti di Guangavelica nelle Cordilliere le rocche, che tengono conchiglie, hanno pure de' legni impietriti (b). Nella Permia sorgono monti arenari con piccolissimi corpi marini, e molti tronchi d'alberi, e nelle colline della Russia parimenti arenarie e sparse di miniera di rame trovansi con poche conchiglie frequenti tronchi d'alberi, frutti esotici pietrificati, ed ossa di animali terrestri (c). Le ossa di animali terrestri, che trovansi in Siberia, sono pure mischiati con telline, con ossa di pesci, con glosiopietre, e legni penetrati da ocre. Nella Siria tra Batrum e Djebail a poca distanza dal mare in una cava di schisti trovansi conchiglie ed impronti di pesci, e piante (d).

173 Tra le circostanze più importanti è da notarsi la situazione che hanno nei monti alcuni vermi pietrificati, la quale è del tutto simile a quella che hanno allora quando sono viventi. E' noto che alcune conchiglie hanno la proprietà di forare o le terre, o anche le pietre, formando ciascuna un alveolo, in cui rimangono perpetuamente annicchiate. Tali sono alcune specie di foladi (*Pholas Dactylus*) come pure il mitilo forapietre (*Mytilus lithophagus*), le quali due specie volgarmente chiamanti col nome di foladi, o dateri di mare. Sulle foladi dateri viventi il *Reaumur* (Ac. R. scien. 1712) fece già le seguenti osservazioni 1. Essi cominciano a formarsi un foro quando sono novelli, non però in pietra, ma in una specie di argilla alquanto molle, la quale poi poc' a poco si va indurendo in guisa di pietra. 2.

(a) *Allioni Oryctographiæ Pædemontanæ specimen.*

(b) *Ulloa Memoires phil. & hist. Concernantes les decouvertes de l'Ame-*

rique.

(c) *Pallas l. c. p. 39.*

(d) *Volney t. 1. Voyag. dans l'Egypte, & la Syrie.*

Dappoichè quella è indurita, l'animale a misura che cresce, prosegue ad aumentare il foro profondandolo obliquamente, o verticalmente verso il centro della terra. 3. Quello foro è circa il doppio più lungo di quel che sia la lunghezza della conchiglia, ed è come distinto in due parti, delle quali l'inferiore ha quasi la figura conica della conchiglia, e da questa è abitata in modo che la sua parte più grossa è più vicina al centro della terra. La superiore è più stretta e forma un foro quasi cilindrico, che fa capo alla superficie della pietra, o dell'argilla. 4. Per la parte superiore dell'indicato foro l'animale manda fuori un tubo carnosso, e conico, il quale è come distinto in due, di cui uno serve ad aspirare acqua verso la conchiglia, l'altro a rigettarla, come in altri vermi interviene. Una simile struttura ho io pure riconosciuta nei mitili forapietre che stanno annicchiate negli scogli calcarei del mare di Genova, ed in molti pezzi ho pure osservato altre conchiglie di diverso genere, ed alcuni vermi nudi, ossia non coperti di guscio, i quali vi aveano formati de' fori serpeggianti. Osservai in oltre, che alcuni dei fori formati dai mitoli, e che da questi per essersi putrefatti furono lasciati voti, erano rivestiti da croste di retepore, e millepore, e che generalmente il foro è alquanto più grande della conchiglia chiusa: il che necessariamente deve essere così, giacchè l'animale spesso l'apre per fare le sue funzioni vitali. Si le foladi descritte da *Reaumur*, come le conchiglie che io vidi annicchiate negli scogli, non erano profondate al disotto della superficie della pietra se non per una lunghezza doppia al più di quel che sia la lunghezza della conchiglia stessa: onde sembra che questi vermi penetrino nella pietra soltanto a quella profondità per cui possano prolungare il sopra indicato tubo carnosso fino all'acqua marina contigua alla superficie della pietra stessa: il che viene confermato anche dal Sig. *Fasano*, il quale parlando dei mitoli forapietre scrive, che non mai si profondano oltre a due oncie napoletane dalla corteccia della rupe (Atti dell'Acad. R. di Napoli 1789). Ora in varie montagne furono da diversi osservate tali conchiglie pietrificate, ed in quella situazione che hanno quando sono viventi. Tali sono quelle che esistono nei monti o colli Se-

nei, le quali sebbene non si possano esattamente determinare nella specie, pure appartengono al genere delle forapietre. Sono esse annicchiate in una pietra calcarea equabile dai Toscani chiamata albanese, ed ogni alveolo, che è occupato da una conchiglia, va appunto a terminare in un foro cilindrico che apre alla superficie della pietra stessa. Osservai in oltre che questa pietra medesima in vicinanza di tali conchiglie è formata da tubetti serpeggianti simili del tutto a quelli che negli scogli sopra indicati del Genovesato vidi formati da vermi nudi. Parimenti il Sig. *Fasano* nel citato luogo riferisce, che nella Calabria citeriore dal promontorio di Palinuro fino a Fuscaldi tutte le rupi calcaree che scendono sul lido di quella costa sono forate da mitili forapietre da lui chiamati foladi, delle quali molte ancora vi esistono pietrificate. Altre simili osservazioni da altri furono prodotte, da cui conchiusero già, che il mare abbia fatta permanente dimora sui presenti continenti. Una non minore importanza ha la situazione che fu osservata nei zoofiti fossili. Il Sig. *Fortis* (a) arreca alcune colline dello stato Veneto, nelle quali trovanti selve intere di coralli a capo volto in giù, come secondo lui trovansi in mare viventi. Il lodato Sig. *Fasano* riferisce che al mezzo giorno di Monte Laone nella Calabria citeriore in un luogo detto Piscina elevato sul livello del mare circa un quarto di miglio è uno strato di madrepora radicate, le quali sono assai grandi sebbene però fossero quasi mezzo resolute. Soggiugne che tali litofiti spesso s'incontrano per le rupi calcaree di quel littorale sul Tirreno, e quelli ben radicati, e fissi, come sogliono essere i viventi.

174 Dalle arrecate osservazioni conchiusero altri, che gli accennati vermi abbiano vivuto in quello stesso sito, in cui ora li trovano; e siccome quelli non possono vivere che in mare, così questo abbia già fatta permanente dimora su i presenti continenti fino alle più alte cime dei monti. Tal conclusione però è spinta oltre a quel che comportano le osservazioni. Le conchiglie forapietre, secondo che scrive il lo-

(a) *Giornali d'Italia* t. 1.

dato Sig. *Falano*, vivono soltanto in quei siti, che sono tra il flusso e riflusso delle onde: il che sebbene non sembri verificarsi nel litorale Genovese, in cui quelle conchiglie trovansi viventi anche ad una costante profondità di acqua, pure questa non sembra essere molto sensibile. Quindi dalla osservata situazione delle conchiglie fossili si può soltanto concludere che la superficie del mare sia giunta a quell'elevazione, alla quale le conchiglie stesse al presente si trovano. Quanto ai litofiti è bensì vero, che questi vivono anche sul fondo dei mari, e però se vissero in quel sito, ove ora si trovano fossili, l'acqua può essere stata ad essi superiore in una altezza indeterminata. Ma (§. 19) argomentando dall'altezza che ora hanno le acque marine sui fondi occupati da simili litofiti viventi, conviene dire che quella non oltrepassasse le 100 tese. Così dunque le prodotte osservazioni provano al più, che il mare fu alquanto più elevato dei siti, in cui trovansi i descritti vermi marini: la qual elevazione era sufficiente soltanto ad inondare una piccola porzione dei presenti continenti. Perciocchè l'altezza, in cui que' vermi fossili finora furono trovati, non eccede quelle colline; laddove non solo i monti, ma anche molte dolci pendenze, come sono quelle di Quito, e di Chamo. hanno un'elevazione molto maggiore. Per determinare però in quale elevazione sia stato permanente il mare, gioverebbe che si facessero più esatte osservazioni per riconoscere l'altezza, in cui esistono vermi fossili nella stessa situazione che dovrebbero avere essendo viventi. Sarebbe anche pregio dell'opera il rinnovare le osservazioni sulla situazione dei litofiti sì fossili che viventi, e l'esporle con que' necessarij dettagli che mancano a quelle che finora furono prodotte. In ogni modo la situazione delle conchiglie forapietre riconosciute nei colli Senesi, ed accompagnate dai fori di vermi num. basta per se sola a poter assicurare che l'uno, e l'altro genere di questi vermi abbia vivuto in quello stesso sito, in cui ora si trovano i loro residui pietrificati, o i vestigj del loro lavoro, e che perciò il mare vi abbia fatta una certa permanenza. Io dico il vero che dalle sole descrizioni da me vedute dei dateri fossili non mai mi persuasi che essi avessero nei monti quella situazione che hanno essendo viventi; e

m'immaginava che quelli intanto si trovassero annicchiati nelle pietre, in quanto che queste furono già terra molle trasportata dalle acque di una inondazione insieme colle conchiglie stesse, le quali dopo l'indurimento della medesima vi fossero rimaste racchiuse formandovi un nicchio o alveolo corrispondente, come intervenne ad altre conchiglie, le quali certamente non hanno la proprietà di forar le pietre. Ma il sopraccennato confronto dei fossili coi viventi annicchiati in pietre mi tolse da questa opinione, e molto più l'ispezione dei fori serpeggianti formati da vermi nudi, i quali fori esistenti nella pietra racchiudente dateri fossili non si possono in nessun modo riguardare come alveoli lasciati da vermi racchiuti in una terra molle, e quindi putrefattisi nel mentre che quella s'induriva: perciocchè, come osservai in questi vermi viventi, essi quando vivono, sono cilindrici, e grossi una o due linee, ma dappoichè sono morti mutano figura, e si appiattiscono. Quindi se essi fossero stati involti in una terra molle, non avrebbero nell'indurimento di essa potuto lasciare di se un vestigio serpeggiante, e rotondo nella sua sezione trasversale, come è nelle sopraddescritte pietre calcarie del Senese. Quando fosse riconosciuto se questi vermi fossili esistano soltanto nella superficie delle rupi calcaree, ovvero se trovinsi anche nell'interno delle medesime, ci porterebbe ad altre importanti conseguenze. Intanto però essendo dimostrato dall' accennate osservazioni, che il mare dovette fare una certa permanenza in quelle elevazioni, in cui ora si trovano que' fossili, rimarrà a vedere quanto tempo vi abbia dovuto rimanere affinchè potessero que' vermi annicchiarsi in quelle pietre, ed a quale epoca debba riferirsi tal permanenza: il che sarà investigato nella seconda parte di questa Memoria.

175 Il Sig. Conte di *Buffon* rammemora come un' altra circostanza molto importante il trovarsi le conchiglie fossili unite in famiglie, ossia il trovarsi copiosi ammassi di conchiglie dello stesso genere o della stessa specie senza mischiatura di altre. Questa osservazione però ha il difetto di molte altre da lui prodotte, cioè di essere fondata al più su qualche caso particolare. Certamente le conchiglie fossili non sogliono essere in famiglie, anzi sono per lo più miste non

solo di generi, ma anche di ordini diversi, trovandosi spesso le univalve miste colle bivalve, ed anche multivalve. In Roncà alta collina del Veronese il *Ferber* riconobbe almeno trenta diverse specie di conchiglie (*a*). Nelle colline del Piemonte in val d'Andona l'*Allioni* spesso trovò grande varietà di generi tra loro confusi (*b*), e generalmente esaminando le conchiglie fossili raccolte ne' diversi Musei si riconosce questa mischianza di generi anche in piccoli pezzi.

176 E' finalmente da osservare che le conchiglie così come altri corpi organizzati talora trovansi mutati in pietra selciosa. Nelle conchiglie è selcioso soltanto il nucleo, essendo rimasto calcareo il guscio, e tali sono frequenti nelle colline del Bolognese in vicinanza di S. Luca. Talora però il guscio stesso è divenuto selce: il che è assai singolare, ed è pruova di una trasmutazione della pietra calcarea in selciosa. Alcune lumachelle delle vicinanze di Parigi mostrano ad evidenza tale trasmutazione, riconoscendosi in esse molti turbini selciosi ottimamente conservati, e vuoti nell'interno, così che non si può dubitare che essi sieno i gusci di tali conchiglie, i quali già erano calcarei, siccome sogliono essere quelli delle conchiglie viventi. Il Sig. *Bergmann* p. 306 dell'opera citata nega la mutazione del guscio calcareo delle conchiglie fossili in sostanza selciosa, e ciò sul principio chimico che la terra calcarea non si può coll'arte mutare in selciosa. Ma la natura nelle sue operazioni è più efficace dell'arte, ed in ogni modo que' gusci, de' quali io parlo, non hanno verun carattere calcareo, giacchè, secondo le pruove da me fattevi, essi non fanno effervescenza coll'acido nitroso, al fuoco non si mutano in calce, nè somministrano quell'aria fissa che si sviluppa dalla pietra calcarea, anzi quali niente perdono del loro peso, e della loro durezza: altronde essi percossi con acciaio scintillano, sono durissimi, e semitrasparenti, ed hanno tutta l'apparenza di selci.

(a) *Lettres sur la Mineralogie.*

(b) *Oryctographiæ Pædemontanæ specimen.*

C A P O X V.

Su i Vulcani.

177 Sebbene i vulcani non sembrano avere rapporto ai cangiamenti prodotti dalle acque sulla superficie terrestre, pure essi hanno non poca influenza nella spiegazione di alcuni de' cangiamenti medesimi, e però non devono essere da me ommessi nel piano delle osservazioni geologiche, che ho preso ad esporre. Dei vulcani alcuni sono tutt'ora ardenti, altri sono estinti. Delle antiche eruzioni di questi secondi si prende argomento dalle materie, che si riconoscono simili a quelle che vengono gettate dai vulcani tuttora agenti. Le acque calde, che si manifestano in diversi siti, sono parimenti indizj o di vicini vulcani, o di fuochi sotterranei.

178 Tra i vulcani ardenti i più insigni nell'Europa sono il Vesuvio, e l'Etna nell'Italia, e l'Ecla nell'Islanda. La Penisola di Kamtschatka, massime in vicinanza di Ostrog, come pure le isole delle Volpi, le Alute, e quelle di Bering hanno vulcani attualmente in fuoco oltre ad altri estinti (a).

179 Nell'America la provincia di Quito presenta nelle Cordilliere molti vulcani o ardenti, o estinti. Dalle cime del Cotopaxi, del Jangouragua, e del Sangai, benchè sieno occupate perpetuamente da nevi, escono continuamente fiamme, e fumo, e talora v'intervengono violente eruzioni. In quella accaduta al Cotopaxi nel 1744 le ceneri giunsero fino al mare in distanza di 80 leghe, e coprirono il terreno fino all'altezza di circa quattro pollici nell'estensione di 15 leghe, facendovi perire molto bestiame. Il Sangai nelle sue eruzioni fa sentire il rumore in distanza di 40 leghe, e le lave scorrendo tra le nevi giungono fino al fiume Upano, ove cagionano la morte a grande copia di pesci (b).

180 Nelle Molucche, e nelle Filippine il *Sonnerat* offer-
vò

(a) *Domascheneff* presso *Buffon* t. 5. Supplém. - *Coxe* *Nouvelles decouvertes des Russes*.

(b) *Condamine* *Journal du Voyage à l'équateur*.

vò diversi vulcani, tra' quali il più considerabile è quello di Siao, che nelle sue esplosioni copre di ceneri anche le isole vicine (a). Vulcanica dee parimenti essere l'isola, da cui il Capitano *Carteret* vide uscire fumo trovandosi in vicinanza del capo Byron. L'isola di S. Cristoforo nell'America settentrionale ha ora un vulcano, all'aprirsi del quale cessarono i tremuoti, a cui era soggetta (*Hans Sloane* Trans. Phil.). L'isola di S. Vincenzo nell'Oceano atlantico ha pure nel Morne Garou un vulcano descritto da *Anderson* (Trans. Phil.). Finalmente l'isola di Bourbon nell'Africa manifestò un vulcano nell'eruzione accadutavi nell'anno 1766.

181 Tra gli estinti vulcani è il Pico di Teneriffè nell'Africa (b). L'Atlante parimenti è riputato vulcanico dal Pallas (c), il quale anche alla Persia attribuisce molti vulcani. Questi pure sono frequenti nell'Arcipelago delle Indie dall'Africa fino al Giappone, e nelle terre Australi (d). Indizj di vulcani estinti furono riconosciuti nell'Auvergne da *Desmarest* (e), nel Vivarese da *Fujas de Saint Fond* (f), nei monti Euganei dall'*Arduino*, e dal *Fortis* (g), in una parte degli Appennini da *Ferber* (h), nella Corsica da *Barral* (i), nelle isole Eolie e Ponzie dal Sig. Commendatore de *Dolomieu* (k), nella Brisgavia dal Barone *Dietrich* (l), nel bacino del Giordano da *Volney* (m), in America dal *Condamine* (n), ed in altre parti da diversi (o).

Tom. V.

Ii

(a) *Voyag. aux Indes orient.* Vedasi inoltre il *Forster* nella Memoria, che ha per titolo *Isle nouvelle sortie de la mer près de Terceira en 1720* e che è inserita nell'*Abregé des Transact. Philos.* par *M. Gibelin*; come pure la Memoria di *M. Pye*, in cui descrive le quattro isole vulcaniche formatesi presso Manilla nel 1750.

(b) *Cook* *Voyag.* t. 2. p. 231. Questo vulcano però tramanda ancora esalazioni sulfuree e calde.

(c) *Pallas* l. c.

(d) *Buffon* *hist. nat.*

(e) *Sur les Volcans de l'Auvergne.*

(f) *Recherches sur les Volcans eteints du Vivarais, & Velais Mineralogie des Volcans.*

(g) *Giornale d'Italia* t. 1.

(h) *Lettres sur la Mineralogie.*

(i) *Memoir sur l'Hist. nat. de l'Isle de Corse.*

(k) *Voyag. aux Isles de Lipari. Memoir sur les Isles Ponces.*

(l) Note alle lettere del *Ferber*.

(m) *Voyage en Syrie.*

(n) l. c.

(o) V. l'Europa letteraria stampata in Venezia - *Raspe* *Specimen hist. nat. . . . præcipue de novis e mari natis Insulis* Amst. 1763. - *De Luc* *Lettres phytiques* t. IV. - *Memoires de l'Academie R. I. de Bruxelles* t. I. - *Mem sur quelques volcans eteints de l'Allemagne* par *M. le Pr. Gallizini* nel t. V. dell'Acad. di Bruxelles - *Collini* sui vulcani della Germania.

182 Abbiamo pure notizie di eruzioni di nuovi vulcani aperti nel corrente secolo. Tale è quella che escendo di sotto delle acque marine formò in vicinanza di Santorini un' isola (a); e l'altra più recente intervenuta nelle vicinanze dell'isola di Ferroe in Islanda, la quale pure colle materie slanciate formò un'altr'isola.

183 Alcuni vulcani sembrano avere comunicazione colle acque del mare per caverne sotterranee. Nel Vesuvio di Napoli e nelle sue vicinanze quella è provata dai seguenti fatti. Nell'eruzione osservata da Plinio il mare circostante si ritirò, e rimasero de' pesci in secco sulla spiaggia. Nel 1538 allorchè in una eruzione si formò il monte Nuovo, il mare si ritirò per 200 passi (b). Nell'eruzione del 1698 si ritirò a cinque riprese (V. Sorrentino lib. II.). Il *Mercati* racconta, che lo stesso avvenne nelle eruzioni del 1715, 1723, 1729, 1752. Aggiugne il *Braccini* che il ritiro non è momentaneo ma successivo, e che nel 1631 durò circa mezzo quarto d'ora.

184 Fu parimenti osservato, che in alcune eruzioni il Vesuvio getta acqua: il che avvenne anche alla bocca del monte Nuovo nel 1538, e spesso anche all'Etna. In tali circostanze stimati che vengano gettate fuori anche conchiglie. Nell'eruzione dell'Etna accaduta nel 1755, in cui gettò copiosa acqua, fu inoltre osservato, che le sabbie, e le pietre rimaste nel sito, per cui l'acqua scorre, erano simili a quelle del mare, e penetrate dalla stessa salfedine. (Abr. Tr. Phil. t. 1. p. 90).

185 I sopraccennati ritiri del mare non si possono intendere se non ammettendo una comunicazione sotterranea del medesimo col cratere. Posta tale comunicazione, facilmente intendesi, che quando avvenga una rapida accensione nell'interno del vulcano, l'aria vi si deve molto rarefare, e formarvi rapidamente quasi come un vuoto. Quindi la pressione

(a) V. la descrizione del P. *Gorée* nelle Trans. Filosofiche volume del 1771 al n. 332. Altre isole furono per antico formate nell'Arcipelago da eruzioni vulcaniche. Tale, secondo *Plinio*, è quella di Terra ora detta San-

torini, la quale insieme coll'altra di *Terasia* si formò in tal modo 137 anni prima dell'era cristiana.

(b) *Giacomo da Toledo* Relazione ec. Napoli. - *M. Ant. delli Falconi* dell'incendio di Pozzuolo ec.

dell'atmosfera sul mare deve rapidamente spingere nelle cavità vulcaniche una massa di acqua, la cui base sarà eguale alla media capacità delle cavità medesime, e la cui altezza non sarà maggiore di 32 piedi, cioè di quella, a cui l'acqua può ascendere nel vuoto per la sola pressione dell'aria. Ma il calore e la forza, con cui il vulcano slancia fuori del cratere ceneri, e sassi, deve agire anche per far isvaporare e per elevare l'acqua sottoposta, formando que' getti d'acqua che si osservano nelle eruzioni; ed in questa azione, quando intervenga con una certa rapidità, è riposta un'altra cagione, per cui deve velocemente entrare ne' sotterranei una certa quantità di acqua marina. Ora questa velocità d'ingresso, con cui per le due indicate ragioni una porzione dell'acqua marina si va sottraendo al rimanente del mare, può essere maggiore di quella, con cui questo tende per naturale espansione a ristabilirli in equilibrio, ossia ad occupare quel luogo, che si va abbandonando dalle acque entranti nei sotterranei; e quando ciò interviene, dee rimanere in asciutto una porzione della spiaggia circostante al vulcano: il che dà l'idea di un ritiro di mare. Questo però, così come si osserva, non può durare se non per breve tempo, cioè per quel tempo al più, che è richiesto affinchè l'acqua, che va entrando ne' sotterranei, giunga alla massima altezza, a cui può essere portata dalla sbilanciata pressione dell'atmosfera; e dappoichè vi è giunta, essa per la svaporazione, e pei getti prodotti dall'azione vulcanica deve andarsi diminuendo finchè ritorni press'a poco al livello ordinario. Nel mentre che questo interviene il mare per naturale pressione prestamente ritorna press'a poco al primiero suo stato, e questo sensibilmente si conserva, abbenchè vadano continuando i getti d'acqua, e la svaporazione; giacchè passato che sia il primo impeto dell'esplosione l'eruzione prosegue con una certa uniformità, e può senza sensibile abbassamento del circostante mare essere da questo somministrata al vulcano quella quantità di acqua che esce pel cratere.

186 Che se avvenga, che dopo essersi ristabilito nell'acqua sotterranea l'ordinario livello si rinnovi qualche rapida accensione, allora deve per le cagioni sopraindicate ritornare il ritiro del mare dalle vicine spiagge; e con ciò vengo-

no spiegati i replicati ritiri, che furono osservati in alcune eruzioni del Vesuvio.

187 Siccome nell'eruzioni vulcaniche la forza di espansione sì del fuoco che di altri vapori elastici è straordinariamente grande, ed altronde essa si dirige in ogni parte, ed anche al basso, così ordinariamente non deve intervenire un'elevazione delle acque marine nelle cavità vulcaniche; anzi talora può avvenire che quella forza sia maggiore della pressione dell'atmosfera, e perciò faccia uscire verso il mare l'acqua già esistente nelle cavità medesime; il che somministra la ragione, per cui di rado osservansi ritiri di mare in tali circostanze, ed insieme dimostra che per succedere questo fenomeno è necessario, oltre ad altre condizioni, che la pressione dell'atmosfera sul mare prevalga a quella che risulta dalle forze agenti nell'interno del vulcano.

188 L'acqua, che nelle esplosioni vulcaniche viene gettata fuori del cratere, riguardasi da alcuni come proveniente dalle piogge raccoltesi nell'interne cavità. Ma primamente non intendesi come possa per le piogge raccogliersi tant'acqua, quanta ne tramandano le eruzioni, massime che, atteso il continuo calore de' fuochi vulcanici, quella dovrebbe svaporare a misura che vi entra. Aggiugnasi che in tali occasioni talora insieme coll'acqua escono anche conchiglie di mare: il che è argomento della comunicazione delle acque marine con tali vulcani.

189 Straordinaria, e quasi incredibile è la forza d'esplosione de' vulcani siccome quella che giugne a slanciare grossi macigni ad un'altezza la quale giudicata ad occhio talora è di 500 tese al disopra dell'orificio del cratere (a). Questi ed altri simili effetti si possono vedere nelle storie che da diversi furono scritte (b). Al nostro intento basterà ora richiamare quelli, che hanno relazione alle acque: tali sono la comunicazione che alcuni vulcani certamente hanno col mare; il ritiro del mare medesimo che talora interviene sulle spiagge circostanti; i getti di acqua, che non di rado

(a) *Condamine l. c.*

(b) *Hamilton Campi Phlægræi. Dietrich note alle lettere del Feib*

404. *Rezier Journal de Physique. Della Torre ec.*

escono dal cratere; l'azione de' fuochi vulcanici anche tra mezzo al mare; lo squagliamento rapido di nevi che avviene nelle eruzioni in monti coperti perpetuamente di neve, come sono quelli delle Cordilliere (a). A tutto ciò vuol si aggiugnere la disposizione di molte lave a strati alternanti con altri strati di pietra calcaria o di materia mista a conchiglie marine: il che indica una alternazione dell'azione del fuoco con quella delle acque (b).

190 Gioverà pure fare qui alcune riflessioni che potranno servire a dichiarazione di alcuni fenomeni, ed a prevenire alcuni errori, ne quali può facilmente indurre lo stato, in cui al presente si trovano le lave ed altri prodotti eruttati dai vulcani. Qualunque sia la cagione, per cui in alcuni siti soltanto si manifestino de' fuochi sotterranei, egli è certo, che nelle viscere de' vulcani esistono, e si vanno rinnovando diverse sostanze atte ad ardere, come sono aria infiammabile, zolfo, ed altri bitumi. Colà pure si formano, e si sviluppano diverse materie saline, come sale ammoniaco, ed acido vitruolico; e quando il mare vi ha comunicazione, deve pure esistervi sale marino, dalla scomposizione del quale risulta un acido analogo, ed un alkali minerale. Queste materie saline sono atte a sciogliere diverse sostanze terree, e per se facilitano la fusione delle medesime; il calore, ed il fuoco continuo, che agisce in que' sotterranei combinato colle materie stesse deve molto più facilmente agire sulle diverse pietre, che vi esistono: onde una gran parte delle medesime deve essere o rammollita o sciolta, o anche fusa, ed in tal modo devono risultare diversi composti di sostanze terree, saline, e bituminose, i quali per mantenersi nello stato di fusione non hanno bisogno di tanto calore, quanto sarebbe richiesto se i componenti consistessero in sole sostanze terree.

191 Nelle convulsioni vulcaniche tali composti già resi più o meno fluidi sottoterra vengono eruttati insieme con altri corpi sodi, e cadendo fuori del cratere seguitano a

(a) *Condamine* l. c.

(b) *V. De Luc* *Lettres physiques* t. IV., *Fortis* l. c.

scorrere per un certo tempo , cioè finchè mantengono una certa fluidità ; il che dipende non tanto dal calore , quanto dalla materia combustibile con essi mista che seguita ad ardere , e dalle sostanze saline , che rimanendo con essi combinate mantengono nel totale una maggiore facilità di fusione più o meno perfetta finchè sieno scomposte e svaporate .

192 Quindi intendesi primamente per qual motivo alcune lave , come fu quella dell' Etna , che seguitò a scorrere per dieci anni percorrendo un miglio , mantenganli fluide per un tempo molto maggiore di quello che basterebbe alla loro consolidazione se fossero state fuse per un semplice calore di comunicazione . Tal motivo , come fu osservato dal Sig. Commendatore *Dolomieu* (a) , è la materia combustibile con cui sono miste ; ma vuolisi inoltre aggiungere lo stato di maggiore fluidità , in cui vengono mantenute dalle sostanze saline , l' esistenza delle quali in molte lave è manifesta non solo dalle analisi chimiche , ma anche dall' umidità che attraggono .

193 Intendesi parimenti , che la fusione prodotta nelle pietre dal fuoco vulcanico non sempre deve essere accompagnata da vitrificazione . Questa verità si riconosce manifestamente in molte lave , le quali furono sopra luogo osservate in istato di fusione , e di fluidità , e nulla dimeno dopo la loro consolidazione non si veggono vitrificate . Ma la ragione di tal fenomeno non appare se non dalle cose sopra esposte . Il fuoco riscaldando le pietre de' sotterranei vulcanici le fa scoppiare , e le riduce in sabbie ed in piccoli frammenti . Con questi , che sogliono essere di difficile fusione , si combinano le sostanze infiammabili , e saline , che si formano , e si sviluppano nelle vicinanze , e che sono di facile fusione . Queste seconde ad un calor mediocre possono divenir fluide , sebbene le prime rimangano ancora solide , o al più vengano alquanto rammollite . Allora che una mistura è composta di materie in parte fuse , ed in parte non fuse , essa non ha che una fluidità imperfetta , e la sua fusione è incompiuta , giacchè per essere compiuta richiedesi che la massa sia ridotta ad una certa

(a) *Memoire sur les Isles Ponces - Voyages aux Isles de Lipari.*

uniformità, per cui le sue particelle sieno indiscernibili, ed in ognuna, che si assuma, sia un eguale grado di calore, ed una eguale proporzione delle materie mischiate; e quando tali materie sono giunte ad una compiuta fusione, sogliono anche esser ridotte in una massa vitrificata. Ora è chiaro che a render compiutamente fusa o vitrificata una delle miscele sopraesposte richiedesi maggior calore di quello che basta a darle una incompiuta fusione: altronde è manifesto che nelle diverse parti di un vulcano, e nei diversi tempi delle sue eruzioni diverso è il calore, e però questo talora può essere insufficiente alla vitrificazione della materia medesima, anzi se giudichiamo dalle lave, noi riconosciamo che generalmente il fuoco vulcanico per lo più non giunge a vitrificare le materie eruttate; e forse che nelle lave non vitree il calore è tanto poco che la loro fluidità generalmente non è accompagnata da incandescenza.

194 Quindi non può riguardarli come generalmente vera la proposizione del Sig. *Dolomieu*, il quale stima che il fuoco vulcanico agisca diversamente da quello dei nostri forni, producendo una fluidità per semplice dilatazione. La pruova che egli adduce si è, che spesso nelle lave, le quali certamente sono state fuse, trovansi scerli cristallizzati, e fel-dispati, i quali sebbene sieno di facile fusione, pure non si veggono in nessun modo alterati dall'azione del fuoco. La maniera di agire del fuoco dipende non solo dalla sua natura, ma anche dalla qualità delle materie su cui agisce. Così quando queste sono miste a sali e bitumi generalmente si gonfiano considerabilmente a motivo dello sviluppamento di essi e di altre sostanze elastiche che contengono; e tale gonfiamento realmente interviene, e si riconosce in molte lave, e massime nelle porose, e nelle pomici. Che se per dilatazione il lodato Scrittore intende un tale gonfiamento, allora il fuoco vulcanico non presenterebbe in questo effetto cosa alcuna aliena dall'azione de' fuochi volgari, giacchè, come accennai, anche le lave contengono sostanze saline, e bituminose, per cui suole il fuoco far gonfiare le materie sottoposte alla sua azione. Posto tale gonfiamento, per cui la massa si riduce in maggior volume, tanto più tenue dee riescire il calore delle lave, e quindi oltre alle sopraccenna-

te si ha una nuova ragione per ispiegare come i scerli, ed i feldispati si sieno conservati sani per entro alle lave. Perciocchè facilmente comprendesi che questi possono essere stati eruttati colla loro forma, e figura naturale, la quale pottertero conservare anche tra mezzo alle lave, a motivo del poco calore che queste avevano.

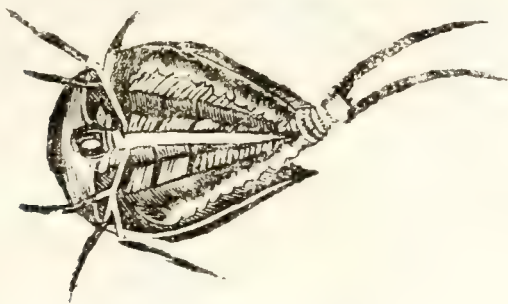
195 Alla tenuità del calore, che attribuisco a molte lave, e massime alle non vitree, in vano si opporrebbe, che per fonderle coll' arte è necessario un fuoco non minore di quello richiesto per fondere gli scerli, ed i feldispati. Perciocchè lo stato delle lave, dappoichè si sono consolidate, è assai diverso da quello che avevano, allora che erano fluide per l'azione vulcanica. Quando avevano tale fluidità, contenevano una maggior copia di sostanze combustibili, e saline delle quali una gran parte abbrugiò, svanì, e si scompose nel tempo che le lave seguitarono a mantenersi fluide: onde dopo la loro consolidazione sono meno fusibili di quel che fossero per innanzi. La mutazione di stato in tutti i corpi generalmente induce una diversa fusibilità: Così il piombo, dappoichè è calcinato, è assai più difficile a fonderli di quel che sia quando è in istato metallico; onde non è maraviglia se ad una simile variazione sieno soggette anche le lave, e ciò per la ragione soprarrecata.

196 E ciò basti dei fuochi vulcanici. Resta che io dica alcuna cosa di un raro genere di eruzioni che il Sig. Commendatore *Dolomieu* riporta pure ai vulcani (a). Osservavasi questo fino dai tempi di *Solino* nel territorio di Agrigento nella Sicilia, ed esso presentasi in un piano situato al vertice della Macaluba, monte di mediocre altezza. Su di esso forgono diverii coni d'argilla alti non più di due piedi e mezzo, ciascuno dei quali ha nel mezzo un piccolo cratere. Da ognuno di questi ascendono piccole malle d'argilla umida, le quali quando sono giunte verso i bordi del cratere, scoppiano con mediocre rumore, e di poi l'argilla in parte ricade, ed in parte scorre lungo le pareti esterne.

(a) Voyag. aux Isles de Lipari.

ne. Questo stato di cose, che suol durare annualmente tutto l'inverno, si muta assai, allorchè v' intervengono straordinarie esplosioni: il che alcuni dicono accadere ogni cinque anni incirca. Esse sono precedute da rumori, e tuoni sotterranei, che si fanno sentire in distanza di circa tre miglia, e dopo alcuni giorni vengono slanciati ad un' altezza fino di 200 piedi frequenti getti di terra, di fanghiglia, ed argilla stemperata mista ad alcune pietre. Nel 1777 avvennero quattro eruzioni in un giorno delle quali la più lunga durò mezz'ora.

197 Sebbene in queste esplosioni si manifesti un odore di fegato di zolfo, ed in alcune cavità si trovi un olio bituminoso, pure secondo le osservazioni di *Dalomieu* non si riconosce in quelle vicinanze verun indizio di fuochi vulcanici; ed egli le deriva da un' aria fissa, la quale dalla pietra calcarea componente il monte si sviluppi per l' azione dell' acido marino, che per mezzo dell' acido vitruolico dell' argilla si separa dal sale montano che è copioso in que' contorni: onde l' accennato fenomeno viene da lui riguardato come un vulcano ad aria.



I N D I C E

Dei Capi contenuti nella prima Parte.

- Cap. I. *Della figura della terra.*
 II. *Sulla divisione generale della superficie terrestre.*
 III. *Sui mari in generale.*
 IV. *Dei ghiacci polari ed alpini.*
 V. *Sul livello del mare.*
 VI. *Sulle paludi.*
 VII. *Sui varj movimenti del mare.*
 VIII. *Sui cambiamenti di mare in terra, e di terra in mare.*
 IX. *Sulla costituzione generale dei monti.*
 X. *Sull'altezza dei monti.*
 XI. *Sulla quantità della materia, che forma le ine-
guaglianze al disopra del livello del mare.*
 XII. *Sulla stratificazione.*
 XIII. *Sulla posizione degli angoli sinuosi e rilevati che
osservansi nelle Valli.*
 XIV. *Delle conchiglie ed altri corpi organizzati fossili,
che si trovano sulla superficie terrestre.*
 XV. *Sui vulcani.*

DELLA LATITUDINE

E DELLE REFRAZIONI DI PARIGI E DI VERONA.
E DELL'OBLIQUITA' DELL'ECLITTICA.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI.

LA polizione geografica dell'Osservatorio, che ho fatto costruire in Parigi nella corte S. Guglielmo sull'imboccatura della strada delle Beccherie in quella di *Richelieu*, e nel quale ho intrapreso ed esercitato l'astronomia pratica pel corso di mei 40 da Ottobre 1782 al febbrajo 1786, è stata da me investigata in più modi. Con osservazioni terrestri; o sia col mezzo d'angoli orizzontali, relativamente alla posizione dell'Osservatorio reale: e con osservazioni celesti; cioè di stelle circompolari, di stelle al zenit, e di altezze solstiziali del Sole.

Quanto al primo; ho osservato l'azzimutto occidentale della lanterna *des galeries du Louvre* $= 17^{\circ}41'$, quello pure occidentale del campanile di S. Rocco $= 126^{\circ}8'$, quello simile della cupola dell'Assunzione $= 116^{\circ}23'$, e quello orientale della cupola del Collegio Mazarino $= 7^{\circ}17'$. Combinando questi dati, e prendendo la polizione degli accennati campanili, nel Tomo VIII delle Efemeridi di Parigi pubblicate dal Sig. *de la Lande*, alla pag. LXI dell'Introduzione, ho conchiuso esser di tese 34 la distanza dalla mia Specola alla meridiana dell'Osservatorio regio, senza che detta quantità s'allontani di mezza tese da alcuno de' calcoli; ed esser di tese 1583 la distanza della mia Specola dalla perpendicolare del detto Osservatorio reale, con divario di sole $3\frac{1}{2}$ tese dal calcolo più discorde. Ne segue che in longitudine il mio Osservatorio sta $0''$, 2 di tempo all'occidente del regio, e in latitudine $1' 40''$ più al nord.

K ij

La latitudine dell'Osservatorio regio è di 10 in 14 secondi sopra $48^{\circ} 50'$. Il Sig. *Maskeleyne*, nel I Vol. degli Atti della Società reale di Londra pel 1787, prova i 14" con le osservazioni di *la Caille*; e così s'è adottato comunemente in Parigi, e da molt'anni nella Conoscenza de' tempi, da che il definì lo stesso *la Caille* per grandissimo numero di osservazioni (*Mém. de l'Acad. des sciences pour 1755*). Il Sig. *Gentil* dopo accurata discussione decide per li 13" (*Mém. 1783*). *Cassini* de Thury (*Mérid. vérifiée* pag. 281) trova da alcune sue osservazioni 10" e da altre 12". Crederò dunque poter prefiggere come dato sicuro, che la latitudine della mia Specola non può esser minore di $48^{\circ} 51' 50''$, nè maggiore di $48^{\circ} 51' 54''$. Sta ora alle osservazioni celesti il toglier, se sia possibile, questa incertezza.

Il mio quadrante, con cui furon fatte, non ha veramente altro che tre piedi di raggio: ma è di tal pregio, che avea meritato al suo autore il Sig. *Mégnié* mezzo il premio proposto dall'Accademia delle Scienze a chi si fosse segnalato nella costruzione di un istromento sì fatto. E' esso armato di un cannocchiale mobile con obbiettivo acromatico a due vetri del diametro di due pollici, e con due micrometri, l'uno esteriore a vite, l'altro interiore a fila, in ciascuno de' quali si distingue il minuto secondo. Mi riserbo poi di narrare in altra occasione quai mezzi ho adoprati per rilevare con l'ultimo scrupolo gli errori della divisione di questo quadrante, il che mi ha costato più mesi d'improba fatica.

Or pongo tosto sott'occhio a' lettori nelle tre seguenti Tabelle il ristretto delle mie osservazioni celesti, che servono principalmente a determinare la latitudine della mia Specola in Parigi.

TABELLA I.

Stelle circompolari.

Nome delle Stelle.	Offerv. fop.il polo.	Differ. estreme	Offerv. fop.il polo.	Differ. estreme	Latitudine di Parigi.	Declinazio- ne 1783.
ϵ Dragone	N.° 2	0", 5	N.° 2	2", 4	48° 51' 53", 0	59° 43' 53", 0
θ Orsa minore	5	4, 1	4	3, 9	54, 1	78 3 52, 8
ζ Orsa minore	8	4, 0	5	4, 8	53, 3	78 27 9, 1
asc. r. 16° 11'	4	3, 9	5	7, 5	54, 0	77 21 51, 5
η Dragone	8	7, 9	4	5, 0	56, 3	62 0 35, 9
Somme	N.° 27	20", 4	N.° 20	23", 6	risult.° 54, 0	

TABELLA II.

Stelle al zenit.

Stelle e Cataloghi.	Declinazione 1783	N.° delle osservaz.	Differ. estreme	Latitudine di Parigi
α di Perseo <i>la Caille</i>	49° 4' 24", 8	9	6", 5	48° 51' 53", 6
<i>Mayer</i>	23, 0			51, 8
<i>Bradley</i>	24, 1			52, 9
δ di Perseo <i>la C. B.</i>	47 4 36, 6	11	5, 0	53, 8
η Orsa mag. <i>C. M. B.</i>	50 24 7, 6	10	10, 0	50, 0
γ Dragone <i>la Caille</i>	51 31 17, 3	4	3, 8	56, 1
<i>Mayer</i>	21, 5			60, 3
<i>Bradley</i>	19, 5			58, 3
γ Cigno <i>la Caille</i>	39 34 21, 7	3	0, 3	56, 9
Somme		N.° 37	25, 6	risultato 55, 6

TABELLA III.

Solstizj osservati in Parigi .

Epoche .	Offer- vazioni.	Diff. estrema	Risultati
Decemb. 1782	N.° 6	9",1	dist. al zenit vera 72° 19' 50", 8
Giugno 1783	6	6,0	idem 25 23 55, 7
			dist. de' tropici 46 55 55, 1
Marzo 1783			obliquità media 23 27 57, 6
			latitudine <u>48 51 53, 3</u>
Giugno 1783	6	6,0	dist. al zenit vera 25 23 55, 7
Decemb. 1783	39	5,8	idem 72 20 4, 4
			dist. de' tropici 46 56 8, 7
Settembre 1783			obliquità media 23 28 4, 3
			latitudine <u>48 52 0, 0</u>
Decemb. 1783	39	5,8	dist. al zenit vera 72 20 4, 4
Giugno 1784	41	13,2	idem 25 23 56, 4
			dist. de' tropici 46 56 8, 0
Marzo 1784			obliquità media 23 28 4, 0
			latitudine <u>48 52 0, 4</u>

Rappresenta la I Tabella 47 osservazioni di cinque stelle circompolari, la penultima delle quali non è ne' Cataloghi. Ho dichiarato il numero e le differenze estreme delle osservazioni d'ogni stella, onde sia manifesto il grado di fiducia che meritino. Ogni quantità per l'altezza del polo ed ogni declinazione sono trovate, prendendo al solito il mezzo aritmetico tra le osservazioni d'ogni stella, così per le superiori al polo, come per le inferiori, separatamente.

La declinazione di ι Dragone presa da *la Caille* e ridotta a 1 Gennaio 1783 cresce di $0''$, 7 solamente sopra quella da me osservata. Quella di η è minore di $7'$, 5 della mia. Nel Catalogo di *Flamsteed* vi ha poi errore di $10'$ di meno nella declinazione di θ dell'Orsa minore; e di $1'$ di più nella latitudine di ζ , come si trova facendo il calcolo con l'ascensione retta e con la declinazione di *Flamsteed*.

Ad avere il giusto mezzo tra i cinque risultati della Tabella per l'altezza del polo, dando a ciascuno quel peso ed influenza che gli si competono in proporzione del numero e della concordia delle osservazioni, gli ho moltiplicati ad uno ad uno per un fattore composto del rispettivo numero delle osservazioni tra sopra e sotto, diviso per la somma delle differenze estreme tra le osservazioni medesime, indi con la somma dei detti fattori ho partito quella dei prodotti. Per esempio, il fattore che moltiplica la latitudine trovata col mez-

zo di ι del Dragone è $\frac{2+2}{0,5+2,4}$, o vero $\frac{40}{29}$; quello per

θ dell'Orsa minore è $\frac{5+4}{4,1+3,9}$, o pure $\frac{9}{8}$; e così degli

altri. Delle latitudini poi era superfluo comprender nel calcolo la quantità comune $48^\circ 51' 50''$. Ho avuto dunque

$$\left(3'' \times \frac{40}{29} + 4'', 1 \times \frac{9}{8} + 3'', 3 \times \frac{130}{88} + 4'' \times \frac{90}{114} + 6'', 3 \times \frac{120}{129} \right) : \left(\frac{40}{29} + \frac{9}{8} + \frac{130}{88} + \frac{90}{114} + \frac{12}{129} \right)$$

$= 3'', 97$. E però la latitudine del mio Osservatorio in Parigi risultante da queste osservazioni è $48^\circ 51' 54''$.

Le quantità contenute nelle due ultime colonne della Ta-

bella dipendono dalle refrazioni del *Bradley*, che sono quelle delle quali ho fatto uso, modificandole per altro secondo l'altezza del barometro e del termometro mediante la Tavola del Sig. *Bonne* che è la CLX del Tom. I della seconda edizione dell' *Astronomia* del Sig. *de la Lande*. Due ragioni m' hanno sforzato a presceglie la tavola del *Bradley*. 1. Perchè meglio d'ogni altra mette d'accordo tra loro le altezze di polo risultanti dalle mie osservazioni delle stelle diverse circompolari. 2. Perchè le refrazioni di quel celebre Inglese, alle altezze di cui si tratta, son le più piccole ch'io conosca, parlando di tavole già stampate: e se le avessi adoperate più gagliarde, la latitudine sarebbe riuscita minore di $48^{\circ} 51' 54''$, quando le altre osservazioni compendiate nelle Tabelle II e III me la danno anzi più grande. Concorrono dunque le due ragioni ora addotte a confermare alla tavola del *Bradley*, relativamente al clima di Parigi, quel primato, che già se le accorda dai più, se non m'inganno.

Vengo ora alla II Tabella, la qual dimostra la latitudine risultante da 37 osservazioni di cinque stelle vicine al zenit, tratta la loro declinazione dai Cataloghi più accreditati, e ridotta a 1 Gennajo 1783, come nella seconda colonna, mediante la formola $50'' \cdot 473 \times \text{sen. obliquità intermedia} \cos. \text{ascensione retta intermedia}$, dove il fattore $50'' \cdot 473$ è tolto dall' *Astronomia* del Sig. *de la Lande*, Tom. IV *supplém. à l'art.* 2745. Il risultato finale per la latitudine è $48^{\circ} 51' 55'' \cdot 6$ investigando il mezzo con lo stesso metodo dichiarato per la Tabella I. Quanto sia alle declinazioni dei diversi Cataloghi, ho preso il mezzo aritmetico, quando la differenza non montava a $1''$.

La latitudine dedotta dalle stelle al zenit è dunque maggiore di $1'' \cdot 6$ di quella determinata immediatamente per via delle stelle circompolari. Ma oltre che nelle prime vi può esser dubbio di moto proprio, o di qualche error de' Cataloghi, che in fatti non sono concordi per tutte egualmente, ho stimato e stimo doverli negligerè quel piccolo divario, e abbracciare e tenere la quantità conseguita dalle stelle circompolari, anche per esser questa ratificata dalle osservazioni terrestri, le quali permetterebbero diminuzione, non già accrescimento.

Mi lusingo pertanto che le 84 osservazioni, delle quali ho presentato i risultati nelle Tabelle I e II, possano aver qualche peso, non solo per definire a $48^{\circ} 51' 54''$ la latitudine della mia Specola in Parigi, ma ancora per attenuar l'incertezza che rimanesse sopra la latitudine dell'Osservatorio reale $48^{\circ} 50' 14''$.

Restava da parlare delle osservazioni solstiziali del Sole, raccolte nella Tabella III. Essa comprende quattro soli solstizj, per essermi stata da diversi contrattempi impedita l'osservazione dei tre susseguenti abbracciati dalla mia residenza in Parigi. Il copioso numero delle osservazioni negli ultimi due solstizj della Tabella non esce fuori dell'ottava avanti e dopo il solstizio; ma dipende dall'aver io fatto ogni giorno parecchie osservazioni, lontane tutt' al più un quarto d'ora dal meridiano, e ridotte al momento del mezzodì col soccorso della formola esattissima già da me pubblicata (*Trigonom.* 833). La metà di queste osservazioni fu fatta sull'orlo boreale, l'altra metà sull'australe del Sole: il che non ripeteremo poi per quelle di Verona. In questa maniera si toglie ogni incertezza sul diametro, che viene ad esser determinato da un gran numero di osservazioni, e che importa determinare accuratamente, poichè ogni cannocchiale lo rappresenta di grandezza diversa.

Trattandosi di osservazioni copiose ho creduto che bastasse pigliare il mezzo aritmetico tra quelle d'uno stesso dì, senza poi chiamare al paragone ed in computo le lor differenze estreme: le differenze che sono nella Tabella mostrano unicamente il divario dal maggiore al minore de' risultati medj diurni. Ho bensì moltiplicato ciascuno di questi pel numero delle osservazioni da cui è nato, ed ho partito la somma de' prodotti per quella delle osservazioni d'ogni solstizio. Alle distanze dal zenit, ricavate con questo metodo, ho applicato convenevolmente l'equazione $9''$ cos. *nodo della luna*, e così liberate dalle apparenze della nutazione le chiamo *vere*, e sono quelle che ho consegnate nella Tabella.

Dicesi *media* comunemente l'obliquità dell'eclittica *vera*, cioè sviluppata dalle ineguaglianze periodiche della nutazione. L'obliquità dedotta da due solstizj consecutivi deve assegnarsi rigorosamente all'epoca dell'equinozio intermedio, e

così ho fatto per evitare sebben tenuissima anche la diminuzione di obliquità da un solstizio all'altro, proveniente dalle attrazioni de' pianeti. Ognun vede poi che le quantità per l'altezza di polo nella Tabella si rinvencono col sommare al solstizio di state l'obliquità con la distanza dal zenit, e col sottrarre la prima dalla seconda nel solstizio d'inverno.

Dai quattro osservati solstizj, presi a due a due successivamente, nascono nella Tabella tre calcoli e tre risultati. Li due ultimi calcoli molto bene si accordano tra di loro, ma pigliando in considerazione anche il primo, e moltiplicando al modo già detto ognuna delle tre latitudini risultanti, col rispettivo fattore composto dal numero delle osservazioni diviso per la corrispondente somma delle differenze estreme, riesce la quantità media $48^{\circ} 51' 59''$, 6 la quale eccede di $5''$, 6 quella trovata di sopra per via delle stelle circompolari. Una tal discrepanza riceve singolar peso dalle osservazioni fatte in Verona, dove ha pur luogo stessissima: laonde fa duopo che avanti di pronunziar cosa alcuna anche quelle sian poste di subito sotto gli occhi de' leggitori nelle seguenti quattro Tabelle.

TABELLA IV.

Stelle circompolari.

Nome delle Stelle.	Offervaz. fot.il polo.	Differ. estrema	Offervaz. fot.il polo.	Differ. estrema	Latitudine di Verona.	declinazione 1789
Cefeo d'Evelio	N.° 3	3", 2	N.° 4	1", 9	45° 26' 2", 3	85° 7' 3", 1
Polare	8	7, 1	11	7, 3	5, 9	88 10 52, 8
Cassiope	4	4, 8	6	4, 0	5, 2	75 5 15, 6
Cassiope	3	2, 0	4	3, 8	5, 2	65 31 30, 6
Orf. r. 2 ^b 42'	6	6, 3	3	2, 5	6, 1	74 17 43, 4
Giraffa d'Evel.	6	5, 7	5	5, 3	6, 9	64 51 44, 1
Orfa minore	3	3, 9	4	6, 0	7, 1	78 32 20, 3
Orfa minore	5	5, 2	9	9, 9	7, 4	76 38 6, 6
Orfa minore	6	5, 2	8	6, 7	7, 6	75 1 6, 7
Orfa minore	5	5, 2	3	3, 2	2, 5	78 2 43, 9
Orfa minore	4	2, 1	6	7, 1	6, 3	78 26 4, 8
Orf. r. 16 ^b 11'	2	1, 3	3	4, 4	6, 2	77 20 55, 3
Dragone	4	3, 8	3	4, 8	6, 5	61 59 47, 2
Somme	N.° 59	55", 8	N.° 69	66", 9	rifult.°	5", 5

TABELLA V.

Stelle al zenit.

Stelle e Cataloghi.	Declinazione 1789	N.° delle osserv. estreme	Differ.	Latitudine di Verona.
θ di Perseo, <i>Bradley</i>	48° 19' 34", 1	3	0", 4	45° 26' 14", 6
μ Orsa mag. <i>Bradley</i>	42 33 14, 3	5	5, 9	3, 5
η Orsa mag. <i>la C.M.B.</i>	50 22 18, 1	13	12, 3	6, 3
θ del Cigno, <i>Bradley</i>	49 44 11, 0	3	1, 0	25 53, 6
δ del Cigno, <i>Bradley</i>	44 37 22, 5	8	4, 1	26 5, 1
<i>la Caille</i>	25, 6			8, 2
γ del Cigno, <i>la Caille</i>	39 35 28, 4	5	5, 2	11, 3
α del Cigno, <i>la Caille</i>	44 32 2, 2	7	4, 1	8, 5
<i>Mayer</i>	3, 8			10, 1
<i>Bradley</i>	0, 4			6, 7
<i>Maskelyne</i>	1, 4			7, 7
ρ del Cigno, <i>Bradley</i>	44 39 57, 4	11	10, 1	8, 5
2π del Cigno, <i>Bradley</i>	48 20 22, 3	12	16, 3	11, 4
γ della Lucertola <i>Br.</i>	49 12 8, 5	5	5, 0	15, 8
σ Andromeda, <i>la C.</i>	41 11 44, 6	7	7, 1	1, 5
1λ Andromeda, <i>Br.</i>	45 19 13, 7	4	1, 6	22, 8
Somme N.° 83		76, 7	Risult.°	9, 1

TABELLA VI.

Stelle osservate in Parigi e in Verona.

Nome delle Stelle.	Offervaz. in Parigi.	Differ. estreme	Declinazio- ne 1789	Offervaz. in Verona.	Differ. estreme	Latitudine di Verona.
2 Cassiope	N.° 10	5", 3	60° 39' 39", 3	N.° 4	3", 4	45° 26' 11", 1
Cassiope	3	1, 4	52 44 1, 5	6	5, 8	8, 6
Cassiope	4	4, 0	56 41 29, 2	7	6, 8	12, 7
Perseo	2	0, 4	48 19 26, 0	3	0, 9	6, 5
Orsa magg.	10	10, 0	50 22 22, 2	13	12, 3	10, 4
A Boote	2	1, 3	47 4 11, 0	14	10, 1	10, 1
Cigno	8	10, 1	49 44 22, 8	3	1, 0	5, 4
2 Cigno	5	4, 6	47 4 27, 2	8	8, 1	11, 4
Cigno	3	0, 3	39 35 25, 5	5	5, 2	8, 4
8 Andromeda	3	3, 2	47 51 54, 2	10	10, 2	6, 0
Somme	N.° 50	40", 3		N.° 73	63", 8	risult.° 8", 7

TABELLA VII.

Solstizj osservati in Verona.

Epoche.	Offer- vazioni.	Diff. estrema	Risultati.	
Decemb. 1787	N.° 3	0",9	dist. al zenit vera	68° 54' 10", 4
Giugno 1788	21	9, 1	idem	<u>21 58 16, 1</u>
			dist. de' tropici	46 55 54, 3
Marzo 1788			obliquità media	23 27 57, 2
			latitudine	<u>45 26 13, 3</u>
Giugno 1788	21	9, 1	dist. al zenit vera	<u>21 58 16, 1</u>
Decemb. 1788	18	3, 3	idem	<u>68 54 12, 2</u>
			dist. de' tropici	46 55 56, 1
Settembre 1788			obliquità media	23 27 58, 0
			latitudine	<u>45 26 14, 1</u>
Decemb. 1788	18	3, 3	dist. al zenit vera	68 54 12, 2
Giugno 1789	61	3, 2	idem	<u>21 58 11, 5</u>
			dist. de' tropici	46 56 0, 7
Marzo 1789			obliquità media	23 28 0, 3
			latitudine	<u>45 26 11, 8</u>
Giugno 1789	61	3, 2	dist. al zenit vera	<u>21 58 11, 5</u>
Decemb. 1789	30	4, 9	idem	<u>68 54 7, 1</u>
			dist. de' tropici	46 55 55, 6
Settembre 1789			obliquità media	23 27 57, 8
			latitudine	<u>45 26 9, 3</u>

Rappresenta la IV Tabella 128 osservazioni di 13 stelle circompolari, donde risulta la latitudine della mia Specola in Verona di $45^{\circ} 26' 5''$, 54, dato a ciascun de' 13 risultati il peso che merita, col metodo già adoperato per la Tabella I. Queste osservazioni sembrano degne di molta fiducia, poichè dal minore al maggiore de' 13 risultati il divario non è che di $5''$, 3.

La declinazione della Polare, tolta dal Catalogo di *la Caille*, e ridotta a 1 Gennajo 1789, riesce $2''$, 6 più piccola della mia: traendola poi da 5 osservazioni che ho fatte in Parigi, e le cui differenze estreme montano a $5''$, 7, forge $4''$, 8 più piccola.

La declinazione di β dell'Orsa minore secondo il *Bradley* supera la mia di $3''$, 4; e secondo *la Caille* di $10''$, 4: si potrebbe però sospettare in questa stella un moto proprio il qual diminuisca la declinazione.

La declinazione delle quattro ultime stelle della Tabella IV concorda molto bene con quella da me osservata in Parigi ed esposta nella Tabella I. Le differenze sono $+ 1''$, 2; $- 0''$, 3; $- 1''$, 1; $+ 1''$, 7. Il segno $+$ significa che la declinazione della Tabella IV è maggiore, il segno $-$ ch'ella è minore di quella della Tabella I, ridotta a 1 Gennajo 1789. E questa concordia aggiunge non lieve peso alle latitudini di Parigi e di Verona dedotte dalle stelle circompolari.

Anzi poichè dalla mia declinazione di η del Dragone, osservata in Parigi, e comparata a quella di *la Caille*, si conchiude un annuo incremento di $0''$, 23; l'incremento di $1''$, 7 osservato in Verona cinque anni dopo, conferma il moto proprio di questa stella, e non a discordia, ma quasi tutto a consenso di osservazioni deve attribuirsi.

Nella V Tabella son contenuti li risultati di 83 osservazioni di 12 stelle circonvicine al zenit. Questi sono assai più discordi di quelli della Tabella antecedente: il che può venire o da moto proprio delle stelle, o da qualche errore nelle declinazioni de' Cataloghi. Quindi è che il risultato medio $45^{\circ} 26' 9''$, 1 ottenuto col metodo già indicato, non può stare al paragone con quello somministrato dalle stelle circompolari.

Sorge per altro a fiancheggiarlo la Tabella VI che reca il confronto di 73 osservazioni fatte in Verona con 50 fatte in Parigi sopra 10 stelle poco lontane dal zenit, per le quali la refrazione non può causare incertezza alcuna. Ma in questo confronto la latitudine di Verona dipende da quella del mio Osservatorio in Parigi $48^{\circ} 51' 54''$. Come poi il risultato medio della Tabella VI si appoggia sull'esattezza e concordia tanto delle osservazioni Parigine quanto delle Veronesi, così per ogni stella ho preso la somma delle osservazioni da me fatte in ambi i luoghi, la ho divisa per la somma delle differenze estreme correlative, e con il quoziente ho moltiplicato la latitudine di Verona data da quella stella, operando nel resto come s'è detto per la Tabella I. Il risultato medio per la latitudine emerse $45^{\circ} 26' 8''$, 68.

Finalmente la Tabella VII comprende li risultati di cinque solstizj osservati in Verona, ricavati in tutto e per tutto nel modo stesso tenuto per la Tabella III. Avendo moltiplicato ciascuna delle quattro latitudini pel rispettivo numero delle osservazioni da cui deriva, diviso dalla corrispondente somma delle differenze estreme, la quantità di mezzo riuscì $45^{\circ} 26' 11''$, 2.

Dopo fatta la dichiarazione del contenuto nelle sette Tabelle, resta ora da ragionare sul confronto e sul peso de' loro risultati. E' degno di considerazione e di esame quel che ho già accennato, cioè che la latitudine ricavata dai solstizj eccede quella dedotta dalle stelle circompolari d'una quantità che può dirsi uguale per le osservazioni di Parigi e per quelle di Verona: in quelle di Parigi l'eccesso è di $5''$, 6; in quelle di Verona di $5''$, 3.

E prima si dee far palese che quest'ultimo era più di due volte maggiore mentre adoperavo le refrazioni del *Bradley*. Ma una tanta discordanza mi pose in sospetto che le rifrazioni in Verona fossero minori di quelle di Parigi. Mi applicai pertanto a questa importante indagine, e riflettendo che dove l'effetto era più gagliardo ivi giovava esplorarne la quantità, posi l'animo ad osservare l'altezza meridiana di varie stelle vicine all'orizzonte, e di posizione nota dai Cataloghi; altre però verso tramontana, ed altre verso mezzodì, posciachè se da una parte la latitudine assunta mi presentasse

raffe una refrazion troppo grande, dall'altro me la produrrebbe troppo piccola, e l'error divenuto doppio doveva farli più manifesto. In questa maniera da diverse osservazioni di τ , γ , α , λ di Perseo nel loro passaggio sotto il polo; e di ν , η Centauro, β , δ Lupo; ridotte concordi mediante le due suppozioni, che le rifrazioni medie siano eguali al nord e al sud, e che la latitudine sia di $45^{\circ} 26' 8''$, 8; ho scoperto che le refrazioni medie in Verona sono in fatti più piccole di $\frac{1}{25}$ di quelle che porta la tavola del *Bradley*. Nè

si deve temer di errore per capo delle rifrazioni nelle declinazioni de' Cataloghi di *la Caille*, *Mayer* e *Bradley*, poichè la polizion delle stelle che ho trascelte fu da que' celebri Osservatori determinata in latitudini dove passavano appresso al zenit.

E' già ricevuto dagli Astronomi, che le rifrazioni scemino quanto più le terrestri plaghe sono vicine all'equatore.

Ma per soli $3^{\circ} \frac{1}{2}$ di avvicinamento, dalla latitudine di Parigi a quella di Verona, non mi farei avvisato che dovessero scemar tanto. E pure il medesimo scemamento a puntino di $\frac{1}{25}$ ritrassi da osservazioni dirette e indipendenti da' Cataloghi, cioè da un gran numero di altezze d'intorno a 30° di Ψ dell'Orsa maggiore, che passa a $12'$ dal mio zenit, prese per più giorni col quadrante dopo avere ben osservato l'altezza meridiana, e con altezze corrispondenti circonvicine il momento della culminazione.

Le refrazioni del *Bradley* diminuite di $\frac{1}{25}$ coincidono appunto con la nuova formola investigata dal Chiar. Sig. Ab. *Oriani* nella Appendice alle Efemeridi Milanese pel 1788: formola assai pregevole, perchè indipendente da ogni sorta d'ipotesi, e solo incapace di esibire le refrazioni in tutta esattezza per le altezze minori di 5° . La formola *Oriani* rappresenta dunque precisamente le rifrazioni di Verona, o vogliasi dire della plaga di mezzo tra il polo e l'equatore. Tratta pertanto da quella formola una tavola di refrazioni,

di questa mi servo nel calcolare le mie osservazioni, e da questa dipendono i risultati contenuti nelle ultime quattro Tabelle.

Le differenti refrazioni da me adottate, per Parigi, e per Verona, ricevono conferma dal generare che fanno risultati conformi dalle osservazioni fatte in ambi i luoghi; essendosi veduto come sì le une che le altre danno $5'' \frac{1}{2}$ di

differenza tra la latitudine dedotta dai solstizj e quella prodotta dalle stelle circompolari. Tale concordia mi sembra poi di gran peso per additare una causa comune di quel divario: e questa causa, dopo averne molte pensate ed in vano a disamina sottoposte, non so avvisare che possa esser altra principalmente, se non quella del sito ove tenni il termometro tanto in Parigi quanto in Verona, esposto cioè a tramontana fuori d'una finestra, come ho veduto praticarsi generalmente dagli Astronomi. Or quell'ambiente è senza dubbio più freddo in qualunque tempo di quel che sopraffa immediatamente all'obbiettivo del cannocchiale. Chiuso quest'ultimo ambiente nella stanza della Specola, l'aria esteriore vi si frammescola lentamente la notte per via della piccola cateratta che tienli aperta nel solo frattempo delle osservazioni; ed è poi scaldato direttamente da' raggi solari durante l'osservazioni del maggior luminare. La differenza probabilmente farà più tenue nelle osservazioni notturne delle stelle circompolari, di quel che nelle diurne del Sole; ma in ogni tempo il mercurio deve esser più alto in un termometro stante alla bocca del cannocchiale, che non in altro guardante il nord dallo stipite esterno di una finestra: per conseguenza le rifrazioni che usar dovevo ne' miei calcoli decrescono certamente alcun poco da quelle che ho adoperate. Or questa diminuzione aumenta la latitudine risultante dalle stelle circompolari, e sminuisce quella proveniente dai solstizj. L'una e l'altra correzione vagliono dunque a ravvicinare que' risultati: e sebbene non mi persuada, che correggendo sì fatto error delle rifrazioni dipendente dalla situazione del termometro, debba distruggerli affatto la differenza di $5''$

¹ tra i risultati medesimi; credo però, a qualche prova già
²

fatta, che se ne toglierà buona parte. Allora o il residuo sarà dispregevole, o vero potrà imputarsi alla mancanza delle osservazioni igrometriche, le quali non furono da me fatte, nè da altri ancora ch'io sappia pigliate in computo.

Il celebre Boscovich raccomandò espressamente (Tom. II. delle sue Opere stampate in Bassano, pagg. 443, 462) di tenere il termometro, il barometro, e l'igrometro vicini all'obbiettivo del cannocchiale, appoggiandosi sul principio già dimostrato dal *Newton*, e da molti altri dopo di lui, che le refrazioni, negli altri singolarmente non troppo prossimi all'orizzonte, dipendono unicamente dalla costituzione dell'atmosfera nell'infimo strato che all'obbiettivo sovrasta. I risultati concordi delle mie osservazioni in Parigi e in Verona esibiscono, se mal non m'appongo, una prova luminosa dell'utilità ed importanza di quel ricordo. Mi riserbo pertanto di esaminare ne' venturi solstizj, non che nelle notti e temperature corrispondenti e conformi a quelle in cui feci le osservazioni delle stelle circompolari, qual sia la precisa differenza che passa in que' tempi dal tenere il termometro esposto nel consueto suo sito al tenerlo adjacente alla bocca del cannocchiale, in guisa però che il Sole non lo ferisca direttamente. Da queste esperienze, che saran fatte con due termometri ben concordi, spiccherà per minuto la correzione che spetta alle refrazioni da me adoperate, ed allora potrò statuire più scrupolosamente qual sia la vera latitudine della mia Specola. Intanto avvisando che quella correzione debba esser più tenue sulle osservazioni delle stelle circompolari, che non per quelle de' solstizj, adotto senza ribrezzo d'error sensibile la quantità di $45^{\circ} 26' 7''$, che molto si accosta anche ai risultati delle Tabelle V, VI. Ad aver poi la latitudine della Torre maggiore della Città fa duopo aggiungere $2''$: laonde non era gran fatto erronea la quantità di $45^{\circ} 26' 26''$, la qual solea infino ad ora tenerli comunemente.

Per le osservazioni di Parigi, la mia lontananza presente da quella Metropoli non mi permette più di determinare sul luogo l'error dipendente dalla situazione precisa dove tenevo il termometro; nè ora potrei, per le ragioni già addotte, ammettere accrescimento alla quantità $48^{\circ} 51' 54''$ per quel-

M m ij

la latitudine. Bensì per essere meno copiose quelle osservazioni che non queste di Verona, v'è più adito a sospettare qualche piccolo errore ne' risultati delle Parigine, in virtù del quale rimanga compensato nella I Tabella l'error che dipende dalla situazion del termometro. Stimo però dover lasciare intatte quelle osservazioni delle stelle circompolari.

Rimane finalmente da ragionare dell'obliquità dell'eclittica. Le sette determinazioni contenute nelle due Tabelle, III, VII, e ridotte a 1 Gennaio 1790 supponendo la diminuzion secolare di $57''$, diventano come segue.

Dall' obliquità di Marzo 1783 . . .	$23^{\circ} 27' 53''$, 8
di Settembre	60, 7
di Marzo 1784	60, 7
di Marzo 1788	56, 2
di Settembre	57, 3
di Marzo 1789	59, 9
di Settembre	57, 7

Il mezzo aritmetico tra questi sette risultati sarebbe $23^{\circ} 27' 58''$, 0. Ma se si tenga conto, al modo già dichiarato, del numero delle osservazioni e delle loro differenze estreme, si trova $23^{\circ} 27' 58''$, 8. Stimo poi che la correzion delle rifrazioni per causa della situazion del termometro importerà il diffalco di $2''$ circa. Ma perchè la differenza tra il massimo e il minimo de' precedenti sette risultati è alquanto notabile, mentre arriva quasi a $7''$, non vo tralasciar d' indagare l'obliquità dai solstizj estivi soltanto, dove ogni error sulle refrazioni deve esser tenue. Posta però la latitudine della mia Specola in Parigi $48^{\circ} 51' 54''$, e di quella in Verona $45^{\circ} 26' 7''$, ottengo li seguenti risultati per l'obliquità ridotta a 1 Gennaio 1790.

Dal solstizio estivo 1783	$23^{\circ} 27' 54''$, 6
1784	54, 5
1788	50, 0
1789	55, 2

Il penultimo risultato si appoggia sopra due terzi manco di osservazioni di quel che sia l'ultimo, e le differenze estreme tra di esse sono tre volte maggiori che in questo. Non merita però di stare al paragone cogli altri tre, che si accor-

dano molto bene tra loro, e da' quali nasce l'obliquità media dell' eclittica a 1 Gennaio 1790 = $23^{\circ} 27' 54''$, 8; cioè 2" meno di quel che ritraemmo di sopra dai sette risultati, considerata d'altrettanto la correzione per causa della situazione del termometro. Prendo il mezzo per ora tra queste due determinazioni, e statuisco l'*obliquità media* a 1 Gennaio 1790 = $23^{\circ} 27' 55''$, 8. Ma la medesima a 1 Gennaio 1750 era di $23^{\circ} 28' 18''$, 5 secondo le osservazioni di *la Caille*, *Mayer*, *Bradley*, e del Sig. *Gentil*, le quali non lasciano l'incertezza nè pur di 1" (*Con. des Temps pour 1791*, pag. 178). Dunque la diminuzione in anni 40 rileva 22", 8; e però la secolare monta a 57": così la impiego in tutti i miei calcoli.

Le osservazioni molteplici, che il Sig. Ab. *Reggio* ha pubblicato finora nelle *Efemeridi milanesi*, danno l'obliquità ridotta a 1 Gennaio 1790 = $23^{\circ} 27' 56''$, 2: quelle non meno accreditate del Sig. *Slop* (*Pis. 1789*) $23^{\circ} 27' 54''$, 8. Non posso negare qualche fiducia alle mie, veggendole stare in mezzo fra quelle d'Osservatori di tanta fama e valore.



TEORIA GENERALE

DEL MOTO ROTATORIO SPONTANEO DE' CORPI
NATURALI SOPRA PIANI INCLINATI.

Del Sig. PAOLO DELANGES.

LO scopo che mi prefiggo in questa mia Memoria si è di dimostrare e nello stesso tempo di rendere universali le leggi ed i canoni che intorno al moto rotatorio spontaneo de' corpi ho rilevate da accurati e molteplici esperimenti (a). Questo è ciò che per lo più si ottiene, e che può pretendersi singolarmente ne' soggetti Fisico-Matematici, onde mettere a coperto i risultati esperimentali, e i raziocinj a vicenda; dovendo però i primi servire di scorta a' secondi, avvegnachè non possiamo nè dobbiamo stabilire per vere l'immagini, o l'ipotesi assunte, se le conseguenze da esse dedotte non corrispondono ai fenomeni naturali. Volendosi pertanto procedere nel presente argomento per tale infallibile sentiero, ecco i fatti che deggionfi avere in mira, ed ai quali la Teoria generale che cerchiamo dovrà esattamente adattarsi.

I.

Un corpo di qualsivoglia figura se ne sta in quiete sopra un piano orizzontale, qualunque sia lo stato della scabrosità delle superficie in contatto, e capovolgesi solo quando la direzione del suo centro di gravità cade fuori della base.

(a) *Nuova discussione intorno agli attriti de' Solidi.* Art. IV. Bibliot. Fisica d'Europa Tom. VI. Pavia.

II.

Se il corpo sia omogeneo e di figura rotonda, come cilindrica, sferica, ecc., in guisa che nella metà dell'asse di rotazione vi sia il centro di gravità, e, poggiato sopra un piano orizzontale, venga sollecitato al moto da una forza tangenziale costante; si muove esso di moto rotatorio perfetto, cioè il moto progressivo del centro è uguale all'angolare di qualunque punto della circonferenza.

III.

Poggiandosi sopra un piano inclinato un prisma di base rettangola, in cui l'angolo costituito nel piano verticale e compreso dalla perpendicolare alla base condotta dal suo centro di gravità, e dalla retta che dallo stesso centro si conduce all'estremità della base, sia maggiore dell'angolo dell'attrito, in tutte l'elevazioni di questa, discende il corpo di solo moto progressivo; ma se il sopraenunciato angolo sarà minore dell'angolo dell'attrito, comincia il corpo a capovolgersi nell'elevazioni anteriori a quella che conviene all'attrito medesimo; e passandosi a elevazioni maggiori, vie più insieme striscia innanzi in guisa, che ridotto il piano verticale, discende di solo moto progressivo.

IV.

Se cade un corpo lungo un piano inclinato strisciando, discende di moto uniformemente accelerato, e la forza acceleratrice è la differenza tra il momento alla discesa, dipendente dalla gravità assoluta del corpo, e l'attrito, ch'è proporzionale alla pressione che soffre il piano medesimo.

V.

Un corpo rotondo, come un cilindro, una sfera, ecc., discende lungo un piano inclinato di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione che misura l'attrito che il corpo ro-

tondo incontrerebbe sullo stesso piano se dovesse strisciare, o procedere di solo moto progressivo; e quindi nelle successive elevazioni si muove di moto misto aumentandosi vie più il progressivo, e diminuendosi all'opposto il rotatorio in modo che, fatto il piano verticale, precipita il corpo radendolo di moto progressivo solamente.

VI.

Il corpo rotondo si muove pel piano inclinato di moto uniformemente accelerato, sì in quelle elevazioni nelle quali discende di moto rotatorio perfetto, che in quelle nelle quali procede di moto misto, aumentandosi nelle seconde dal moto rotatorio il progressivo del centro che competerebbe al solo moto strisciante.

Ora avanti di proseguire, debbo, com'è di dovere, raccogliere qui sotto l'occhio i modi, co' quali è stato trattato l'argomento da quegli illustri uomini, che, per quanto io sappia, sonvosi applicati prima di me.

Indicando DO (fig. 1.) l'attrito che un corpo cilindrico, o sferico incontrerebbe strisciando lungo il piano inclinato AB , sicchè posto F l'attrito orizzontale sia $DO = \frac{BC}{AB} \cdot F$.

F , stabilisce *Bernoulli* (a) che il corpo rotondo $DNFM$ discenda pel piano inclinato AB di moto rotatorio, come se fosse tirato in dietro nel punto del toccamento D dalla forza DO , e fosse sospeso dallo stesso punto D , onde ad ogni istante debba concepirsi il moto dell'intera massa intorno al centro d'oscillazione L . Premesse queste due ipotesi, e chiamato P il peso assoluto del corpo discendente, v la velocità progressiva del centro di gravità G , ed u la velocità angolare di ciascun punto della periferia $DNFM$ intorno allo stesso centro, istituisce il cel. Autore, pe' principj mecca-

nici, le due equazioni $v = \frac{AC}{AB} \cdot t$, $u = \frac{DI}{GL} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$;
e quin-

(a) Com. Acad. Scient. Imperialis Petropolitanae. Tom. XIII. ad an. 1741 43.

e quindi sottraendo dalla velocità progressiva del centro G la velocità $\frac{GL}{DL} \cdot u$, di cui, secondo lui, viene ritardato a cagion del moto rotatorio; e dalla velocità rotatoria sottraendo quella che nasce dall' attrito cioè $\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$; trova finalmente che la velocità assoluta del centro G è espressa dalla formula (U)

$$\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right) t \dots \dots \dots (U)$$

e la velocità angolare di ciascun punto della periferia, che gira verso A intorno allo stesso centro G , dalla formula (V)

$$\left(\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} + \frac{DG}{GL} \right) t \dots \dots \dots (V)$$

Applicando pertanto queste formule generali ad un caso particolare, sia il corpo $DNFM$ che dee discendere pel piano inclinato AB un cilindro, sicchè $GL = \frac{1}{2} DG$, o $\frac{DG}{GL} = 2$, e si troverà che la velocità progressiva del centro alla rotatoria avrà la ragione

$$\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} : \frac{2BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}$$

ovvero riducendola a minimi termini

$$AC \cdot P - BC \cdot F : 2BC \cdot F$$

Supposto poi che l'attrito orizzontale sia il terzo della pressione cioè $F = \frac{1}{3} P$, conduce l'esposta teoria *Bernoulliana* a conchiudere, che il cilindro dee discendere di moto rotatorio perfetto finchè sia $AC = BC$, cioè fino a che il piano inclinato AB sia inalzato all'angolo di 45° . Il che è contrario all'esperienza (IV), la quale dimostra che nelle enunciate circostanze discende il cilindro di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione di soli 18° circa.

Segue il celebre *Eulero* le ipotesi *Bernoulliane*. salvo che, chiamando x lo spazio percorso dal corpo $DNFM$, v l'altezza competente alla velocità progressiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB , ed u l'al-

tezza competente alla velocità progressiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB , ed u l'altezza dovuta alla velocità rotatoria di qualsivoglia punto M della periferia, prende per la forza dell'attrito nell'istante che il corpo percorre di moto progressivo lo spazietto dx , ed il punto M di moto rotatorio lo spazietto $\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$,

non $\frac{BC}{AB} \cdot Fdx$, ma $\frac{BC}{AB} \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \right) Fdx$, essendo secondo lui la celerità con cui striscia il punto D sul piano AB $\sqrt{v} - \sqrt{u}$, cioè la differenza tra la progressiva e la rotatoria. Poscia nominando c il raggio GD del corpo, e Pbh il momento d'inerzia rispetto al di lui asse, combina sul principio delle sollecitazioni istantanee le due equazioni seguenti

$$dv = \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \right) \frac{F}{P} \right) dx$$

$$du = \left(\frac{BC}{AB} \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \right) \frac{F \cdot cc}{Pbh} \right) \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

dalle quali determina generalmente la ragion della velocità progressiva del centro G alla rotatoria del punto qualunque M nella periferia del corpo $DNFM$; anzi che posto che sia un cilindro, e posto come sopra $F = \frac{1}{2}P$, trova che la velocità progressiva alla rotatoria sta nella ragione

$$3m + n + \sqrt{9mm + 6mn + 9nn} : 4n$$

essendo il seno dell'angolo $ABC = m$, il coseno $= n$, ed il seno tutto, cioè $m^2 + n^2 = 1$. Ma siccome nella riferita proporzione l'antecedente è sempre maggiore del conseguente; così ne segue, che, secondo l'Euleriana teoria, nel cilindro discendente è la velocità progressiva del centro G , e vie più nelle successive elevazioni del piano inclinato AB , maggiore della rotatoria che ha il punto M preso nella periferia $DNFM$. Risultamento ch'è più contrario all'esperienza (IV) di quello che somministra la poco fa esposta teoria Bernoulliana.

L' Ab. *Bossut* (a) riguardando anch'esso l'attrito DO come una forza che agisca tangenzialmente alla circonferenza d' un cerchio omogeneo, quantunque supponga il moto progressivo del centro G indipendente dal rotatorio di un punto qualsivoglia della circonferenza $DNFM$; originato semplicemente il primo dalla differenza delle forze $GH DO$, ed il secondo dall'attrito DO ; nulla di meno elibisce delle formule con cui rappresenta i moti suddetti, le quali risultano identiche alle *Bernoulliane* (U) (V) sopra riferite. Ma non solo è contrario all'esperienza il risultamento finale dell'accennate teorie intorno a tale qualità di moto, che lo sono pure le ipotesi sulle quali vengono appoggiate. E primieramente non è stato distinto da' mentovati Autori il caso che il corpo rotondo discende di moto rotatorio perfetto da quello in cui discende di moto misto, cioè di rotatorio e progressivo insieme, come insegna accadere l'esperienza (V). Non è poi concepibile con *Bernoulli* che discendendo il corpo rotondo $DNFM$ anche di moto rotatorio misto pel piano inclinato AB , rotarsi debba ad ogni istante intorno al punto d'appoggio A , come se da esso fosse sospeso, e che in conseguenza il moto di rotazione faccia che non sia v la velocità progressiva del centro G , ma $v - \frac{GL}{DL} - u$; mentre l'esperienza (VI) all'opposto dimostra che la velocità angolare in vece di diminuire aumenta la progressiva del centro. Nè è inoltre ammissibile con *Eulero* che sia $\frac{BC}{AB} \left(1 - \frac{V^u}{V^v}\right) F$ la forza dell'attrito che incontra il corpo discendendo lungo il piano inclinato AB , e non $\frac{BC}{AB} \cdot F$, ora mai che siamo certi non avere influenza la velocità nell'attrito de' corpi in moto (IV). E' però bensì vero che all'attrito dee attribuirsi discendere il corpo rotondo $DNFM$ pel piano inclinato AB di moto rotatorio, ma solamente perchè impedendo esso il

N n ij

(a) *Trat. Element. di Meccanica*. Vol. Sec. pag. 149. In Pavia MDCCCLXXXVIII.

moto progressivo al corpo dalla prima elevazione fino a quella in cui acquista impeto alla discesa, fa che la verticale GE condotta dal centro di gravità G cada fuori del toccamento D , il che è conforme all'esperienza (I); nè v'ha bisogno che co' suddetti Autori, per ispiegare tale natura di movimento, d'immaginarli che l'attrito agisca sul corpo in guisa di forza tangenziale riguardando in conseguenza l'attrito come una forza attiva ed estranea, e non come una semplice resistenza che tende soltanto a contrastare o distruggere parte della gravità relativa che anima il corpo a discendere pel piano inclinato.

Questa terza ipotesi, che serve di fondamento alle due teorie sopraesposte, cerca *Eulero* di convalidarla coll'esperimento (III), da cui rilevandosi che essendo (fig. II) $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ il corpo $DEHI$ di base rettangola discende lungo il piano inclinato AB di solo moto progressivo, ed essendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$

discende con moto misto di rotatorio e progressivo insieme, riflette „ Quoniam in hoc criterio elevatio plani inclinati „ seu angulus ABC non inesse deprehenditur, perspicuum est, „ quod corpus in una plani elevatione sine provolutione descendat, idem in omni alia elevatione quacumque line provolutione esse descensurum Neque igitur in judicio hac de re ferendo spectari oportet rectam verticalem „ ex centro gravitatis corporis ductam, utrum ea extra basin an intra cadat, uti aliquibus auctoribus placuit; sed „ ex solo angulo DGF totum judicium est petendum. „ Ma se il corpo $DEHI$ discende di solo moto progressivo qualora

$\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$, non trovasi esso forse, passato anche l'angolo di elevazione ABC competente alla resistenza dell'attrito, in grado di discendere prima che la verticale condotta dal centro di gravità G cada fuori della base ED ? E posto ciò che è infallibile, non v'ha al certo ragione alcuna che nelle successive elevazioni debba, quantunque cada fuori della base la verticale suddetta, tentare il corpo $DEHI$ di capovolgerli sull'estremità D , come non ve n'ha nel caso che si faccia astrazione della resistenza d'attrito. Che se il corpo

DEHI, qualora $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, si dispone al moto col capovolgerfi insieme sull'estremità *D* della base *ED*, è manifesto che ciò dee attribuirsi, quanto alle elevazioni comprese dalla prima che sia maggiore dell'angolo *FGD* fino a quella che conviene all'attrito orizzontale, soltanto al cadere fuori della base la verticale che passa pel centro di gravità *G*; mentre in tali elevazioni del piano inclinato *AB*, per essere impedito dall'attrito il moto progressivo al corpo, si trova esso come se fosse poggiato sopra un piano orizzontale, e cadesse fuori della sua base la verticale accennata. E siccome poi nelle successive elevazioni a quella, ch'è dovuta all'accennato attrito, va il corpo *DEHI* lentamente acquistando impeto alla discesa, così non può ad un tratto perdere la tendenza di capovolgerfi insieme sull'estremità della base *D*, procedendo perciò di moto misto: di che ne fa prova il vedere che di mano in mano nelle elevazioni maggiori dell'enunciata vie più il punto *D* si discosta, a rivoluzione compiuta, dal corrispondente sul piano inclinato *AB*, in guisa che finalmente nella verticale discende di solo moto progredivo. Non può adunque arguirsi dal soprammentovato esperimento nè che l'angolo d'elevazione *ABC* sia indifferente nel moto del solido *DEHI* che discende pel piano inclinato *AB*, nè che non debba averfi riguardo alla posizione della verticale che passa pel centro di gravità *G*; ma bensì che essendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, cioè l'angolo *DGF* minore dell'angolo di elevazione *ABC*, misura dell'attrito orizzontale, non è sollecitato il corpo *DEHI* dall'elevazione del piano inclinato *AB* uguale all'angolo *DGF* fino alla detta *ABC*, che di capovolgerfi sull'estremità *D* della base *ED*, e che nelle successive elevazioni maggiori è sollecitato nello stesso istante e di capovolgerfi e di procedere innanzi.

Dalle cose esposte ne segue pertanto che il corpo rotondo *DNFM* (fig. I.) posto sul piano inclinato *AB*, considerando anche esteso, com'è di fatto, il toccamento *ee*, capovolgerfi perchè è difficile non accada, che ne' solidi naturali in attrito non abbia *F* a *P* maggior ragione di $\frac{1}{2}ee$, cioè di

De aGD. Così trascurando le irregolarità che possono produrre nel moto del corpo DNFM le ripercussioni oblique dei successivi elementi all'ee che deggiono applicarsi sul piano inclinato AB, è chiaro che dee procedere il corpo di moto rotatorio perfetto, trovandosi ad ogni istante costituito nell'istesse circostanze; e ciò fino a quella elevazione che lo metta in istato di cominciar a sentire un moto progressivo pel piano medesimo, per cui, come è noto per esperienza, procede poscia di moto misto, ovvero di moto rotatorio imperfetto. Finalmente dovremo distinguere due casi in un corpo rotondo che cade lungo un piano inclinato, vale a dire quello in cui è dotato solamente di un moto rotatorio, e quello in cui ha insieme un moto progressivo; nel primo dee riguardarsi il moto progressivo del centro come conseguenza del rotatorio, e nel secondo come generato dal rotatorio, e da una potenza congiuntamente da cui viene sollecitato.

L E M M A I.

Determinare le relazioni tra il tempo, la velocità, e lo spazio nel moto di un corpo rotondo DNFM (fig. III) poggiato sul piano orizzontale AB, e su cui agisce costantemente il dato peso R nella direzione tangenziale RM.

Non tenendo conto pertanto del picciol peso F o della piccola parte di R che impiegasi a vincere l'attrito della seconda specie, ch'è lo stesso che considerare il toccamento ee d'incomputabile estensione; è chiaro che per le cose premesse il corpo rotondo DNFM muovesi di moto rotatorio perfetto ed uniformemente accelerato: di modo che il moto di qualunque punto D secondo l'ordine DNFM preso nella circonferenza DNFM farà uguale al progressivo del centro G . Ciò posto si chiami il peso del corpo DNFM $= P$, il raggio $GM = c$; e farà la distanza dal suo centro di gravità G al punto H centro di gravità comune ad esso ed al peso R , cioè $GH = \frac{c \cdot R}{P + R}$. E' certo ora che il moto di rotazione nel corpo DNFM è cagionato dalla somma de' pesi

P ed *R* che agisca al punto *H* secondo la direzione verticale *HL* che cade fuori del toccamento *ee* $\frac{1}{2}$ ma siccome sta *GM* a *GH*, ovvero *c* a $\frac{c \cdot R}{P+R}$, come *P* + *R* a *R*: così è evidente che il predetto moto in tale circostanza equivale a quello che può produrre il solo peso *R* che agisca all' estremità *M* del raggio *GM*. Quindi se ti dica *u* la velocità angolare di qualsivoglia punto *M* della circonferenza *DNFM*, e con *Eulero Pbb* il momento d'inerzia del corpo rotondo intorno al di lui asse o centro *G*, e *g* la forza della gravità che anima i corpi terrestri; avremo per i principj generali della Dinamica espressa la relazione tra la velocità ed il tempo nel moto del corpo *DNFM* prodotto dal peso *G* nell' equazione (*A*)

$$u = \frac{g \cdot R \cdot t}{Pbb:cc + R} \dots \dots \dots (A)$$

la quale combinata con questa (*Q*) che appartiene a' moti equabili, tali dovendosi riguardare anche gli accelerati d' istante in istante

$$ds = udt \dots \dots \dots (Q)$$

otterremo nell' equazione (*B*)

$$s^2 = \frac{2 \cdot s (Pbb:cc + R)}{g \cdot R} \dots \dots (B)$$

la relazione tra lo spazio ed il tempo nel suddetto moto, e con ciò verrà determinato quanto appartiene sì al moto rotatorio che al progressivo del centro *G* nel corpo rotondo *DNFM* posto dal peso *R* in movimento. Il che ecc.

L E M M A II.

Determinare le cose medesime nel corpo DNFM (fig. I.) che discende strisciando pel piano inclinato AB, perchè supponesi poggiato con una base DEM in cui cade la verticale GE condotta pel suo centro di gravità G.

Poichè $\frac{AC}{AB}$. *P* è l'impeto che ha il corpo alla discesa, e

$\frac{BC}{AB}$. F l'attrito che incontra pel piano inclinato AB posto essere F l'attrito orizzontale, farà adunque nella supposizione che il corpo discenda, $\frac{AC}{AB} \cdot P > \frac{BC}{AB} \cdot F$. E perciò chiamata v la velocità progressiva del centro G , o di qualsivoglia altro punto della massa, verrà espressa la relazione tra la velocità ed il tempo dall'equazione (C)

$$v = g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{BA} \cdot \frac{F}{P} \right) t \dots\dots (C)$$

e col soccorso della surriferita formula (Q) scopriremo esser indicata la relazione tra lo spazio ed il tempo dall'equazione (D)

$$t^2 = \frac{2 \cdot s}{g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right)} \dots\dots (D)$$

Il che ecc.

PROBLEMA I.

Nelle elevazioni del piano inclinato AB (fig. IV.) che il corpo rotondo DNFM discende di moto rotatorio perfetto; trovare le relazioni tra la velocità, lo spazio, ed il tempo sì di un qualsivoglia punto M della circonferenza DNFM, che del centro di gravità G del corpo medesimo.

Rappresenti il raggio verticale GO il peso assoluto del corpo, e si compia intorno ad esso il parallelogrammo $GHOS$ col lato GS perpendicolare, e col lato GH parallelo al piano inclinato AB ; e farà GH lo sforzo che follecita il corpo al moto progressivo; e GS quello che sostiene il piano AB .

Ma per ipotesi essendo $\frac{AC}{CB} < \frac{F}{P}$, lo sforzo GH è distrutto dall'attrito; e siccome, se il corpo rotondo fosse fornito della base DLO su la cui estremità LO cadesse la verticale GO , oppure fosse applicato semplicemente un sostegno al punto O ,
verrebbe

verrebbe impedito anche il moto rotatorio; così è manifesto che il solo sforzo GS ovvero HO è quello che produce questo movimento. E perciò il corpo rotondo $DNFM$ si trova costituito allo stesso modo come se poggiasse sopra un piano orizzontale, e sollecitato fosse al moto rotatorio dallo sforzo HO , ovvero da una forza tangenziale al punto M , che alla HO stia in ragione di GH a GM . Posto ciò, tenute le solite denominazioni, essendo lo sforzo $HO = \frac{BC}{AB} \cdot P$, ed MG :

$GH = AB : AC$; sarà $\frac{AC \cdot BC}{AB \cdot AB} \cdot P$ la forza che in direzione tangenziale alla circonferenza $DNFM$ sollecita il corpo rotondo a discendere di moto rotatorio perfetto pel piano inclinato AB . Quindi mediante il Lem. 1 avremo determinato in queste equazioni (E), (F)

$$u = \frac{g \cdot AC \cdot BC \cdot t \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb} \dots \dots (E)$$

$$t^2 = \frac{25 \cdot AB \cdot AB \cdot bb}{g \cdot AC \cdot CB \cdot cc} \dots \dots (F)$$

tutto ciò che riguarda sì al moto rotatorio di qualsivoglia punto M della circonferenza $DNFM$, che al moto progressivo del centro di gravità G del corpo rotondo discendente lungo il piano inclinato AB ; il che ecc.

COROLLARIO I.

Dall'equazione (E) si rileva che nulla è la velocità rotatoria o la progressiva del centro, quando il piano inclinato AB è orizzontale, cioè quando $AC = 0$, e nulla pure quando sia verticale, cioè qualora $BC = 0$; e che va poi crescendo successivamente quanto più il piano è inclinato all'orizzonte: proprietà tutte che vengono confermate dagli esperimenti.

SCOLIO.

E' noto che se il corpo rotondo è un cilindro il momento d'inerzia intorno il suo asse, cioè il da noi supposto

Tom. V.

Oo

Pbb , è $P \cdot \frac{cc}{2}$, e però $bb = \frac{cc}{2}$; e se è una sfera ovvero un qualsivoglia sferoide ellittico, si ha $Pbb = P \cdot \frac{2}{3} cc$, cioè $bb = \frac{2}{3} cc$. Sia però, a cagion d'esempio, il corpo $DNFM$ discendente pel piano inclinato AB un cilindro, sicchè $bb = \frac{2}{3} cc$, e sia inoltre $5 = 13$ piedi Veroneli, onde con tale misura la forza della gravità $g = \frac{pie. 28,34}{1''}$; e si troverà, fatte le debite sostituzioni nella formula (F), che nelle elevazioni di 4° , 9° , 14° , il cilindro percorre di moto rotatorio perfetto il suddetto spazio di piedi 13 ne' tempi $2'' 65$, $1'' 74$, $1'' 40$, i quali sono prossimamente uguali a' tempi $3''$, $2'' 50$, $2''$ che somministra l'esperienza, e ciò tanto più se si faccia, come dee farli, considerazione alla resistenza dell'aria. Il che può riscontrarsi nella mia Memoria sopra citata. Art. IV. §. 22.

PROBLEMA II.

Determinare il moto progressivo del centro G (fig. IV) ed il rotatorio di un qualsivoglia punto M della circonferenza del corpo rotondo DNFM in quelle elevazioni del piano inclinato AB nelle quali discende di moto misto, o sia di moto rotatorio imperfetto.

E poichè la velocità che acquista il centro G in conseguenza del moto rotatorio (Prob. I.) è espressa dalla quantità $\frac{g \cdot AC \cdot CB \cdot t \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb}$, e quella che dipende dal moto progressivo (giacchè nelle supposte elevazioni del piano inclinato, essendo $\frac{AC}{CB} > \frac{F}{P}$, ha luogo questo moto) è espressa (Lem. II.) dalla quantità $g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right) t$; dunque l'intera velocità progressiva del centro G , che si chiami v , farà dipendente dall'equazione (G)

$$v = g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} + \frac{AC \cdot CB \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb} \right) t \dots (G)$$

sapendosi per esperienza (VI) che nel moto misto la velocità progressiva del centro viene aumentata da quella che compete al moto rotatorio, la quale sarà rappresentata dall'equazione (H) come nel Prob. antecedente

$$u = \left(\frac{g \cdot AC \cdot BC \cdot t \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb} \right) \dots \dots (H)$$

essendo essa in ogni caso generata dalla sola forza HO . Quindi combinando l'equazioni (G) (H) colla (Q) (Lem. I.) otterremo l'equazioni (I) (L)

25

$$t^2 = \frac{g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot P + \frac{AC \cdot CB \cdot cc}{AB \cdot AB \cdot bb} \right)}{25 \cdot AB \cdot AB \cdot bb} \dots \dots (I)$$

$$t^2 = \frac{25 \cdot AB \cdot AB \cdot bb}{g \cdot AC \cdot CB \cdot cc} \dots \dots (L)$$

e con ciò avremo determinato quanto spetta al moto misto del corpo rotondo $DNFM$ discendente pel piano inclinato AB ; il che ecc.

COROLLARIO I.

Sia il seno dell'angolo d'elevazione ABC , cioè $AC = m$, il coseno $BC = n$, ed il raggio $AB = \sqrt{m^2 + n^2}$, e posto che il suddetto angolo sia tale che il corpo rotondo $MDNF$ discenda lungo il piano inclinato AB di moto misto, le equazioni (G) (H) ci fanno conoscere che la velocità progressiva alla rotatoria sta nella ragione

$$\left(m - n \cdot \frac{F}{P} \right) \sqrt{m^2 + n^2} + mn \cdot \frac{cc}{bb} : mn \cdot \frac{cc}{bb}$$

dal che apparisce che generalmente, essendo nel moto misto

$m - n \cdot \frac{F}{P}$ quantità positiva, la velocità progressiva è sempre

maggiore della rotatoria, oltre l'elevazione in cui è $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$

Q o ij

fino alla verticale, annichilandosi anzi del tutto in siffatta posizione del piano la velocità rotatoria perchè diventa $BC = n = 0$; le quali proprietà sono pure comprovate dall'esperienza esattamente.

C O R O L L A R I O II.

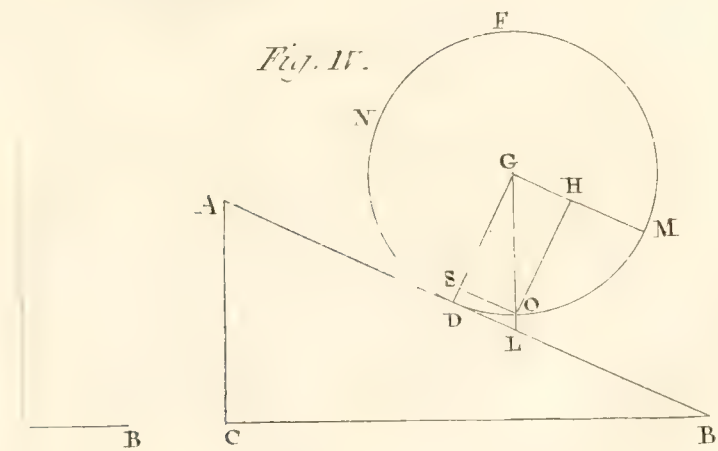
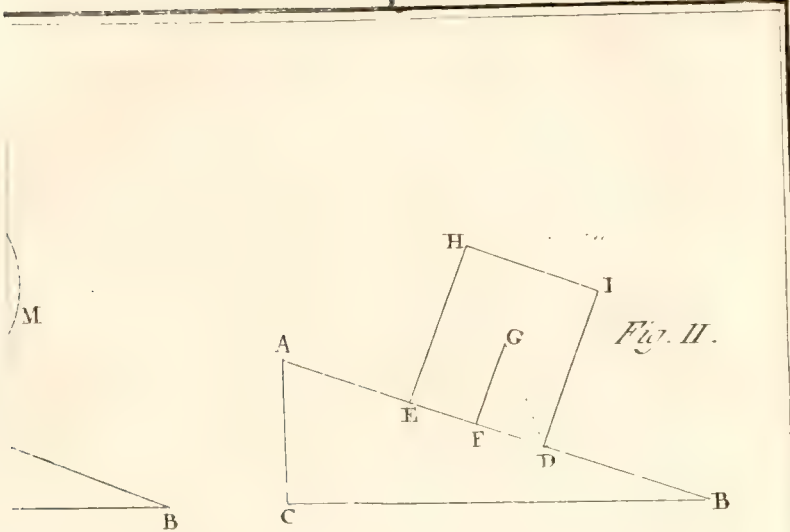
Tenute le medesime denominazioni si rileva dalle equazioni (I) (L), che, nello stesso tempo, lo spazio percorso dal centro di gravità G del corpo rotondo $MDNF$ di moto progressivo, mentre cade di moto misto pel piano inclinato AB , allo spazio percorso da qualsivoglia punto M intorno alla circonferenza $MDNF$ sta nella ragione

$$\left(m - n \cdot \frac{F}{P}\right) \vee \left(m^2 + n^2\right) + mn \cdot \frac{cc}{bb} : mn \cdot \frac{cc}{bb}$$

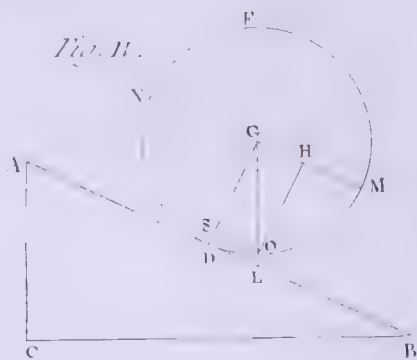
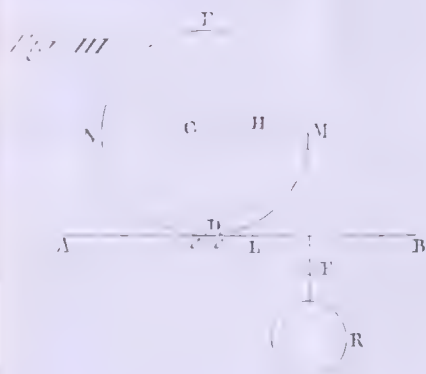
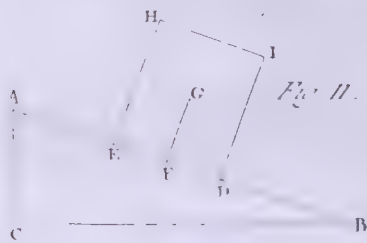
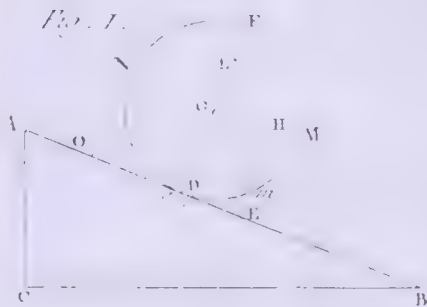
da cui, come appunto dimostra l'esperienza, si ricava che nel moto rotatorio imperfetto lo spazio percorso dal centro è nelle successive elevazioni del piano vie maggior del rotatorio percorso dal punto segnato nella circonferenza, essendo il primo uguale al secondo, fino a che $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$, e nullo il secondo se $BC = n = 0$.

S C O L I O I.

Si ponga essere un cilindro il corpo rotondo discendente pel piano inclinato di moto misto, sicchè sia $bb = \frac{1}{2}cc$, sia poi $5 = 13$ pie., $g = \frac{\text{pie. } 28,34}{1''}$, ed $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$. Ciò stabilito si troverà coll'equazione (I), che nelle tre elevazioni di 19° , 23° , 48° , impiega il cilindro a percorrere l'intero spazio di pie. 13 i tempi $1''16$, $1''$, $0''76$, che sono quanto può desiderarsi prossimi a $2''$ scarsi, $1''\frac{1}{2}$ scarso, ed $1''$ scarso raccolti dall'esperienza nelle supposte circostanze, come può vedersi nel luogo citato allo Scolio del Problema antecedente.

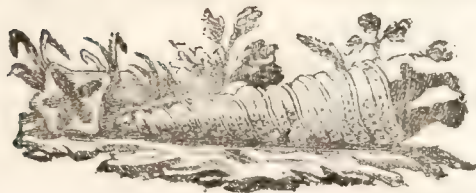


R



S C O L I O I I .

Per ultima applicazione della nostra Teoria ponghiamo che il cilindro nelle due elevazioni di 45° , 60° debba percorrere di moto progressivo lo spazio di pollici $18 \frac{2}{7}$, e si scoprirà, eseguite le convenienti sostituzioni nella proporzione esposta al Corollario II. di questo Problema, che nello stesso tempo il punto fissato nella circonferenza del cilindro deve trascorrere intorno alla stessa poll. 13 nella prima elevazione, e poll. $9 \frac{2}{7}$ nella seconda: risultato a cui l'esperienza (veg. la mia più volte mentovata Mem. Art. IV. §. 21 n. V.) corrisponde con tale esattezza che non può a mio parere in argomento di sì fatta natura cercarsi riscontro maggiore, onde certificare e porre a salvo d'ogni controvertia e dubbietà la Teoria generale ch' ora abbiamo dichiarata intorno al Moto rotatorio spontaneo de' corpi rotondi discendenti lungo un piano inclinato.



D E L L E

ALTEZZE BAROMETRICHE

DISSERTAZIONE GEOMETRICO-ANALITICA

Del P. D. FRANCESCO M. FRANCESCHINIS
Ch. Reg. di S. Paolo.

P R E S E N T A T A

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA.

L'Argomento delle altezze barometriche ha dato tante volte motivo di studio a' Geometri, che parrà inutile il ripigliarlo in esame. Ma siccome nel maneggiarlo con la pura Analisi s'incorre, come ho veduto, nella difficoltà di ben interpretare il linguaggio misterioso di questa Scienza; così non m'è sembrato inutile il trattarlo con l'Analisi e con la Geometria congiuntamente; ond'è avvenuto, che con una sola formula nani riuscito felicemente di soddisfare a tutte le determinazioni. Questo è il mio assunto, e il soggetto di questa Memoria.

Data l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, si cerca l'altezza del medesimo per qualunque luogo, o sopra, o sotto il livello marittimo. supposta la gravità variabile in ragione inversa di una potenza n delle distanze dal centro terrestre.

Chiamo a l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, p la distanza del luogo dal centro della terra, s l'altezza del mercurio in questo luogo, f la densità dell'aria vicino al mare, q la densità della medesima alla distanza p dal centro terrestre, g la gravità acceleratrice nella superficie del mare, ed r finalmente il semidiametro della terra.

Si eguagli a gA il peso della mentovata colonna di mercurio, la cui altezza a , ed essendo a fisicamente trascurabile in confronto ad r , agevolmente ci accorgeremo, che a , ed A fisicamente si eguagliano, potendoli considerare costanti la gravità pel tratto $= a$.

Sarà dunque gA eguale alla pressione di tutta la colonna d'aria dalla superficie del mare fino al termine dell'atmosfera, e facendo come $\frac{1}{r^n}$ ad $\frac{1}{(p+s)^n}$, così g al quarto $\frac{gr^n}{(p+s)^n}$, esprimerà

questo la gravità acceleratrice alla distanza $p+s$ dal centro terrestre. Moltiplicando per ds si otterrà $\frac{gr^n ds}{(p+s)^n}$, ed integran-

do, supposta p costante, ne risulterà $= \frac{-g^n}{(n-1) \cdot (p+s)^{n-1}} + B$ il

peso della colonna di mercurio di lunghezza s posta al di sopra della distanza p dal centro della terra. Si determina la costante B osservando, che il peso della colonna è nullo,

quando $s = 0$. Avremo dunque $\frac{-g^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}} + B = 0$, e conse-

guentemente $B = \frac{gr^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}}$. Per la qual cosa il peso cercato

$= \frac{gr^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1) \cdot (p+s)^{n-1}}$, a cui si eguaglia la pressione dell'

aria superiore alla distanza p dal centro terrestre. Secondo-

chè farà p maggiore, o minore di r , si avrà $gA - \frac{gr^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}}$

$+ \frac{gr^n}{(n-1) \cdot (p+s)^{n-1}}$, ovvero $-gA + \frac{gr^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1) \cdot (p+s)^{n-1}}$ alla

pressione della colonna d'aria dell'altezza $p-r$, ovvero $r-p$.

Ora se di questa colonna si prenda l'elemento $\pm dp$, e si moltiplica per la densità q , e per la gravità acceleratrice $\frac{gr^n}{p^n}$ alla distanza p dal centro della terra, il prodotto $\pm \frac{gr^n q dp}{p^n}$

rappresenta la pressione elementare di detta colonna. Quindi è

agevole l'inferire $\int \pm \frac{gr^n q dp}{p^n} = \pm gA \mp \frac{gr^n}{(n-1) \cdot p^{n-1}} \pm \frac{gr^n}{(n-1) \cdot (p+s)^{n-1}}$

Pongo $\frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} = gz$, cioè a dire eguale al peso di una colonna di mercurio di lunghezza $= z$ che sia fornita della gravità acceleratrice g conveniente alla distanza r dal centro terrestre, ed effettuata la sostituzione trovo $\int \frac{\pm gr^n dp}{p^n} = \pm gA \mp gz$.

Supposte le densità dell'aria proporzionali ai pesi superiori prementi, e ad un peso sempre eguale, e costante gC , si avrà l'analogia $gA + gC : \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} + gC :: f : q$, o sia ponendo in vece del secondo termine il suo valore $= gz + gC$, $gA + gC : gz + gC :: f : q$, e perciò $q = f \cdot \frac{z+C}{A+C}$. Sostituito questo valore nella scoperta formula ci si presenta $\frac{\int fr^n dp \cdot (z+C)}{(A+C).p^n} = A - z$, e prese le differenze $\frac{fr^n dp \cdot (z+C)}{(A+C).p^n} = -dz$, ovvero $\frac{fr^n dp}{(A+C).p^n} = \frac{-dz}{z+C}$, ed integrando $\frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l(z+C) + B$: ma quando $p=r$, $z=A$, dunque $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} = l(A+C) + B$, o pure $B = \frac{fr}{(n-1).(A+C)} - l(A+C)$, e quindi $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$, e conseguentemente chiamando E la base della logaritmica della sottangente $= 1$; $E(n-1).A+C - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = \frac{A+C}{z+C}$, e finalmente $A+C.E \frac{-fr}{(n-1).(A+C)} + \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} - C = z$. Ne risulterà $z=0$, qualora sia $\frac{fr^n}{(n-1).(1+C)} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\frac{A+C}{C}$, e perciò $p = \left(\frac{fr - (n-1).(A+C)}{l\frac{A+C}{C}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$.

In tal sito, ed a tale distanza dal centro della terra termina l'atmosfera, e l'aria quivi non compressa da peso alcuno è fornita della densità $= \frac{fC}{A+C}$.

E S E M P I O I.

Sia $z=0$, cioè a dire la gravità costante, e ne nascerà
 $A+C . e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}} - C = z = s.$

S'annullerà z , ogniquale volta sia $C = (A+C) . e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}}$, e
 conseguentemente $\frac{A+C}{C} = e^{\frac{f.-(r-p)}{A+C}}$, o pure $\ln \frac{A+C}{C} =$
 $\frac{f.(p-r)}{A+C}$, e finalmente $p = r + \frac{A+C}{f} . \ln \frac{A+C}{C}$. Questo valore è
 finito, purchè C sia quantità finita, e l'aria benchè non
 compressa sia fornita di qualche densità, il che certamente
 addivviene in Fisica. Che se si supponga $C=0$, si troverà,
 che a $z=0$ si riferisce $p=\infty$, ascendendo all'infinito il lo-
 garitmo di $\frac{A}{0}$.

Posta $p=0$, si scoprirà, che nel centro della terra il
 mercurio si sostiene all'altezza $z = (A+C) . e^{\frac{fr}{A+C}} - C$.

Facendo p negativa si avvererà la formola $z = A + C .$
 $\frac{fr+fp}{A+C} - C$, e l'altezza del mercurio seguirà a crescere,
 aumentandosi p negativa, a cagione che si suppone, che la
 gravità costante anche di là dal centro della terra non can-
 gi direzione.

Che se vogliafi, che passato il centro la gravità divenga
 negativa, e spinga verso il centro medesimo, bisognerà capo-
 voltare il barometro, e di là dal centro si troveranno le
 stesse altezze del mercurio, come di qua a pari distanze. In

tale ipotesi le distanze p si assumano come positive anche di là dal centro, e si faccia uso della stessa formola, come di quà dal centro predetto.

ESEMPIO II.

Passo a considerare la ipotesi di $n=2$, o sia della gravità acceleratrice in ragion inversa dei quadrati delle distanze

dal centro della terra, la quale mi dà $(A+C) e \frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p} - C = z$.

Qualora $z=0$ troveremo $p = \frac{fr^2}{fr - (A+C) \cdot l \frac{A+C}{C}}$. Se la grandezza di C sia tale che ne risulti $fr > (A+C) l \frac{A+C}{C}$ si annullerà z ad una distanza finita dal centro. Posto che sia $fr = (A+C) l \frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C} = l \frac{A+C}{C}$ ci si presenta $p = \frac{fr^2}{0} = \infty$, e z s'annichila ad una distanza infinita dal centro terrestre.

Assegnando a C un valore più piccolo, onde divenga $fr < (A+C) \cdot l \frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C} < l \frac{A+C}{C}$ svanisce z quando $p = \frac{-fr^2}{(A+C) \cdot l \frac{A+C}{C} - fr}$ s'eguaglia ad una grandezza negativa.

Per ben intendere il linguaggio misterioso dell'analisi, do principio dal cercare il valore di z , quando $p = \infty$. Poi-

chè in tale incontro $\frac{fr^2}{(A+C) \cdot p} = 0$ avremo $(A+C) e \frac{-fr}{A+C} - C$

$= z$, e per conseguenza $e \frac{fr}{A+C} = \frac{A+C}{z+C}$, ovvero $\frac{fr}{A+C}$

$= l \frac{A+C}{z+C}$. Supponendosi $\frac{fr}{A+C} < l \frac{A+C}{C}$, dinotato colla let-

tera m un numero positivo maggiore dell'unità, si avrà
 $\frac{fr}{A+C} = \frac{1}{m} l \frac{A+C}{C}$: e quindi alla distanza $p = \infty$ dal centro

della terra si avvererà la formola $\frac{1}{m} l \frac{A+C}{C} = l \frac{A+C}{z+C}$, da cui

$$\text{si deduce } \frac{\frac{1}{A+C^m}}{\frac{1}{C^m}} = \frac{A+C}{z+C}, \text{ ed indi } z+C = (A+C)^{1-\frac{1}{m}} \cdot C^{\frac{1}{m}}.$$

Ora $z+C$ sia di mezzo tra C , ed $A+C$. E' maggiore di C , perchè per essere eguale a C , farebbe d'uopo, che nell' omogeneo di comparazione fosse $A=0$: è minore di $A+C$, perchè nel pareggiare essa quantità bisognerebbe, che nel

detto omogeneo la grandezza $(A+C)^{1-\frac{1}{m}}$ in cambio di ef-

ferire moltiplicata per $C^{\frac{1}{m}}$ fosse moltiplicata per $(A+C)^{\frac{1}{m}}$.

Essendo dunque $z+C$ maggiore di C , e minore di $A+C$, s' inferisce essere z minore di A : ma il peso della colonna d'aria dalla superficie del mare fino alla sublimità $p = \infty$ s' eguaglia a $gA - gz$; dunque il detto peso è più piccolo di gA , e per conseguenza il peso della mentovata colonna non basta per far equilibrio con la colonna di mercurio di altezza a , mentre il barometro si colloca sulla superficie del mare.

Il perchè egli è necessario l'accrefcere la lunghezza della colonna aerea, e farla diventare più che infinita. Mi si richiederà come ciò si possa ottenere. Ecco. Pel centro della terra C (fig. 1.) s'intenda tirata la linea retta DCE , la quale sia prolungata all'infinito tanto dalla parte CD delle p positive, quanto dalla parte CE delle p negative, e sia CB il raggio della terra.

Divenuta infinita la colonna aerea BD , si fa un repentino salto familiare alla Geometria dall'infinito positivo CD al negativo CE , e si continua la colonna d'aria procedendo da E verso C fino alla distanza dal centro $= CF = p$

$$= \frac{-fr^2}{(A+C).l \frac{A+C}{C} - fr}, \text{ a cui corrispondendo } z=0, \text{ qualmente}$$

ho notato di sopra, ed è l'ultimo confine dell'atmosfera nella supposizione di $(A+C).l \frac{A+C}{C} > fr$. La legge delle

gravità acceleratrici in ragione inversa dei quadrati delle distanze richiede, ch'essendo positivi i quadrati anche delle distanze negative per esempio CF , CE , le gravità stesse spingano sempre da D verso E . Il peso dunque della colonna aerea FE tenderà da F verso E , e nel punto E infinitamen-

te lontano da C si eguaglierà a $gz = (gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}} - gC$.
Con una specie di magia matematica si unisce questo peso

con quello $= gA - (gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}} + gC = gA - gz$ della colonna d'aria DB , onde si formi la somma gA , colla quale fa equilibrio la colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, ed il peso $= gA$, quando il barometro si mette nel sito B .

Ognuno agevolmente capisce, che l'ipotesi di $(A+C).l \frac{A+C}{C} > fr$ appartiene soltanto alla Geometria, e non può trasferirsi alla Fisica. La legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze è abbracciata dalla natura, e mostrandoci questa fisicamente impossibile, che la quantità $(A+C).l \frac{A+C}{C}$ o superi, o eguagli fr , perchè l'altezza dell'atmosfera diverrebbe o più che infinita, o infinita; chiara si scopre la conseguenza, dover essere $(A+C).l \frac{A+C}{C} < fr$. Esige ciò necessariamente, che a C convenga un valore maggiore di quello, che le competerebbe, fingendo $(A+C).l \frac{A+C}{C} = fr$ che non difficilmente si può col computo determinare.

Per facilitare il calcolo suppongo C fisicamente trascurabi-

le in riguardo ad A , onde ne risulta $A \int \frac{A}{C} = fr$, o sia $\frac{fr}{A} = \int \frac{A}{C}$.

Poichè $\int \frac{A}{C}$ è un logaritmo iperbolico, fatta l'osservazione, che il logaritmo di $\frac{A}{C}$ preso dalle Tavole, che dinoto per $L \frac{A}{C}$ moltiplicato per 2, 3025850 logaritmo iperbolico della decina, si eguaglia a $L \frac{A}{C}$, avremo $\frac{fr}{A} = 2, 3025850 L \frac{A}{C}$, o pure $\frac{fr}{A \cdot 2, 3025850} = L \frac{A}{C}$.

Sappiamo per le sperienze del *Cotes* essere $f = \frac{1}{11900}$, ed il *Newton* stabilisce $r =$ piedi parigini $19695539 =$ poll. 236346468 . Si faccia inoltre $A =$ poll. 28 . Queste determinazioni ci danno $\frac{236346468}{11900 \cdot 28 \cdot 2, 3025850} = L \frac{28}{C}$, e ridotto il calcolo $3, 0805838 = L \frac{28}{C}$.

Ora $L 1204 = 3, 0806265$
 $L 1203 = 3, 0802656$
 e la loro differenza 3609
 Logaritmo trovato $= 3, 0805838$
 $L 1203 = 3, 0802656$
 differenza $= 3182$

S'inferisca essere $3, 0805838 = L 1203 + \frac{3182}{3691}$, e quindi $\frac{28}{C} = 1203 + \frac{3182}{3609} = \frac{4344809}{3609}$, o pure $\frac{3609 \cdot 28}{4344809} = \frac{101052}{4344809}$
 $=$ linee $\frac{1212624}{4344809} = C =$ linee $0, 2790972$. L'esatto valore

di C corrispondente a $z=0$, ed a $p=\infty$, è una piccolissima quantità maggiore di quello, che si è ora determinato supponendo C trascurabile rispettivamente ad A . E conciossiachè l'altezza dell'atmosfera abbia ad esser finita, spetterà a C una misura ancora più grande, che si stabilirebbe se fosse nota la sublimità a cui l'atmosfera si estende.

Or ecco stabilita una fisica verità, che l'aria non compressa è fornita della densità $= \frac{fC}{A+C}$, e che questa dee certamente avere una grandezza maggiore di quella, che si determinerebbe ponendo $(A+C) \cdot \int \frac{A+C}{C} = fr$, la quale incorrerebbe nell'assurdo, ch'esser dovesse infinita l'altezza dell'atmosfera.

M' inoltro a rintracciare il valore di z , quando è infinitamente picciola la distanza p dal centro. In tal cir-

costanza si avvera la fórmula $(A+C) \cdot e^{\frac{fr^2}{(A+C)p}} = z$, e per conseguenza $\frac{fr^2}{(A+C)p} = \int \frac{z}{(A+C)}$. La quantità

$\frac{fr^2}{A+C.p}$ è infinita, e perciò è tale altresì la grandezza

eguale $\int \frac{z}{A+C}$. Ma il numero è trascendentemente più gran-

de del suo logaritmo infinito. Dunque $\frac{z}{A+C}$ è immensa-

mente maggiore di $\frac{fr^2}{(A+C)p}$, e quindi anche z sarà tale in ri-

guardo ad $\frac{fr^2}{p}$. Non ci dobbiamo meravigliare, che per equi-

librare il peso dell'atmosfera di altezza finita si richieda nel centro della terra una colonna di mercurio immensamente lunga fornita della gravità acceleratrice $=g$. Nelle infinite distanze dal centro ella è infinita la gravità, e la densità dell'aria, e da questa cagione procede la lunghezza trascendentemente infinita $=z$ della mentovata colonna di mercurio.

Preso negativa la distanza $=p$ dal centro, abbiamo $(A+C)$.

$$e \frac{-fr}{A+C} - C = z.$$
 Attenendomi all'ipotesi confacente alla Fisi-
 ca, che $\frac{fr}{A+C}$ sia maggiore di $\int \frac{A+C}{C}$ ho stabilito, che ad
 una finita distanza dal centro, che io nomino l , z si an-

nulla, onde si abbia $A+C . e \frac{-fr}{(A+C)} \frac{-fr^2}{(A+C)p} - C = 0$, e perciò

$$(A+C) . e \frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p} = C.$$
 Si cavi la conseguenza, che quando

la distanza p è negativa sarà $(A+C) . e \frac{-fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)p} < C$,

e quindi $z = (A+C) . e \frac{-fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)p} - C$ si troverà
 negativa. Egli è certo, che avendo la gravità e di qua e
 di là dal centro la medesima direzione, il peso dell'aria pas-
 sato il centro si accresce, e si richiede una più lunga colom-
 na di mercurio dotato della gravità g per equilibrarlo. Co-
 me dunque ci si presenta z negativa e finita? L'enigma si
 scioglie con lo stesso artificio usato di sopra.

La curva, le cui coordinate (fig. 2) $CD = p$, $DC = z$ ha
 due rami $NAEG$, LHK , ai quali serve di asintoto la retta
 GK ; a $CB = p = r$ corrisponde $BA = z = A$. Divenendo $p = 0$
 nel centro C , z ascende all'infinito, e ci vuole la colonna di
 mercurio CG di lunghezza infinita, e dotata di gravità co-
 stante g per far equilibrio alla colonna aerea CN di altezza
 determinata, alla sommità della quale è $z = 0$, e l'atmosfera
 finisce. Il maggior peso della colonna d'aria CF esige una
 più lunga colonna di mercurio, e giacchè era infinita la
 lunghezza CG relativa a $p = 0$, la lunghezza, che si cerca,
 della colonna di mercurio, appropriata a $CF = p$, esser deb-
 be più che infinita. Descritta l'ordinata $FH = -z$ si tiri
 HI parallela ad NF , e si eguaglierà a $CG + KI$ la lunghez-
 za della colonna di mercurio la cui gravità costante $= g$,
 che forma equilibrio colla colonna aerea, che ha la lun-
 ghezza FN .

Posto che si supponga che la gravità in ragione inversa

dei quadrati delle distanze sempre tenda al centro, di modo che passato esso centro spinga da F verso C ; allora a pari distanze CD , CF corrisponderanno colonne di mercurio egualmente alte, e servirà ad ambo i casi la stessa formola dovendosi considerare in qualità di positive le p anche di là dal centro.

Fin ora ho misurato le pressioni dell' aria col peso di una confacente colonna di mercurio dotata della gravità costante g , che è quella che corrisponde alla distanza r dal centro. Cerchiamo presentemente l' altezza s della colonna di mercurio dentro il barometro collocato alla distanza p dal centro terrestre, le particole del qual mercurio sieno fornite della gravità conveniente alla relativa loro lontananza dal centro predetto, la qual colonna faccia equilibrio col peso dell'atmosfera superiore. Avendo trovato generalmente il peso di essa colonna $= \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, ed avendolo stabilito eguale a gz , troveremo, nella ipotesi di $n=2$, $\frac{r^2s}{p^2+ps} = z$, e ne dedurremo $s = \frac{p^2z}{r^2-pz}$, e sostituito

$$\text{il valore di } z, \frac{(A+C).e \quad - \frac{fr}{A+C} + \frac{fr^2}{r^2-pz}}{- \frac{fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p + Cp}} = s;$$

a $z=0$ corrisponde $s=0$, e ciò succede, o ad una finita distanza p dal centro, se $\frac{fr}{A+C}$ è maggiore di $\sqrt{\frac{A+C}{C}}$, o ad una infinita distanza se $\frac{fr}{A+C} = \sqrt{\frac{A+C}{C}}$, o ad una distanza negativa se $\frac{fr}{A+C} < \sqrt{\frac{A+C}{C}}$. In questa ultima supposizione quando

$p=\infty$, z ha un valore finito $= (A+C).e \quad - \frac{fr}{A+C} - C$. Se tutta la colonna di mercurio fosse fornita della gravità $\frac{gr^2}{p^2}$

pro-

propria della distanza p dal centro, si troverebbe $s = \frac{p^2 z}{r^2}$

Ma decrescendo la gravità delle particole del mercurio, secondo che maggiormente si allontanano dal centro mentovato, egli è certo, che la lunghezza s ha da salire ad una grandezza incomparabilmente maggiore.

Si formerà qualche idea della immensità della sua misura trasformando la quantità $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ in una serie col mezzo

d' iterate divisioni, le quali ci mostreranno $s = \frac{p^2 z}{r^2} + \frac{p^3 z^2}{r^4} + \frac{p^4 z^3}{r^6} +$ ecc. Per far dunque equilibrio colla colonna d'a-

ria FE (fig. I.) si renderebbe necessaria una colonna di mercurio di lunghezza trascendentemente infinita. Svanirà la meraviglia di questo apparente paradosso, qualora si rifletta, che il peso di questa immensa colonna è finito, ed $= gz$ cioè a dire al peso della colonna aerea EF .

Merita riflessione l'ambiguità del valore di $\frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ secondo la varietà delle circostanze. In moltissimi casi si eguaglierebbe ad una quantità negativa, quando p , e z sono negative, e $pz > r^2$. Nel nostro caso frattanto ho fatto chiaramente vedere eguagliarsi $s = \frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ ad una grandezza più che infinita. Se fosse $r^2 = pz$ ascenderebbe all'infinito, essendo $r^2 - pz = 0$. Acciocchè s vie più cresca, bisogna che $r^2 - pz$ continui a calare, il che succede passando dal nulla al negativo, onde $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ pareggi una grandezza più che infinita.

Gli esperimenti c'insegnano essere $s = a$, quando $p = r$. Sarà in tale incontro il peso della colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, eguale a $\frac{gr^2 a}{r^2 + ra} = \frac{gra}{r + a} = gz = gA$. Poichè a è fisicamente trascurabile in riguardo ad r , passerà fisica eguaglianza tra a ed A , potendosi con fisica adeguazione

supporre, che per tutto il tratto a si mantenga la stessa gravità $= g$.

Ho già notato, che quando $r^2 = pz$, o sia $\frac{r^2}{p} = z$, l'altezza s del mercurio diviene infinita. Succede ciò quando

$$p < r.$$
Nella formola infatti $(A+C) \cdot e^{-\frac{fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C) \cdot p}} - C = z$ si sostituiscia $\frac{r^2}{p}$ in cambio di z , e dopo le convenienti operazioni si troverà $\frac{fr}{A+C} \cdot (r-p) = \frac{r^2 + Cp}{(A+C)p}$, equazione, a cui soddisfa un valore positivo di $p < r$.

Si assegni a p una grandezza positiva ancora più picciola,

$$e \text{ la formola } (A+C) \cdot e^{-\frac{fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p}} - C = z$$
c' insegna, che z crescerà e diventerà maggiore di $\frac{r^2}{p}$. In tali circostanze il divisore $r^2 - pz$ della formola $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ diverrà negativo, e l'altezza s del mercurio monterà al più che infinito.

Giunga finalmente p ad essere infinitamente picciola, onde si abbia $(A+C) \cdot e^{-\frac{fr^2}{(A+C) \cdot p}} = z$, e quindi

$$\frac{fr^2}{(A+C) \cdot p} = \frac{z}{A+C}.$$
Si raccoglie da questa formola essere z immensamente più grande di $\frac{r^2}{p}$, e conseguentemente pz immensamente maggiore di r^2 . Il perchè in questo incontro il più che infinito valore di $s = \frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ si aumenterà a dismisura.

Resta da considerare il caso di p negativa, a cui come ho osservato corrisponde z altresì negativa. Avremo dunque

$s = \frac{-p^2 z}{r^2 + pz}$, formola, che manifesta riuscir negativa anche s .

Sia (*Fig. I.*) CD l'infinitamente infinita altezza, a cui si alzerebbe il mercurio nel barometro collocato nel centro C della terra. Suppongasi parimenti immensamente infinita la linea CE , e se ad un dato valore di p negativa si riferisca $-s = CF$, farà $CD + EF$ la lunghezza della colonna di mercurio, che farà equilibrio col peso dell'atmosfera.

Se passato il centro le forze divenissero negative, le altezze del mercurio e di qua, e di là dal centro riuscirebbero eguali a pari distanze dal centro medesimo.

La Fisica esige che sia finita l'altezza dell'atmosfera, e che per conseguenza sendo $\frac{fr}{A+C} > \int \frac{A+C}{C}$, z ed s s'annullino ad una distanza finita p dal centro terrestre. Calando p , crescono z , ed s , e finalmente divengono filicamente amendue eguali ad A alla distanza r dal detto centro. E qui finisce la legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze, avendo dimostrato il Cavalier *Newton*, che dentro il corpo della terra le forze seguono la ragione delle distanze dal centro. Per la qual cosa giudico espediente l'aggiungere un terzo esempio, in cui s'indaghino i valori di z , ed s nell'ipotesi mentovata di forze.

ESEMPIO III.

Supponendo le forze proporzionali alle distanze dal centro abbiamo $n = -1$, e la formola generale esprime il va-

lore di z prende il seguente aspetto. $(A+C).e^{\frac{fr}{2.(A+C)}} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)}$

$$-C = z = \frac{2ps + s^2}{2r}.$$

Si annulleranno z , ed s , quando s'abbia

$$(A+C).e^{\frac{fr}{2.(A+C)}} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)} = C \text{ e perciò}$$

Qq ij

$$\frac{fr}{2 \cdot (A+C)} - \frac{fp^2}{2r \cdot (A+C)} = l \frac{C}{A+C}, \text{ o pure } \frac{fp^2}{2r \cdot (A+C)}$$

$$- \frac{fr}{2 \cdot (A+C)} = l \frac{A+C}{C}, \text{ e finalmente}$$

$$\pm p = V \left(\frac{2r \cdot (A+C)}{f} \cdot \left(\frac{fr}{2 \cdot (A+C)} + l \frac{A+C}{C} \right) \right). \text{ Se l'aria non}$$

compressa sia dotata di una finita densità, siccome richiede

la Fisica, eguale ad $\frac{fC}{A+C}$, e per conseguenza sia finito il va-

lore di C , starà parimenti dentro i limiti del finito la di-

stanza dal centro $\pm p$, alla quale z , ed s svaniscono. Che

se supponga $C=0$, si troverà $\pm p = V \frac{2rA}{f} \cdot l \frac{A}{0} = \infty$, e

bisognerà trasportare il barometro ad una distanza infinita,

acciocchè la lunghezza s della colonna di mercurio si eguagli

a nulla.

Avvicinando il barometro alla superficie della terra cre-

sceranno z , ed s , ed a livello del mare sarà $z=A$, $s=a$,

ed avverandosi la formola $A = \frac{2ra+a^2}{2r}$, ed essendo a^2 fisica-

mente trascurabile rispettivamente a $2ra$, si troverà con fisi-

ca adeguazione $A=z=a=s$. Divenga $\pm p$ minore di r , e

seguiteranno a crescere z , ed s , e per ultimo qualora $\pm p=0$

ci si presenterà $(A+C) \cdot e^{\frac{fr}{2 \cdot (A+C)}} - C = z = \frac{s^2}{2r}$, e z , ed s

giungeranno alla massima grandezza.

Restringendo in poche parole le cose dette; dall'altezza a

cui si estolle l'atmosfera fino alla superficie del mare vale

la legge della gravità in ragione inversa dei quadrati delle

scendo essa altezza secondo che il barometro s'avvicina alla terra, e collocato sulla superficie del mare, l'altezza del mercurio ritrovasi $= a$.

Ponendo il barometro in sito inferiore al livello del mare si muta legge, e la gravità seguita la ragione delle distanze del centro. Esige questa legge che l'altezza del mercurio s'aumenti fintantochè perviene alla misura, che viene deter-

minata dall'equazione $(A+C) e^{\frac{fr}{2 \cdot (A+C)}} - C = \frac{s^2}{2r}$, quando $p=0$.

Progredendo di là dal centro della terra fa duopo capovoltare il barometro, perchè la gravità diventa negativa, ed a qualunque distanza dal centro corrisponderà la stessa altezza s di mercurio, che compete ad una pari distanza presa di qua dal centro predetto.

ESEMPIO IV.

La generale integrazione della formola differenziale

$\frac{fr^n dp}{(A+C) \cdot p^n} = \frac{-dz}{z+C}$ non vale per la ipotesi di $n=1$, cioè a dire delle forze acceleratrici in ragion inversa delle distanze

dal centro, che ci darebbe $(A+C) \cdot e^{\frac{-fr}{0 \cdot (A+C)}} + \frac{fr^n}{0 \cdot (A+C) \cdot p^n}$

$-C=z$. In questo caso egli è duopo riassumere la formola

differenziale, che prende il seguente aspetto $\frac{fr dp}{(A+C) \cdot p}$

$= \frac{-dz}{z+C}$, la quale integrata ci somministra $\frac{fr}{A+C} \cdot lp = B$

$-l(z+C)$, ma quando $p=r, z=A$; dunque $B = \frac{fr}{A+C}$.

$lr + l(A+C)$, e conseguentemente $\frac{fr}{A+C} \cdot lp = \frac{fr}{A+C} \cdot lr + l(A+C)$

$-l(z+C)$, o sia $\frac{fr}{A+C} \cdot \frac{lp}{r} = l \frac{A+C}{z+C}$, e finalmente dopo i

necessarj calcoli $(A+C) \cdot \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C} - C = z$.

L'integrale della formola differenziale $\frac{grds}{p+s}$ adattata al caso

di $n=1$, in cui p si suppone costante, cioè $grl \frac{p+s}{p}$ esprime il peso della colonna di mercurio di lunghezza s posta al di sopra della distanza p dal centro della terra, e poichè $grl \frac{p+s}{p} = gz$, avremo $(A+C) \cdot \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C} - C = z = rl \frac{p+s}{p}$.

Si eguaglieranno a nulla z , ed s qualora sia

$r \left(\frac{A+C}{C} \right) \frac{A+C}{fr} = p$, ed il valore di p ascenderà all'infinito, posta $C=0$.

Approssimando il barometro alla superficie del mare, s'aumenteranno z , ed s , e quando $p=r$, farà $z=A$, $s=a$, e prossimamente $z=A=s=a$ adeguandosi $rl \frac{r+s}{r}$ ad s , stante la minutezza di s in riguardo ad r , ed essendo in tal circostanza $l \frac{r+s}{r} = \frac{s}{r}$ con fisica adeguazione.

Seguiti p a calare, e cresceranno z , ed s fintantochè diventeranno infiniti all'annullarsi di p . Che ciò avvenga di z ella è cosa patente. In riguardo ad s avremo supposta

$$\begin{aligned} \text{minima } \frac{(A+C)}{r} \left(\frac{r}{p} \right) \frac{fr}{A+C} &= l \frac{s}{p} \text{ e perciò } e^{\frac{A+C}{r}} \left(\frac{r}{p} \right) \frac{fr}{A+C} \\ &= \frac{s}{p}, \text{ e finalmente } p \cdot e^{\frac{A+C}{r}} \left(\frac{r}{p} \right) \frac{fr}{A+C} = s. \end{aligned}$$

Poichè $e^{\frac{A+C}{r}} \left(\frac{r}{p} \right) \frac{fr}{A+C}$ è immensamente più grande di $\frac{A+C}{r} \left(\frac{r}{p} \right) \frac{fr}{A+C}$ se ne deduce s infinitamente maggiore di p .

$\frac{A+C}{r} \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C} = (A+C) \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C}^{-1}$. Ma questa grandezza è infinita. Dunque tanto più infinita sarà la grandezza di s . Di sopra ho stabilito $A = \text{poll. } 28, f = \frac{1}{11900}, r = \text{poll. } 2,36346468$, e C maggiore di linee $0,2790972$. Pongasi $C = \text{linee } 1 = \text{poll. } \frac{1}{12}$ e si troverà $(A+C) \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C} = (28 + \frac{1}{12})$

$\left(\frac{236346468}{0}\right)^{706 + \frac{72724}{334192}}$, quantità immensamente infinita.

Senza por mano nella formola $(A+C) \cdot \left(\frac{r}{p}\right) \frac{fr}{A+C} - C = z$ basta considerare anche di là dal centro le distanze, e le gravità tendenti al centro stesso come positive, e si torneranno a scoprire a pari distanze gli stessi valori di z , e di s come di qua dal centro.

E S E M P I O V.

Supponendo n minore dell'unità, la formola prenderà il sottoposto aspetto $(A+C) \cdot e^{\frac{fr}{(1-n) \cdot (A+C)}} - \frac{fr^n \cdot p^{1-n}}{(1-n) \cdot (A+C)} - C$
 $= z = \frac{-r^n p^{1-n}}{1-n} + \frac{r^n \cdot (p+s)^{1-n}}{1-n} = \frac{r^n}{1-n} \left((p+s)^{1-n} - p^{1-n} \right)$

Fingasi $n = \frac{1}{2}$, e ne risulterà $(A+C) \cdot e^{\frac{2fr}{A+C}} - \frac{2fr^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}}{A+C} - C = z = 2r^{\frac{1}{2}} \left((p+s)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}} \right)$.

Svaniranno z , ed s qualora sia $p = \left(r^{\frac{1}{2}} + \frac{(A+C)}{2fr^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{A+C}{C}} \right)^2$, ed un tale valore farà infinito, posta $C = 0$.

Cresceranno z , ed s accostando il barometro alla superficie del mare, e quando $p=r$, si troverà $A=z=2r^{\frac{1}{2}} \left((r+a)^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}} \right)$ Ora essendo a fisicamente minima in riguardo ad r , $(r+a)^{\frac{1}{2}}$ si adegua ad $r^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2r^{\frac{1}{2}}}$, e quindi fisicamente $A=z=a=s$.

Divenga $p=0$, e ne nascerà $(A+C) \frac{2fr}{A+C} - C = z$, e non si richiederà salvo che un peso finito per far equilibrio colla pressione dell'atmosfera dal centro fino al suo termine estremo.

Sta parimenti in questo incontro dentro i limiti del finito il valore di s , imperciocchè sendo $z=2r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}$, se ne deduce $s=\frac{z^2}{4r}$, ed essendo z quantità finita, si scopre altresì tale $\frac{z^2}{4r} = s$.

Se passando oltre al centro la p si considera come negativa, i valori di z , e di s divengono immaginari essendo tale la grandezza $p^{\frac{1}{2}}$. Addiviene ciò in tutti quei casi, nei quali è pari il denominatore della frazione $1-n$, il che si verifica nell'assunto esempio di $1-n=\frac{1}{2}$.

Che se, qualmente richiede la legge delle forze tendenti sfericamente ad un centro, le distanze in qualunque direzione si prendano sempre come positive, a pari distanze di qua e di là dal centro corrisponderanno eguali valori di z , e di s .

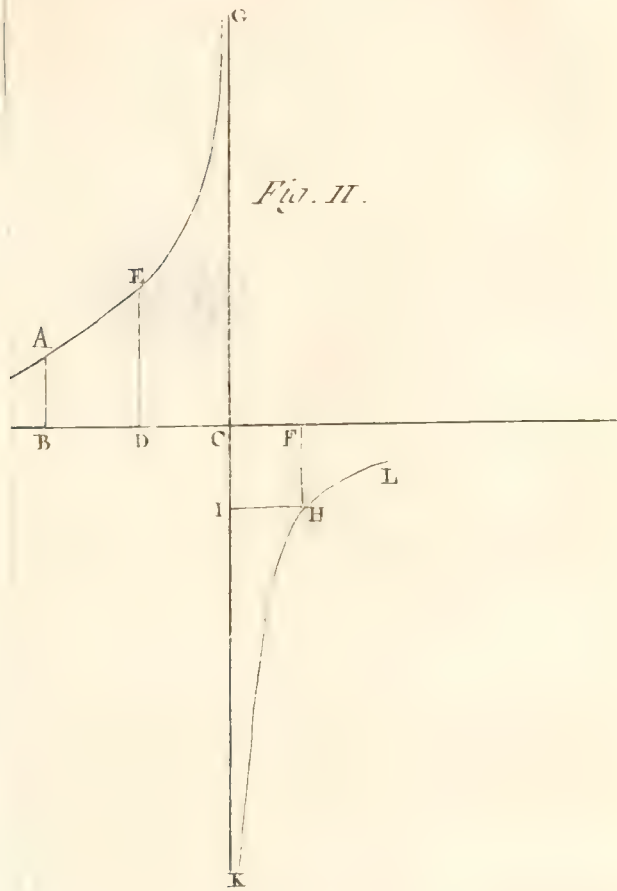
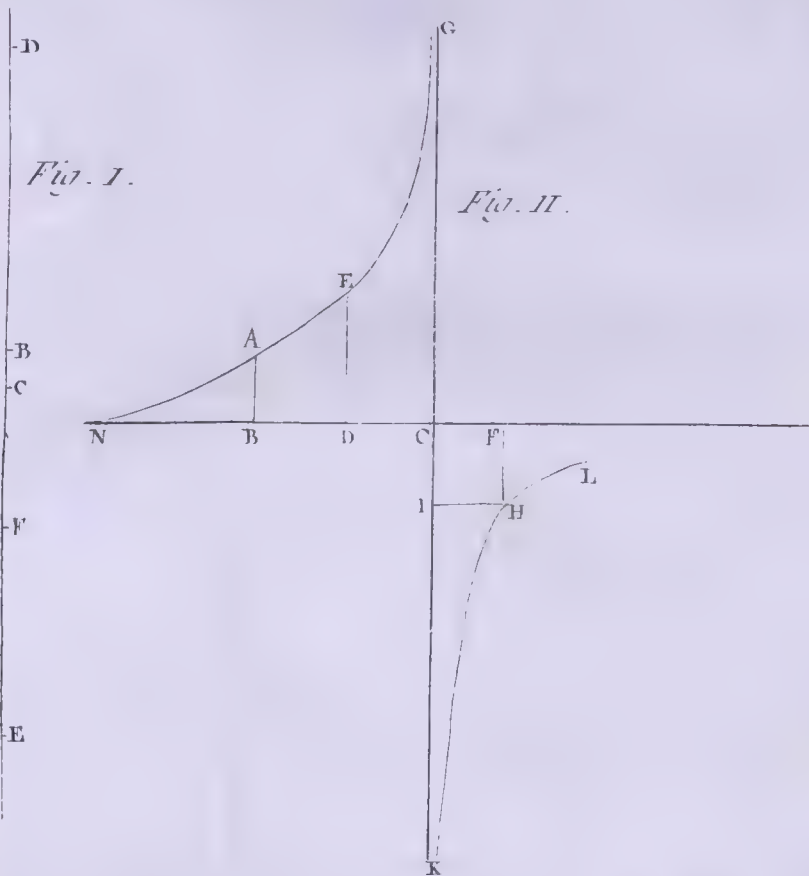


Fig. I.

Fig. II.



DEL MISURARE

L'ACQUA CHE ESCE DALLE CATERATTE
CON MOTO LIBERO.

MEMORIA I.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI.

§. I.

NON era al certo possibile lo stabilire alcuna regola sicura per misurare l'acqua ch' esce dalle aperture che si praticano in fianco delle conserve, e de' canali, sotto il carico di un corpo d'acqua soprastante che la incalza, mantenuto a costante altezza, se prima non erano tolte di mezzo le incertezze che ingombrano l'argomento. Non è già, che fin dai tempi di *Frontino* non si conoscesse da tutti, che la quantità dell'acqua derivata dipende e dalla condizione dell' aperture, e dalla velocità delle stille uscenti. Ma quanto è facile il prendere un partito intorno alle prime, soggette come sono le dimensioni delle aperture a meccanica misura, altrettanto misterioso è stato sempre il magistero dell' acqua in corso, e quant'altra mai delle operazioni naturali difficilissimo a scuoprirsi; ond' è che per molti versi si sono adoperati gli uomini intelligenti in farne cognizione chi per via di mentali ricerche, e chi spiando l'operar della natura ne' vasi col misurar di fatto tutto ciò che poteva a misura subordinarsi. E quanto al primo mezzo messo in opera per questa indagine, senza derogare al merito degli Autori che

Tom. V.

R r

l'hanno impiegato, dotti e sapientissimi, convien dire francamente, che il soggetto maneggiato non è l'acqua de' nostri fiumi, e che più alla scienza matematica, o piuttosto a quella del calcolo, che a quella della natura appartengono le speculazioni che si son fatte su questo proposito. Il secondo ha fruttato assai più del primo; perchè non possono ricordarsi senza gratitudine i nomi di tanti illustri uomini, per la maggior parte Italiani, che hanno promosso le nostre cognizioni effettive in sì fatta materia coll'esperienza e col ragionamento, che sono i mezzi efficaci onde impetrare qualche secreto dalla natura. Ma siccome non può tutto discuoprirsi ad un tratto, succedendosi, come nel cammino, i passi l'uno all'altro, restò sempre oscura sino a' dì nostri la condizione vera, e il vero ufficio di quell'acqua, che soprafla al foro, e vien mantenuta a costante altezza, come dicemmo. E in oltre non si seppe giammai di certo, se fosse o no dovuta all'attuale discesa dell'acqua dalla superficie permanente sino al piano del foro la velocità dell'acqua uscente; ed essendo poi questa velocità dovuta o no alla discesa attuale, non si trovò mai alcun canone fisso e sicuro, onde determinare la vera altezza, cui in ogni caso fosse dovuta la velocità attuale ed effettiva dell'acqua, la quale altezza, secondo le sperienze di tutti, e di tutti i tempi. si trovò sempre non attingere nè pur la metà di detta altezza permanente sopra il foro. Sinchè dunque non si fosse tratto da queste tenebre il soggetto, e stabilito un tal canone conforme alle sperienze, la pratica non aveva norme sicure, onde misurare l'acqua uscente da sì fatte aperture sotto tale e tal altro carico d'acqua permanente sopra il foro.

Necessità pertanto aveva fatto adottare il sagacissimo ripiego della vena contratta trovato dal *Newton* per confermare il principio teorico, che l'acqua debba realmente la propria velocità all'attuale discesa. In conseguenza di che era obbligata la pratica a tener dietro, non già all'apertura reale, ma sì bene alla sezione della vena contratta fuor dell'apertura. Il che non essendo praticabile in grande, e non facilmente in piccolo, o la misura oltrepassava il dovere senza questa correzione del foro, o riusciva arbitrario il disfalco.

§. II.

La via dell'esperienza e dell'osservazione ha finalmente tolto di mezzo, se non erro, tutti questi ostacoli, come può vedersi nella mia Memoria intorno al moto de' liquidi uscanti da' fori delle conserve pubblicata nel IV. Tomo della Società Italiana. Imperciocchè, lasciando da parte tutto ciò che può essere in quella Memoria di mio concetto, a cui non vo' dare altro peso fuorchè quello che costringeranno a concedergli le considerazioni avvenire, è intanto di fatto innegabile, che la condizione dell'acqua soprastante all'orificio e mantenuta a costante altezza è quella di un'acqua assolutamente ringorgata, ed è perciò di fatto, che non è ella nè stagnante, nè costituita in istato libero. In secondo luogo è deciso per le sperienze ivi esposte fatte col caricare di olio a varie altezze l'acqua sottoposta, a cui altr'acqua dava alimento attraverso l'olio, che la velocità dell'acqua uscente non è dovuta all'attuale discesa, come pensava coll'illustre *Newton* la maggior parte degl'idrodinamici. Contro questi fatti non v'ha specolazione, nè discorso in contrario che possa valere.

§. III.

Adunque non è più lecito di considerare l'acqua ch' esce, come se fosse caduta dalla superficie permanente, o dal limite del ringorgo, siccome dobbiamo dire più convenevolmente, e perciò non è necessario ricorrere alla vena contratta per conciliare co' fenomeni una tal sentenza, che non ha più luogo. Basta che nel calcolare gli esborfi pel foro effettivo si adoperi la vera velocità, ch'è propria del fluido all'origine della vena, cioè quella ch'è conforme all'esperienza.

§. IV.

Ed eccoci al nodo del determinare l'altezza dovuta alla velocità che ha l'acqua effettivamente al foro naturale della conserva, altezza, ch'è molto minore, come s'è detto, che non

è quella dal limite del ringorgo al foro. Per quest'oggetto avendo riflettuto, che i margini del foro fanno, per rispetto all'acqua ch' esce della conserva, quello per appunto che fanno i respignenti per rispetto all'acqua corrente ne' canali, e che per conseguenza, come in questi, così ai margini del foro dee stabilirsi un' inflessione di corso con perdita di forza, facendosi ivi necessariamente un' impullione obliqua che va calcolata, mi sono industriato (Veggasi quella Memoria alla pag. 387.) di conoscere prima la misura dell' obblività del corso che dee stabilirsi sotto un' altezza indeterminata d'acqua, per cui ho preso l'unità. Determinata questa, sono andato in traccia della forza composta che risulta dalla coazione simultanea delle pressioni confuse al foro. Finalmente mi riuscì di trovare, che l' altezza dovuta alla velocità effettiva, che ha l'acqua all'origine della vena sotto un carico d'acqua permanente che ha l'unità per altezza, è uguale a questa funzione dell'unità

$$2 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$$

precisamente, altezza che diremo ridotta per distinguerla dall' altezza attuale dell'acqua sopra il foro; e che in conseguenza la velocità effettiva è uguale a questa espressione

$$\frac{\sqrt{5-1}}{2} \sqrt{(\sqrt{5-1})}$$

Svolgendo perciò queste espressioni, e adoperando un maggior numero di decimali che non s'è fatto alla pag. 397. di quella Memoria per una maggiore approssimazione al vero, troveremo

I. Che, presa l'unità per altezza permanente, l' altezza ridotta non è che $\frac{11}{25}$ dell'unità, e però sta la permanente alla ridotta come 25 a 11.

II. Che la velocità, che sarebbe dovuta all' altezza attuale permanente, sta alla velocità dovuta all' altezza ridotta, come 8 a 5 $\frac{5}{12}$, o come 96 a 65, e che però l'esborso d'acqua, che si farebbe dal medesimo foro, se la velocità fosse

dovuta all'altezza attuale, sta all'esborso effettivo parimente come 8 a 5 $\frac{5}{12}$, o come 96 a 65.

Il che è per appunto ciò che risulta a un bel circa da tutte le sperienze antiche e moderne, dovendo attribuirsi agl'inevitabili errori, or in più or in meno, dello sperimentare il divario che può ravvifarfi tra l'esperienze e la legge.

§. V.

Questo è il canone, che dicemmo, desiderato (§. I.), onde trovare in ogni caso l'altezza ridotta a cui è dovuta la velocità attuale dell'acqua uscente da' fori. Imperciocchè se sia A un'altezza permanente qualunque, e si faccia, come 25 a 11, così A ad un quarto proporzionale, sarà $\frac{11}{25}A$

l'altezza ridotta a cui è dovuta la celerità attuale dell'acqua uscente da un foro sotto l'altezza permanente A . Il che posto, aperta è la via onde risolvere tutti i problemi, che possono venir in campo per l'erogazione dell'acqua dalle cateratte. Sia però concesso di premettere alcune avvertenze preliminari a lume della pratica, e perchè si sappia ben distinguere da tutti gli altri il caso che alle conserve si riduce, e va per conseguenza soggetto al metodo che son per esporre.

§. VI.

Poichè dunque è dimostrato, che l'acqua mantenuta nelle conserve ad una costante altezza, mentr' esce da qualche foro aperto nel fondo o ne' fianchi, è un'acqua ringorgata essenzialmente distinta dall'acqua libera, e dalla stagnante, è indubitata cosa, che non deve confonderfi cogli altri questo stato, perchè a lui solo possano appropriarsi le leggi stabilite qui sopra. Bisogna dunque primamente, che il lume sia terminato per ogni verso, vale a dire, che presenti all'acqua un'apertura determinata in altezza e larghezza, come sono i fori ne' vasi. Se l'emissario è aperto di basso in

alto, la derivazione appartiene al sistema dell'acque correnti per canali, non a quello de' vasi di cui è proposito in questo luogo. Secondariamente bisogna, che la superficie dell'acqua imminente all'apertura dell'emissario formonti il labbro superiore della bocca, e si mantenga orizzontale e quieta sensibilmente: condizione dell'acqua ringorgata che la distingue dalla corrente. E questo è quel rialto permanente che gl'Italiani chiamano *Battente*, e lo misurano da detta superficie dell'acqua all'orlo o labbro, che dicemmo, superiore della bocca, espressione convenuta di cui farò uso liberamente.

§. VII.

Cautamente pertanto dee procedere l'idrometra nell'applicare le regole fatte pe' vasi alle cateratte, dinanzi alle quali non sia l'acqua perfettamente ringorgata, ed orizzontale e permanente la superficie del ringorgo. Tutto è sconvolto, e la teorica de' vasi non ha più luogo, qualora sia imboccato il lume della cateratta da un'acqua corrente. E mal giudicherebbe pure se tenesse per soddisfatta la seconda condizione indicata qui innanzi (§. VI.) al solo vedere alcun poco formontato il labbro superiore della bocca dall'acqua uscente, mentre la superficie non fosse nello stesso tempo e si mantenesse orizzontale e quieta sensibilmente. Del che basti l'aver qui fatto parola, essendo gravissimo il danno che può farsi così al pubblico, come al privato interesse, confondendo condizioni d'acqua essenzialmente diverse; e può eziandio accadere, che si accusi d'insufficienza il metodo, mentre la colpa sia dell'idrometra, il quale non abbia per avventura ben accertato lo stato dell'acqua prima di appropriarle la condizione dell'acque ringorgate.

§. VIII.

Ma non finiscono qui le avvertenze per non isbagliare nell'estimazione dell'acqua uscente dalle cateratte messe in fianco de' fiumi. E' detto quanto basta per rispetto all'acqua anteriore, costituita immediatamente dinanzi alla cateratta,

ma non è detto ancora dell'acqua inferiore posta immediatamente sotto l' emissario. L' acqua ch' esce da' vasi sprizza in aria, ed è libera, prescindendo dalla resistenza dell' aria, da cui può prescindersi. Ma non sarebbe libera, nè potrebbe prescindersi dalla resistenza d' altro fluido più denso, e neppure dell' acqua medesima, se il getto vi fosse sommerso, e tanto meno quanto il fosse più profondamente. Il moto di quest' acqua fu prima di tutti considerato dal March. *Poleni* nel suo Trattato *de motu aquae mixto* pubblicato del 1717, indi da *Danielle Bernoulli* nell' Idrodinamica, e da altri successivamente. Perchè dunque possa adattarsi agli emissarj in grande la teorica de' vasi, altro farà il caso dell' acqua uscente libera dall' emissario, e tutt' altro quello in cui ella non abbia libera l' uscita. Per ridurre il secondo caso a quello de' getti sommersi ne' vasi, bisogna concepire, che mentre all' emissario anteriormente è accollato per uscire un corpo d' acqua ringorgata, altro corpo d' acqua ringorgata sia inferiormente accollato alla medesima bocca tendente ad uscire contrariamente sì, che due *battenti* per contrario verso si ravvisino a collo dell' emissario, e si verifichino da ambe le parti le condizioni del §. VI. Così mi pare che possa l' idrometra riconoscere sul momento a qual de' due appartenga il caso di derivazione d' acqua per una cateratta cioè se sia a flusso libero, o a flusso perturbato. Basta che esaminisi se la luce nel rovescio della cateratta sia accecata da acqua, che le si accolli intorno, e sommerga la vena, soprastando con un rialto o battente al labbro superiore dell' orifizio; oppure se vi si ravvilino distintamente gli orli dell' apertura liberi, come ne' cannelli che mandano acqua dalle sponde de' vasi. Nel primo caso il moto dell' acqua è indubitatamente perturbato, e libero nel secondo. Per quanto è a mia cognizione, questa condizione dell' acqua uscente dalle cateratte non è stata prima d' ora contemplata come oggetto da non trascurarsi nell' estimare gli esborti de' nostri emissarj. Al che fare m' indusse l' osservar ch' io feci, che a poche si riducevano, tra le moltissime vedute, le derivazioni a flusso perfettamente libero. Dopo che avremo trattato in questa prima Memoria degli efflussi liberi, ci faremo a versare nella susseguente intorno a' perturbati, perchè la distribuzione

dell' acque riesca, s'è possibile, più esatta che non può essere senza aver riguardo alla diversa condizione delle derivazioni.

CAPITOLO SECONDO

Misura dell' acqua uscente dalle cateratte a flusso libero.

§. IX.

Premesse queste nozioni passiamo a rintracciare la misura dell' acqua ch' esce dalle cateratte verticali aperte in isponda de' fiumi, dinanzi alle quali si mantenga l'acqua ringorgata (§. VI.) a permanente altezza. Due elementi pertanto debbono determinarsi, la grandezza del lume, e la velocità ond'è animata la vena uscente sotto la data altezza permanente; posti i quali, si troverà per ogni caso la quantità assoluta dell'acqua ch' esce in un dato tempo. Questo è quello che cercheremo di fare nel modo più semplice e generale che sia possibile a vantaggio della pratica.

§. X.

E' costume degli Idraulici di calcolare la quantità dell' acqua fluente coll'aje delle parabole, in cui le ascisse esprimono le altezze dell' acqua, e le semiordinate le velocità a dette altezze dovute. Ma il metodo è limitato a figure di orificj puramente rettilinee, dovendo l' idrometra ricorrere ad altri partiti per le figure curvilinee. E' dunque miglior consiglio l' indagare regole più generali coll' analisi perchè in tutti i casi un solo metodo serva al bisogno; mentre, se non si voglia far uso delle Tavole, niente meno, e forse più di applicazione richiede il maneggio dell' aje paraboliche, di quel che possa esigere in circostanze simili la sostituzione de' valori numerici alle lettere nelle formule che l' Algebra può esibire.

§. XI.

§. XI.

P R O B L E M A I.

Trovare l'assoluta velocità dovuta a qualsivoglia altezza.

Misurandosi la velocità nel moto uniforme dallo spazio percorso in un dato tempo, s'intenda, che la velocità dimandata sia per un minuto secondo. E poichè un grave cadendo liberamente dalla quiete percorre in un minuto secondo

piedi parigini $15 \frac{1}{12}$ di altezza, cioè pollici 181, e perciò

mosso uniformemente con la velocità acquistata in fine di questa caduta percorre in un secondo pollici 362, farà questa la velocità per un secondo dovuta all'altezza di piedi

$15 \frac{1}{12}$.

Essendo poi le velocità in fine delle discese libere dalla quiete proporzionali alle radici quadrate delle altezze percorse, se sia A un'altezza qualunque, V la velocità dovuta a quest'altezza, sarà $\sqrt{181}$ a 362 come $\sqrt{A}$ ad V , e farà V lo spazio in parti della specie di A che percorrerà il grave di moto uniforme in un minuto secondo. In conseguenza farà

$$181 : (362)^2 = 181 : 2^2 \cdot (181)^2 = 1 : 4 \cdot 181$$

$$= 1 : 724 = A : V^2, \text{ e avrà luogo l'equazione}$$

$$724A - V^2 = 0$$

col mezzo della quale, data in piedi, pollici, o linee l'altezza A , farà pure dato in piedi, pollici, o linee lo spazio V che percorre un grave uniformemente in un minuto secondo con la celerità acquistata in fine della discesa dall'altezza A , cioè la ricercata assoluta velocità dovuta all'altezza A . Il che ecc.

§. XII.

PROBLEMA II.

Proposta qualsivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l'altezza permanente dell'acqua ringorgata sopra il medesimo orificio, trovare la quantità di acqua che quest'orificio somministra in un minuto secondo sotto una tale altezza.

Sia FGD (Fig. I.) la figura del lume sommerso, ACB la superficie dell'acqua ringorgata, FG la foglia, DE l'altezza totale del lume sopra la foglia, CE l'altezza del fluido sopra la medesima foglia, e sieno bf , dg due rette infinitamente prossime ordinate all'altezza DE presa come asse della figura. Concepiamo pertanto l'orificio FGD diviso in un numero infinito di trapezj elementari $bdgf$, considerando ciascuno di essi come un orificio particolare i cui punti sieno ugualmente distanti dalla superficie AB del liquore, e si faccia $CE = H$, $CD = b$, $Da = x$, $ab = y$; sarà $ac = dx$, $DE = H - b$. Essendo dimostrato, che l'altezza dovuta alla velocità del trapezio elementare $bdgf$ non è altrimenti l'altezza Ca , ma sì bene $2Ca \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^3$, cioè assai prof-

fimamente $\frac{11}{25} Ca$ (§. V.) $= \frac{11}{25} (b + x)$, si sostituisca nell'espressione del §. precedente questo valore in luogo di A , e la velocità assoluta di detto trapezio farà

$$V = \sqrt{\left(\frac{7964}{25} (b + x) \right)}$$

ch'è lo spazio effettivo che può percorrere uniformemente il trapezio in un minuto secondo sotto l'altezza permanente Ca . Moltiplicando pertanto la velocità V per l'aja del trapezio ydx , farà $\frac{2}{5} ydx \sqrt{7964(b+x)}$ la quantità elementare di acqua esborfata dall'orificio $bdgf$ in un minuto secondo, e la somma di tutte queste quantità elementari sa-

rà indefinitamente la quantità di fluido che può essere somministrata dall'orificio Dfb coll'altezza $Da = x$ in un minuto secondo. Sarà ella pertanto espressa dalla forma integrale

$$(A) \dots \int \frac{2}{5} y dx \sqrt{(7964(b+x))} + \text{Cost. arb. } K.$$

Se dunque dall'equazione alla figura FDG si sostituisca il valore di y in x e costanti, s'integri, e si determini K a condizione che posto $x=0$ sia nulla l'espressione, non resterà che porre $H-b=DE$ per x , e si otterrà la quantità totale di fluido uscente dall'orificio intero FDG in un secondo di tempo sotto l'altezza $CE=H$ dalla foglia, o sotto l'altezza $CD=b$ del battente. Il che ecc.

§. XIII.

Questa soluzione abbraccia tutte le figure algebriche che possono assegnarsi alle cateratte con tutta la generalità che può mai pretendersi dal calcolo senza ricorrere in alcun caso alle aje paraboliche, o ad altro suffragio della Geometria. Che se la grandezza dell'apertura sia nota, basterà determinare la velocità assoluta della vena uscente per venir in cognizione della quantità di acqua che quell'orificio trasmette in un dato tempo. Ma gli orificj verticali collocati in fianco delle conserve o de' canali di acqua corrente differiscono in questo dagli orizzontali, che non hanno effettivamente tutti i punti del lume a eguale distanza dalla superficie del fluido ringorgato. Ragione per altro insegna, che un punto deve esistere nel medesimo lume, la cui distanza da detta superficie è tale, che se a tutti i punti dell'acqua uscente costituiti in quel lume si attribuisse una sola e comune velocità dovuta ad una tale distanza, tanto sarebbe il flusso d'acqua in un dato tempo con questa media velocità, quanto è quello che si fa con le celerità naturali e varie della vena. Bisogna dunque indicare il metodo onde determinare questa velocità media, e bisogna farlo come il richiede la generalità dell'espressione (A) del §. XII.

§. XIV.

P R O B L E M A III.

Proposta qualsivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l'altezza permanente dell'acqua ringorgata sopra il medesimo orificio, trovare l'assoluta velocità media dell'acqua ch' esce per un tale orificio.

Posta la medesima figura *FDG* (*Fig. I.*) della Prop. precedente, *AB* la superficie permanente, e la stessa denominazione per le misure, li chiami *V* la velocità media ricercata. Essendo $\int y dx$ l'espressione indefinitamente dell'aja *Dfb*, è certo, che $V \int y dx$ esprimerà l'assoluta quantità di acqua, che esce dall'orificio che ha $\int y dx$ per aja, giacchè *V* è velocità assoluta per supposizione. Ma detta quantità di acqua è espressa indefinitamente dalla quantità (*A*) del §. XII. Dunque avrà luogo l'equazione

$$V \int y dx = \int \frac{1}{2} y dx \sqrt{(7964(b+x))}$$

e però sarà la velocità media dimandata

$$(B) \dots\dots V = \frac{\int \frac{1}{2} y dx \sqrt{(7964(b+x))}}{\int y dx}$$

qualunque siasi la figura *FDG*. Sostituito pertanto dall'equazione alla medesima figura il valore di *y* in *x*, integrata la formula (*B*), e posto *H* — *b* per *x* nell'integrale completo, si avrà la velocità media ricercata dell'acqua ch' esce dall'intero lume *FDG* sotto la superficie permanente *AB*. Il che ecc.

§. XV.

In queste due formule (*A*), (*B*) è compreso tutto ciò che può proporsi intorno agli esbori di acqua così dalle aperture de' vasi, come dalle cateratte in fianco de' canali, ove sia l'acqua ringorgata a permanente altezza sopra le aperture. Ma oltre alla generalità per qualunque figura algebrica, e al comodo del dispensare l'idrometra dall'uso, d'altronde pregevolissimo, dell'aje paraboliche nell'estimazione degli es-

flussi, hanno il vantaggio ancora queste formule di determinare l'effettiva quantità di acqua senza bisogno di ricorrere ad alcuna correzione per la contrazione della vena. Mi propongo dunque di farne applicazione alla sola figura rettangolare, ch'è la comune ed usuale delle nostre cateratte, lasciando all'arbitrio dell'idrometra l'applicarle a qualunque altra figura. Noi abbiamo qui in mira più la pratica che la speculazione.

§. XVI.

P R O B L E M A IV.

Determinare la quantità di acqua ch' esce in un minuto secondo dalla cateratta rettangolare verticale ABCD (Fig. II.) sotto il battente EF.

Si chiami L la larghezza CD del lume $ABCD$, e farà $y = \frac{L}{2}$ l'equazione alla figura rettangolare, $EG = H$, il battente $EF = b$, $FG = H - b$. Posta pertanto nell'espressione

$$(A) \dots \int_0^{\frac{2}{3}} y dx \sqrt{(7964(b+x))} + K$$

la larghezza L della nostra luce in luogo di $2y$, l'integrale della forma differenziale

$$dx \sqrt{(7964(b+x))}$$

essendo $\frac{2}{3}(b+x) \sqrt{(7964(b+x))}$, si troverà, che l'integrale della formula (A) farà

$$\frac{2L}{15}(b+x) \sqrt{(7964(b+x))} + K$$

e completamente avrà la forma (C)

$$(C) \dots \frac{2L \sqrt{(7964)}}{15} ((b+x) \sqrt{(b+x)} - b \sqrt{b})$$

Ma siccome il radicale $\sqrt{(7964)}$ è costante in tutti i casi,

ed uguaglia prossimamente 89.24 , cioè $\frac{2231}{25}$, così posta per x l'altezza $H - b$ del lume intero, l'espressione dell'effettiva quantità di acqua uscente in un minuto secondo dalla luce $ABCD$ si ridurrà a questa forma

$$(C') \dots\dots \frac{4462 L}{375} (H\sqrt{H} - b\sqrt{b}).$$

Il che ecc.

§. XVII.

PROBLEMA V.

Trovare la velocità media dell'acqua ch' esce dal lume $ABCD$ sotto il battente EF .

Poste le denominazioni precedenti, si riassume la formula generale (B) della velocità media

$$(B) \dots\dots r = \frac{\int \frac{1}{2} y dx \sqrt{7964(b+x)}}{\int y dx}$$

Si metta $\frac{1}{2} L$ in luogo di y sotto e sopra, s'integri, e si completino separatamente gl'integrali. Si otterrà

$$r = \frac{2\sqrt{7964}}{15} \left(\frac{(b+x)\sqrt{(b+x)} - b\sqrt{b}}{x} \right)$$

e posto $H - b = FG$ in luogo di x , $\frac{2231}{25}$ in luogo di $\sqrt{7964}$, farà

$$(D) \dots\dots r = \frac{4462}{375} \left(\frac{H\sqrt{H} - b\sqrt{b}}{H - b} \right)$$

il valore della velocità media ricercata.

§. XVIII.

Ancorchè il maneggio di qualunque delle due formule (C'), (D) non altro richiegga dall'idrometra, se non che sostituisca ad L nella formula (C') la larghezza dell'apertura, alla lettera H l'altezza dalla superficie dell'acqua ringorgata alla foglia in entrambe le formule, e così per b il valore del battente (tutto però in misure della stessa specie), e colle prime regole dell'Aritmetica, facendo uso della Tavola delle radici che abbiamo messo in calce della Memoria, trovi in numeri il valore che ricerca, è bene che si diano alcuni esempj per facilità della pratica.

I. E S E M P I O

Trovare in pollici cubici la vera quantità che costituisce il così detto quadretto di acqua nello Stato Veneto.

Per quadretto d'acqua, ove si tratti di acqua ringorgata ed accollata alla bocca di una cateratta, donde poi esca libera e s'incanali senza che sia sommersa inferiormente la bocca medesima, s'intende comunemente il corpo di acqua ch' esce da una luce rettangolare quadrata, come $ABCD$ (Fig. II.), di un piede per ogni lato, e con due pollici di battente EF . Pertanto sarà $L=12$ poll., $H=14$ poll., $b=2$ poll., e però, riassunta la formula generale (§. XVI.)

$$(C') \dots\dots\dots \frac{4462}{375} L (H\sqrt{H} - b\sqrt{b})$$

vi si sostituiscano i valori di L , H , b , e si avrà

$$\frac{4462 \cdot 12}{375} (14\sqrt{14} - 2\sqrt{2}) = \frac{17848}{125} (14\sqrt{14} - 2\sqrt{2}).$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{14}=3.74$, $\sqrt{2}=1.41$, e perciò l'espressione ridotta sarà $7073 \frac{1623}{3125}$. Adunque la quantità di acqua costituente un veneto quadretto libero fa-

rà per ogni minuto secondo pollici cubici $7073 \frac{1623}{3125}$, la quale per facilità, trattandosi di misura modulare per l'altre bocche, potrà assumersi di pollici cubici 7074. Il che ecc.

II. ESEMPIO.

Trovare la quantità di acqua costituente l'oncia milanese libera.

Quest' oncia consiste in una luce rettangolare larga tre oncie lineari, ed alta quattro con due altre oncie di battente. Posto ciò, farà $L=3$ onc., $H=6$ onc., $b=2$ onc. Sostituendo questi valori nella formula (C'), si avrà

$$\frac{4462 \cdot 3}{375} (6 \sqrt{6-2} \sqrt{2}) = \frac{4462}{125} (11.88) = 424 \frac{214}{3125};$$

e però somministra detta oncia libera milanese per ogni minuto secondo oncie cubiche d' acqua $424 \frac{214}{3125}$, semprechè sia l'acqua soprastante all'orificio ringorgata, come le condizioni richiedono del §. VI. Il che ecc.

III. ESEMPIO.

Trovare quant' acqua passa in un minuto secondo per una bocca libera rettangolare alta dieci pollici, larga trentatre pollici, con due piedi e un pollice di battente.

Essendo il battente di pollici 25, e l'altezza della bocca di pollici 10, farà $H=25$, $b=5$, $L=33$, si sostituiscano pertanto questi valori nella formula (C') e si avrà

$$\frac{4462 \cdot 33}{375} (35 \sqrt{35-25} \sqrt{25}) = \frac{4462 \cdot 11 \cdot 7 \sqrt{7}}{5 \sqrt{5}} = 11.4462.$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{7}=2.65$, $\sqrt{5}=2.24$; dunque il valore ricercato farà

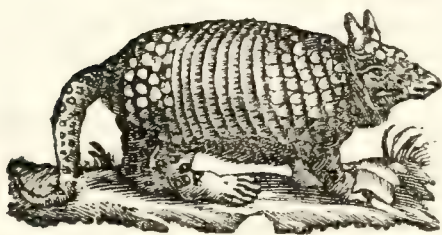
$$\frac{4462 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 265}{5 \cdot 224} = 11.4462 = 32276.32$$

e però

e però l' acqua che passa per una tal luce sarà di poll. cub.
 32276.32, cioè quadretti 4 $\frac{1792}{3577}$. Il che ecc.

§. XIX.

Questo è brevemente quello che m' era proposto di fare, cioè di ridurre a regole semplici il misurare l' acqua ch' esce dalle cateratte con moto libero, senza bisogno di correzioni e conformemente all' esperienza. Non è troppo, a mio credere, ciò che si esige dall' idrometra nella maniera proposta, non essendo permesso d' ignorar tutto, o di seguire al più una cieca pratica a chi pretende d' immetterli in queste materie.



DEL MISURARE

L'ACQUA CH'ESCE DALLE CATERATTE CON MOTO
PERTURBATO.

MEMORIA II.

DEL MEDESIMO.

§. XX.

NEL primo capitolo della Memoria precedente ho dichiarato lucidamente, che cosa debba intendersi per flusso perturbato. E' sì frequente il caso, che l'esito delle nostre cateratte riesca sommerso sott'acqua, che avrà ben occasione l'idrometra di accertarsi quant'era importante il considerare non sempre libero, come s'è fatto finora, l'efflusso degli emissarj. Questo pertanto è il luogo di farne trattazione, perchè sieno in pronto le regole ond'estimare nell'una e nell'altra condizione la portata delle derivazioni.

§. XXI.

Per mettere il caso sotto gli occhi, sia AE (*Fig. III.*) la superficie permanente dell'acqua superiormente accollata al foro FD , e BC quella dell'acqua accollata inferiormente al medesimo foro, sicchè non solamente l'ingresso sia sommerso sotto l'altezza AD , ma l'esito eziandio il sia sotto l'altezza BD . Si chiami acqua influente la superiore, e acqua recipiente l'inferiore. Si tratta di determinare la quantità di acqua ch'esce in un dato tempo dal foro FD costituito tra due acque stabilite, come mostra la figura. Ho creduto bene di trattare quest'argomento da sè, perchè la dignità sua il comporta, e perchè i principj su'quali bisogna fondar-

ne la discussione si estendono ben oltre al caso delle cateratte che abbiamo in mira. Il moto dell'acque ne' vasi sommersi, il moto ne' vasi interrotti da' diaframmi, quello de' fiumi agli sbocchi nel mare o in altri fiumi, ed altri simili movimenti perturbati dell'acqua, tutti debbono contemplarsi sotto un medesimo aspetto, e tutti con quello del caso nostro debbono co' medesimi principj definirsi.

§. XXII.

Moto perturbato di un sistema di corpi è quello in cui hanno luogo azioni reciproche de' medesimi corpi l'uno sull'altro.

Considerando i movimenti che ci cadono sotto i sensi quotidianamente, non ve n'ha alcuno per avventura in cui non si verifichi, rigorosamente parlando, qualche perturbazione, per parte almeno del mezzo, ove si fa e deve giudicarsi fatto qualunque movimento. Ma più che in altro sembra, che queste perturbazioni regnino ne' moti de' fluidi, ove s'immettono, per la loro mobilità, azioni mutue d' innumerabili corpicciuoli; sicchè parrebbe disperata cosa il definire le leggi e i fenomeni di simili movimenti, se non fosse lecito di considerare un determinato volume fluido in moto, come un tutto mosso ed operante per *modum unius*, estimando le sue azioni esterne senza indagare ciò che intestinamente le parti minime operano l'una sull'altra reciprocamente.

§. XXIII.

Ne' moti perturbati di un sistema di corpi in generale tre elementi vengono necessariamente in considerazione,

I. I moti proprij e semplici de' corpi indipendentemente dal sistema, cioè le azioni che produrrebbe ciascuno da sè se fosse solo, o non agisse alcun corpo del sistema sopra di lui,

II. Le azioni del sistema che restano distrutte, cioè le parti delle azioni proprie e semplici che restano distrutte per l'azione reciproca de' corpi del sistema l'un sull'altro,

III. Le azioni residue o i movimenti attuali del sistema ne' tempi successivi.

T t ij

Posti due qualunque di questi elementi, è aperta la strada onde venire in cognizione del terzo. Considerando una o più azioni del sistema come principali, le altre in moltissimi problemi dinamici vengono contemplate e denominate resistenze; il che non altera, nè diversifica la cosa. In fatto se si esaminino tutte le quistioni, ove tendano corpi a muoversi con velocità e direzioni, cui sono forzati a cangiare per l'azione mutua ch'esercitano gli uni sugli altri, si troverà, che per la loro risoluzione è mestieri ricorrere al maneggio di questi elementi. Il secondo intanto dà luogo all'importantissima conseguenza, che *le azioni perdute si consumano sempre nel vincere uguali e contrarie azioni*, la quale è la base fondamentale della Statica de' solidi, e de' fluidi, cioè di tutti gli equilibrij. E qui si ravvisa onde sieno scaturiti i luminosi principj della Dinamica del Sig. d'Alembert e della Meccanica analitica del Sig. de la Grange riducenti le leggi del moto de' corpi a quelle del loro equilibrio. Supposto un sistema di corpi in moto, riguardano il moto, ond'è animato ciascun corpo in un dato istante, come composto di due parti, una delle quali sia il moto attuale che avrà il corpo nell'istante che segue, e l'altra un moto distrutto per l'azione reciproca de' corpi l'un sull'altro. Il moto onde riguardano animato ciascun corpo in un dato istante è egli altro che il primo degli elementi venuti in considerazione qui innanzi ne' moti perturbati? e similmente gli altri due sono eglino altra cosa dal terzo e secondo de' predetti elementi? Superiore per altro ad ogni laude è l'uso che hanno fatto di tali principj questi due illustri uomini, e specialmente la felicità con cui il Geometra italiano determina i moti che devono essere distrutti, e le leggi dell'equilibrio tra le forze che li producono in tutti i rami della scienza del moto.

Ma siccome non è sempre facile nè spedita operazione il discendere a' particolari da teorie eminentemente generali, e non mancano uomini che vogliono essere guidati dall'intelletto più che dal calcolo, e vedere frequentemente la colonna migliare nella strada che fanno; così non farà infruttuoso, che s'ensi qui chiaramente esposti i principj fondamentali, che vanno messi in opera nel trattare de' moti perturba-

ti, perchè ciascuno ne' casi particolari vi ricorra da sè, come meglio gli torna comodo, indipendentemente da qualunque teoria. Così ho fatto nel caso che ho per mano, e così, se non erro, parmi che vada trattata la Teoria dell'acque fluenti da' vasi sommersi, o pe' vasi attraversati da diaframmi, e quella pure, come s'è detto, degli sbocchi de' fiumi in mare o in altri fiumi.

§. XXIV.

Ripigliamo dunque il proposito del §. XXI., e la fig. III. E' cosa indubitata, che in questa condizione di cose la copia d'acqua ch' esce in un dato tempo dall' apertura FD è minore di quella che si smaltirebbe in pari tempo dal medesimo foro, se la vena mettesse capo in aria liberamente. Imperciocchè l'acqua recipiente continuamente accollata al foro FD oppone all'acqua influente AE una resistenza da vincere, la quale rintuzza e scema la velocità che le è dovuta sotto l'altezza permanente AD . E' chiaro pertanto, che al foro FD havvi un sistema di corpi tendenti a muoversi con velocità cui sono sforzati a cangiare per l'azione mutua ch'esercitano gli uni sugli altri.

Se non vi avesse l'acqua recipiente BC , si moverebbero le parti dell' influente AE liberamente pel foro FD con la velocità competente sotto l'altezza AD ; e se non vi avesse l'acqua AE , si moverebbero le parti dell' acqua BC liberamente pel medesimo foro con la velocità competente sotto l'altezza BD . In conseguenza al foro FD si verifica il moto perturbato che abbiamo qui innanzi definito, e havvi necessariamente perdita di azione ad ogni istante, ossia di quantità di moto, cui possiamo stabilire così, inerendo al §. precedente:

L' azione che si perde ad ogn' istante al foro FD per parte dell' acqua influente sotto l'altezza permanente AD , si consuma nel vincere l'azione uguale e contraria esercitata dall' acqua recipiente sotto l'altezza permanente BD .

§. XXV.

Ciò determinato, che non pare potersi mettere in dubbio, veggiamo dell'azione residua, o dell'azione attuale che resta all'acqua influente dopo questa perdita, giacchè l'azione libera di questa sotto l'altezza AD è maggiore dell'azione libera, che potrebbe produrre l'acqua recipiente sotto l'altezza BD . Oscurissima cosa è stato sempre il definire con qual legge si alterino le velocità dell'acque influenti in genere pel contrasto che soffrono dall'acque recipienti. Gravissimi uomini hanno preteso ne' tempi andati, e il pretendono tuttavia Geometri viventi, che non altro debba considerarsi in questo contrasto in linea di resistenza fuorchè la pressione che l'acqua recipiente esercita all'ingresso dell'acqua influente. Sicchè equilibrandoli la pressione dell'acqua recipiente con altrettanta pressione dell'acqua influente sotto il comune livello HBC , non debba rimanere che l'eccesso delle pressioni il quale possa imprimere velocità all'acqua uscente, vale a dire che la velocità attuale sia dovuta all'altezza AB , eccesso dell'altezza AD sopra l'altezza BD . Ma ben riflettendo alle cose, e distinguendo i fluidi comunicanti in quiete nell'Idrostatica dai fluidi comunicanti in movimento nell'Idrodinamica, forza è credere, che non sia altrimenti mera pressione o peso ciò che si equilibra in simile contrasto; e conchiudere, che non d'altro nasca distruzione e perdita che di movimenti, e che sieno veramente azioni eguali e contrarie quelle che si equilibrano. M'induco perciò ad abbracciare altra sentenza, sostenendo, che per l'azione attuale non vada già presa l'azione che può essere prodotta dalla differenza delle pressioni in contrasto, ma sì bene l'azione che sopravanza all'acqua influente, detratta quella parte che si consuma nel vincere l'azione uguale e contraria esercitata dall'acqua recipiente, ch'è cosa diversa.

§. XXVI.

Rappresentiamoci pertanto la fig. I. in prospetto, e sia CFE (Fig. IV.) il lume della cateratta di quallivoglia figu-

ra algebrica, MA la superficie permanente dell'acqua influente, QB la superficie permanente dell'acqua recipiente, e sia, come al §. XII. della Memoria precedente, divisa l'apertura CFE in un numero infinito di trapezj elementari $bfgd$. Consideriamo ciascuno di questi trapezj come un orificio i cui punti sieno ugualmente distanti per un verso dalla superficie MA , e per l'altro opposto dalla superficie BQ . Si faccia l'altezza dell'acqua influente sopra la foglia $AD=H$, l'altezza dell'acqua recipiente $BD=H'$, il battente della prima $AF=b$, il battente della seconda $BF=b'$, $Fa=x$, $ab=y$; sarà $FD=H-b=H'-b'$, $ac=dx$. Col metodo della prima Memoria troveremo, che la velocità assoluta del trapezio elementare di acqua $bfgd$, o lo spazio ch'egli percorrerebbe uniformemente in un minuto secondo, se fosse rimossa l'acqua recipiente, farebbe

$V = \sqrt{\left(\frac{7964}{25} (b+x) \right)}$, e quella del medesimo trapezio fluido $bfgd$ per contrario verso, se fosse rimossa l'acqua influente, farebbe $V' = \sqrt{\left(\frac{7964}{25} (b'+x) \right)}$. Moltiplicando dunque l'una e l'altra di queste velocità V, V' per l'aja del trapezio $2ydx$, sarà

$$\frac{2}{5} y dx \sqrt{7964 (b+x)}$$

la quantità di moto libero del trapezio liquido, ossia la quantità elementare di acqua ch'esborserebbe l'apertura $bfgd$ in un minuto secondo sotto l'altezza Aa , se fosse libera, e

$$\frac{2}{5} y dx \sqrt{7964 (b'+x)}$$

la quantità elementare che somministrerebbe la stessa apertura in pari tempo sotto l'altezza Ba , se fosse libera. Dunque prendendo le somme di queste quantità elementari, sarà

$$(A) \dots \int \frac{2}{5} y dx \sqrt{7964 (b+x)}$$

indefinitamente la quantità di moto che avrebbe la sezione liquida Ffb sotto l'altezza Aa , se fosse libera, e

$$(B) \dots \int_5^2 y dx \sqrt{(7964 (b' + x))}$$

la quantità di moto della medesima sezione Ffb per contrario verso sotto l'altezza Ba , se fosse libera. Ma sono direttamente contrarj i moti (A) (B) ; dovrà dunque impiegarsi continuamente una parte dell' azione maggiore (A) nel vincere la minore (B) : onde farà (B) l'azione distrutta, e l'azione residua dell' acqua influente, cioè la quantità di moto attuale, farà necessariamente $(A) - (B)$, vale a dire

$$(C') \dots \frac{2}{5} \int y dx \sqrt{(7964) (V(b+x) - V(b' + x))} + K;$$

e questa farà la quantità di acqua somministrata in un minuto secondo dal foro fFb di moto perturbato. Sostituito dall' equazione alla figura CFE il valore di y in x , e integrata la formula sì, che si annienti quando $x = 0$, ed abbia il suo valore completo quando sia $x = FD = H - b = HT - b'$, si avrà la quantità totale di fluido uscente per ogni secondo di tempo dall' intera apertura CFE ; com' era proposto da trovarsi.

§. XXVII.

E se si chiami V la velocità media, si troverà, come al §. XIV. questa espressione

$$(C') \dots V = \frac{1}{5} \int \sqrt{(7964) (V(b+x) - V(b' + x))} : \int y dx$$

della velocità media nel moto perturbato.

§. XXVIII.

Nelle due formule (C) , (C') è compreso tutto ciò che può essere chiesto da determinare intorno agli esborj assoluti di acqua dalle cateratte a flusso perturbato, qualunque siali la figura dell' apertura per cui deve fluire l' acqua, senza bisogno di ulteriori riduzioni. Ne faremo dunque applicazione alla figura rettangolare usuale, ben persuaso che comprenda ognuno non essere che un affare di calcolo, e più di specolazione che di pratica l' applicare le nostre formule ad altre figure algebriche.

§. XXIX.

§. XXIX.

Determinare la quantità di acqua ch' esce per ogni minuto secondo dalla cateratta rettangolare verticale ABCD (Fig. II.) con flusso perturbato sotto l'altezza EG dell' acqua influente ed HG dell' acqua recipiente sopra la comune soglia CD.

Si chiami L la larghezza $CD = AB$ del lume, e come qui innanzi $EG = H$, $HG = H'$, $EF = b$, $HF = b'$. Sarà $L = 2y$ l'equazione alla figura. Essendo (Mem. preced. §. XVI.)

$$(P) \dots\dots\dots \frac{4462 L}{375} (H\sqrt{H} - b\sqrt{b})$$

la quantità di liquore che somministrerebbe l' influente se fosse libero sotto l'altezza EG in un minuto secondo, e

$$(Q) \dots\dots\dots \frac{4462 L}{375} (H'\sqrt{H'} - b'\sqrt{b'})$$

quella che farebbe somministrata contrariamente in pari tempo dal recipiente se fosse libero sotto l'altezza HG , sarà l'effettiva copia di acqua uscente in un secondo di tempo dalla luce $ACDB$ di moto perturbato (§. XXVI.) espressa dalla forma seguente

$$(R) \dots\dots\dots \frac{4462 L}{375} (H\sqrt{H} - H'\sqrt{H'} + b'\sqrt{b'} - b\sqrt{b})$$

Il che ecc.

§. XXX.

La formula (R) serve generalmente così per le bocche a flusso perturbato, come per le bocche a flusso libero. Basta che per queste si ponga $H' = 0$, $b' = 0$, e la forma si riduce all'ordinaria che abbiamo trovato per le luci libere. Non serve pertanto, che nuove avvertenze si aggiungano per l'idrometra pratico a quelle che si sono insinuate nella Memo-
Tom. V. V v

ria precedente. Qualora riconosca, il che sarà non tanto di rado, che non solamente la luce dinanzi alla cateratta sia sommersa, com'esser deve, ma l'ento eziandio nella parte opposta stia sepolto sott'acqua, non ha che a far uso della formula (R), la quale non involge maggior difficoltà dell'altra a luce libera, sicchè non è mestieri d'illustrarla con esempj bastando gli addotti nella Memoria precedente.

Seguono le Tavole.

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1	1 00	37	— 6 08	73	— 8 52
2	— 1 41	38	— 6 16	74	— 8 6
3	— 1 73	39	— 6 24	75	— 8 66
4	2 00	40	— 6 32	76	— 8 72
5	— 2 24	41	— 6 40	77	— 8 77
6	— 2 45	42	— 6 48	78	— 8 82
7	— 2 65	43	— 6 56	79	— 8 87
8	— 2 83	44	— 6 63	80	— 8 94
9	3 00	45	— 6 71	81	— 9 00
10	— 3 16	46	— 6 78	82	— 9 06
11	— 3 32	47	— 6 86	83	— 9 11
12	— 3 46	48	— 6 93	84	— 9 17
13	— 3 61	49	— 7 00	85	— 9 22
14	— 3 74	50	— 7 07	86	— 9 27
15	— 3 87	51	— 7 14	87	— 9 33
16	4 00	52	— 7 21	88	— 9 39
17	— 4 12	53	— 7 28	89	— 9 43
18	— 4 24	54	— 7 35	90	— 9 49
19	— 4 36	55	— 7 42	91	— 9 54
20	— 4 47	56	— 7 48	92	— 9 59
21	— 4 58	57	— 7 55	93	— 9 64
22	— 4 69	58	— 7 62	94	— 9 70
23	— 4 80	59	— 7 68	95	— 9 75
24	— 4 90	60	— 7 75	96	— 9 80
25	5 00	61	— 7 81	97	— 9 85
26	— 5 10	62	— 7 87	98	— 9 91
27	— 5 20	63	— 7 94	99	— 9 95
28	— 5 29	64	— 8 00	100	— 10 00
29	— 5 39	65	— 8 06	101	— 10 05
30	— 5 48	66	— 8 12	102	— 10 10
31	— 5 57	67	— 8 19	103	— 10 15
32	— 5 66	68	— 8 24	104	— 10 20
33	— 5 74	69	— 8 31	105	— 10 25
34	— 5 83	70	— 8 37	106	— 10 30
35	— 5 92	71	— 8 43	107	— 10 34
36	6 00	72	— 8 49	108	— 10 39

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
109	— 10 44	145	— 12 04	181	— 13 45
110	+ 10 49	146	— 12 08	182	— 13 49
111	+ 10 54	147	— 12 12	183	+ 13 53
112	+ 10 58	148	+ 12 17	184	— 13 56
113	— 10 63	149	+ 12 21	185	— 13 60
114	+ 10 68	150	+ 12 25	186	+ 13 64
115	— 10 70	151	+ 12 29	187	— 13 67
116	— 10 77	152	+ 12 33	188	— 13 71
117	+ 10 82	153	+ 12 37	189	+ 13 75
118	— 10 86	154	+ 12 41	190	— 13 78
119	+ 10 91	155	+ 12 45	191	— 13 82
120	— 10 95	156	+ 12 49	192	+ 13 86
121	— 11 00	157	+ 12 53	193	— 13 89
122	+ 11 05	158	+ 12 57	194	+ 13 93
123	— 11 09	159	+ 12 61	195	— 13 96
124	+ 11 14	160	+ 12 65	196	— 14 00
125	— 11 18	161	+ 12 69	197	+ 14 04
126	— 11 22	162	+ 12 73	198	— 14 07
127	+ 11 27	163	+ 12 77	199	+ 14 11
128	— 11 31	164	+ 12 81	200	— 14 14
129	+ 11 36	165	+ 12 85	201	— 14 18
130	— 11 40	166	— 12 88	202	— 14 21
131	+ 11 45	167	— 12 92	203	— 14 25
132	+ 11 49	168	— 12 96	204	— 14 28
133	— 11 53	169	— 13 00	205	+ 14 32
134	+ 11 58	170	+ 13 04	206	— 14 35
135	+ 11 62	171	+ 13 08	207	+ 14 39
136	— 11 66	172	— 13 11	208	— 14 42
137	— 11 70	173	— 13 15	209	+ 14 46
138	+ 11 75	174	— 13 19	210	— 14 49
139	+ 11 79	175	+ 13 23	211	+ 14 53
140	— 11 83	176	+ 13 27	212	— 14 56
141	— 11 87	177	— 13 30	213	— 14 59
142	+ 11 92	178	— 13 34	214	+ 14 63
143	+ 11 96	179	+ 13 38	215	— 14 66
144	— 12 00	180	+ 13 42	216	+ 14 70

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
217	— 14 73	253	+ 15 91	289	17 00
218	— 14 76	254	+ 15 94	290	+ 17 03
219	+ 14 80	255	+ 15 97	291	+ 17 06
220	— 14 83	256	16 00	292	+ 17 09
221	+ 14 87	257	— 16 03	293	+ 17 12
222	+ 14 90	258	— 16 06	294	+ 17 15
223	— 14 93	259	— 16 09	295	+ 17 18
224	+ 14 97	260	— 16 12	296	— 17 20
225	15 00	261	+ 16 16	297	— 17 23
226	— 15 03	262	+ 16 19	298	— 17 26
227	+ 15 07	263	+ 16 22	299	— 17 29
228	+ 15 10	264	+ 16 25	300	— 17 32
229	— 15 13	265	+ 16 28	301	+ 17 35
230	+ 15 17	266	— 16 30	302	+ 17 38
231	+ 15 20	267	— 16 34	303	+ 17 41
232	— 15 23	268	— 16 37	304	+ 17 44
233	— 15 26	269	— 16 40	305	— 17 46
234	+ 15 30	270	— 16 43	306	— 17 49
235	+ 15 33	271	— 16 46	307	— 17 52
236	— 15 36	272	— 16 49	308	+ 17 55
237	— 15 39	273	— 16 52	309	+ 17 58
238	+ 15 43	274	— 16 55	310	+ 17 61
239	+ 15 46	275	— 16 58	311	+ 17 64
240	— 15 49	276	— 16 61	312	— 17 66
241	— 15 52	277	— 16 64	313	— 17 69
242	+ 15 56	278	— 16 67	314	— 17 73
243	+ 15 59	279	— 16 70	315	+ 17 75
244	— 15 62	280	— 16 73	316	+ 17 78
245	— 15 65	281	— 16 76	317	— 17 80
246	— 15 68	282	— 16 79	318	— 17 83
247	+ 15 72	283	— 16 82	319	— 17 86
248	+ 15 75	284	— 16 85	320	+ 17 89
249	+ 15 78	285	— 16 88	321	— 17 92
250	— 15 81	286	— 16 91	322	— 17 94
251	— 15 84	287	— 16 94	323	— 17 97
252	+ 15 88	288	— 16 97	324	18 00

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
325	+ 18 03	361	19 00	397	- 19 92
326	+ 18 06	362	+ 19 03	398	+ 19 95
327	- 18 08	363	- 19 05	399	- 19 97
328	- 18 11	364	+ 19 08	400	20 00
329	+ 18 14	365	- 19 10	401	- 20 02
330	+ 18 17	366	- 19 13	402	+ 20 05
331	- 18 19	367	+ 19 16	403	- 20 07
332	- 18 22	368	- 19 18	404	+ 20 10
333	+ 18 25	369	+ 19 21	405	- 20 12
334	+ 18 27	370	+ 19 24	406	+ 20 15
335	- 18 30	371	- 19 26	407	- 20 17
336	- 18 33	372	+ 19 29	408	+ 20 20
337	+ 18 36	373	- 19 31	409	- 20 22
338	- 18 38	374	+ 19 34	410	+ 20 25
339	- 18 41	375	+ 19 37	411	- 20 27
340	+ 18 44	376	- 19 39	412	+ 20 30
341	+ 18 47	377	+ 19 42	413	- 20 32
342	- 18 49	378	- 19 44	414	+ 20 35
343	- 18 52	379	+ 19 47	415	- 20 37
344	+ 18 55	380	- 19 49	416	+ 20 40
345	- 18 57	381	+ 19 52	417	- 20 42
346	- 18 60	382	- 19 54	418	+ 20 45
347	+ 18 63	383	- 19 57	419	+ 20 47
348	- 18 65	384	+ 19 60	420	- 20 49
349	- 18 68	385	- 19 62	421	+ 20 52
350	+ 18 71	386	+ 19 65	422	- 20 54
351	+ 18 74	387	- 19 67	423	+ 20 57
352	- 18 76	388	- 19 69	424	- 20 59
353	+ 18 79	389	+ 19 72	425	+ 20 62
354	+ 18 82	390	+ 19 75	426	+ 20 64
355	- 18 84	391	- 19 77	427	- 20 66
356	+ 18 87	392	+ 19 80	428	+ 20 69
357	- 18 89	393	- 19 82	429	- 20 71
358	- 18 92	394	+ 19 85	430	+ 20 74
359	+ 18 95	395	- 19 87	431	- 20 76
360	- 18 97	396	+ 19 90	432	- 20 78

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
433	+ 20 81	469	+ 21 66	505	— 22 47
434	— 20 83	470	+ 21 68	506	— 22 49
435	+ 20 86	471	— 21 70	507	+ 22 52
436	— 20 88	472	+ 21 73	508	+ 22 54
437	— 20 90	473	+ 21 75	509	— 22 56
438	+ 20 93	474	— 21 77	510	— 22 58
439	— 20 95	475	+ 21 79	511	+ 22 61
440	+ 20 98	476	+ 21 82	512	+ 22 63
441	— 21 00	477	— 21 84	513	+ 22 65
442	— 21 02	478	— 21 86	514	— 22 67
443	+ 21 05	479	+ 21 89	515	— 22 69
444	— 21 07	480	+ 21 91	516	+ 22 72
445	+ 21 10	481	— 21 93	517	+ 22 74
446	+ 21 12	482	— 21 95	518	+ 22 76
447	— 21 14	483	+ 21 98	519	— 22 78
448	+ 21 17	484	— 22 00	520	— 22 80
449	+ 21 19	485	— 22 02	521	+ 22 83
450	— 21 21	486	+ 22 05	522	+ 22 85
451	+ 21 24	487	+ 22 07	523	+ 22 87
452	— 21 26	488	— 22 09	524	— 22 89
453	— 21 28	489	— 22 11	525	— 22 91
454	+ 21 31	490	+ 22 14	526	— 22 93
455	— 21 33	491	+ 22 16	527	+ 22 96
456	— 21 35	492	— 22 18	528	+ 22 98
457	+ 21 38	493	— 22 20	529	— 23 00
458	— 21 40	494	+ 22 23	530	— 23 02
459	— 21 42	495	+ 22 25	531	— 23 04
460	+ 21 45	496	— 22 27	532	+ 23 07
461	— 21 47	497	— 22 29	533	+ 23 09
462	— 21 49	498	+ 22 32	534	+ 23 11
463	+ 21 52	499	+ 22 34	535	— 23 13
464	— 21 54	500	— 22 36	536	— 23 15
465	— 21 56	501	— 22 38	537	— 23 17
466	+ 21 59	502	+ 22 41	538	+ 23 20
467	— 21 61	503	+ 22 43	539	+ 23 22
468	— 21 63	504	+ 22 45	540	+ 23 24

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
541	+ 23 26	577	— 24 02	613	+ 24 76
542	— 23 28	578	— 24 04	614	+ 24 78
543	— 23 30	579	— 24 06	615	+ 24 80
544	— 23 32	580	— 24 08	616	+ 24 82
545	+ 23 35	581	— 24 10	617	+ 24 84
546	+ 23 37	582	— 24 11	618	+ 24 86
547	+ 23 39	583	— 24 12	619	+ 24 88
548	+ 23 41	584	+ 24 15	620	+ 24 90
549	— 23 43	585	+ 24 17	621	+ 24 92
550	— 23 45	586	+ 24 19	622	+ 24 94
551	— 23 47	587	+ 24 21	623	+ 24 96
552	— 23 49	588	+ 24 23	624	+ 24 98
553	+ 23 52	589	+ 24 25	625	25 00
554	+ 23 54	590	+ 24 27	626	+ 25 02
555	+ 23 56	591	+ 24 29	627	+ 25 04
556	+ 23 58	592	— 24 31	628	+ 25 06
557	— 23 60	593	— 24 33	629	+ 25 08
558	— 23 62	594	— 24 35	630	+ 25 10
559	— 23 64	595	— 24 37	631	+ 25 12
560	— 23 66	596	— 24 39	632	+ 25 14
561	+ 23 69	597	— 24 41	633	+ 25 16
562	+ 23 71	598	— 24 43	634	+ 25 18
563	+ 23 73	599	— 24 45	635	+ 25 20
564	+ 23 75	600	— 24 47	636	+ 25 22
565	+ 23 77	601	— 24 49	637	+ 25 24
566	— 23 79	602	+ 24 52	638	+ 25 26
567	— 23 81	603	+ 24 54	639	+ 25 28
568	— 23 83	604	+ 24 56	640	+ 25 30
569	— 23 85	605	+ 24 58	641	+ 35 32
570	— 23 87	606	+ 24 60	642	+ 25 34
571	+ 23 90	607	+ 24 62	643	+ 25 36
572	+ 23 92	608	+ 24 64	644	+ 25 38
573	+ 23 94	609	+ 24 68	645	+ 25 40
574	+ 23 96	610	+ 24 70	646	+ 25 42
575	+ 23 98	611	+ 24 72	647	+ 25 44
576	24 00	612	+ 24 74	648	+ 25 46

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
649	+ 25 48	685	— 26 17	721	— 26 85
650	+ 25 50	686	— 26 19	722	— 26 87
651	— 25 51	687	— 26 21	723	+ 26 89
652	— 25 53	688	+ 26 23	724	+ 26 91
653	— 25 55	689	+ 26 25	725	+ 26 93
654	— 25 57	690	+ 26 27	726	— 26 94
655	— 25 59	691	+ 26 29	727	— 26 96
656	— 25 61	692	+ 26 31	728	— 26 98
657	— 25 63	693	— 26 32	729	27 00
658	— 25 65	694	— 26 34	730	+ 27 02
659	— 25 67	695	— 26 36	731	+ 27 04
660	— 25 69	696	— 26 38	732	+ 27 06
661	+ 25 71	697	— 26 40	733	— 27 07
662	+ 25 73	698	+ 26 42	734	— 27 09
663	+ 25 75	699	+ 26 44	735	— 27 11
664	+ 25 77	700	+ 26 46	736	+ 27 13
665	+ 25 79	701	+ 26 48	737	+ 27 15
666	+ 25 81	702	+ 26 50	738	+ 27 17
667	+ 25 83	703	— 26 51	739	— 27 18
668	+ 25 85	704	— 26 53	740	— 27 20
669	+ 25 87	705	— 26 55	741	— 27 22
670	— 25 88	706	— 26 57	742	+ 27 24
671	— 25 90	707	+ 26 59	743	+ 27 26
672	— 25 92	708	+ 26 61	744	+ 27 28
673	— 25 94	709	+ 26 63	745	— 27 29
674	— 25 96	710	+ 26 65	746	— 27 31
675	— 25 98	711	— 26 66	747	— 27 33
676	26 00	712	— 26 68	748	+ 27 35
677	+ 26 02	713	— 26 70	749	+ 27 37
678	+ 26 04	714	— 26 72	750	+ 27 39
679	+ 26 06	715	+ 26 74	751	— 27 40
680	+ 26 08	716	+ 26 76	752	— 27 42
681	+ 26 10	717	+ 26 78	753	— 27 44
682	+ 26 12	718	+ 26 80	754	+ 27 46
683	— 26 13	719	— 26 81	755	+ 27 48
684	— 26 15	720	— 26 83	756	— 27 49

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
757	— 27 51	793	— 28 16	829	— 28 79
758	— 27 53	794	† 28 18	830	† 28 81
759	† 27 55	795	† 28 20	831	† 28 83
760	† 27 57	796	— 28 21	832	— 28 84
761	† 27 59	797	— 28 23	833	— 28 86
762	— 27 60	798	† 28 25	834	† 28 88
763	— 27 62	799	† 28 27	835	† 28 90
764	— 27 64	800	— 28 28	836	— 28 91
765	† 27 66	801	— 28 30	837	— 28 93
766	† 27 68	802	† 28 32	838	† 28 95
767	— 27 69	803	† 28 34	839	† 28 97
768	— 27 71	804	— 28 35	840	— 28 98
769	— 27 73	805	— 28 37	841	— 29 00
770	† 27 75	806	— 29 39	842	† 29 02
771	† 27 77	807	† 28 41	843	— 29 03
772	† 27 79	808	† 28 43	844	— 29 05
773	— 27 80	809	— 28 44	845	† 29 07
774	— 27 82	810	— 28 46	846	† 29 09
775	† 27 84	811	† 28 48	847	— 29 10
776	† 27 86	812	† 28 50	848	— 29 12
777	— 27 87	813	— 28 51	849	† 29 14
778	— 27 88	814	— 28 53	850	— 29 15
779	— 27 91	815	† 28 55	851	— 29 17
780	† 27 93	816	† 28 57	852	† 29 19
781	† 27 95	817	— 28 58	853	† 29 21
782	— 27 96	818	— 28 60	854	— 29 22
783	— 27 98	819	† 28 62	855	— 29 24
784	— 28 00	820	† 28 64	856	† 29 26
785	† 28 02	821	— 28 65	857	— 29 27
786	† 28 04	822	— 28 67	858	— 29 29
787	† 28 05	823	† 28 69	859	† 29 31
788	— 28 07	824	† 28 71	860	† 29 33
789	† 28 09	825	— 28 72	861	— 29 34
790	† 28 11	826	— 28 74	862	† 29 36
791	— 28 12	827	† 28 76	863	† 29 38
792	— 28 14	828	— 28 77	864	— 29 39

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
865	— 29 41	901	+ 30 02	937	— 30 61
866	+ 29 43	902	— 30 03	938	+ 30 63
867	— 29 44	903	+ 30 05	939	— 30 64
868	— 29 46	904	+ 30 07	940	+ 30 66
869	+ 29 48	905	— 30 08	941	+ 30 68
870	+ 29 50	906	+ 30 10	942	— 30 69
871	— 29 51	907	+ 30 12	943	+ 30 71
872	+ 29 53	908	— 30 13	944	— 30 72
873	+ 29 55	909	+ 30 15	945	— 30 74
874	— 29 56	910	+ 30 17	946	+ 30 76
875	— 29 58	911	— 30 18	947	— 30 77
876	+ 29 60	912	+ 30 20	948	+ 30 79
877	— 29 61	913	+ 30 22	949	+ 30 81
878	— 29 63	914	— 30 23	950	— 30 82
879	+ 29 65	915	+ 30 25	951	+ 30 84
880	— 29 66	916	+ 30 27	952	— 30 85
881	— 29 68	917	— 30 28	953	— 30 87
882	+ 29 70	918	+ 30 30	954	+ 30 89
883	+ 29 72	919	+ 30 32	955	— 30 90
884	— 29 73	920	— 30 33	956	+ 30 92
885	+ 29 75	921	+ 30 35	957	+ 30 94
886	+ 29 77	922	— 30 36	958	— 30 95
887	— 29 78	923	— 30 38	959	+ 30 97
888	+ 29 80	924	+ 30 40	960	— 30 98
889	+ 29 82	925	— 30 41	961	31 00
890	— 29 83	926	— 30 43	962	+ 31 02
891	+ 29 85	927	+ 30 45	963	— 31 03
892	+ 29 87	928	— 30 46	964	+ 31 05
893	— 29 88	929	+ 30 48	965	— 31 06
894	+ 29 90	930	+ 30 50	966	— 31 08
895	— 29 92	931	— 30 51	967	+ 31 10
896	+ 29 93	932	+ 30 53	968	— 31 11
897	+ 29 95	933	+ 30 55	969	+ 31 13
898	— 29 96	934	— 30 56	970	— 31 14
899	— 29 98	935	+ 30 58	971	+ 31 16
900	30 00	936	— 30 59	972	+ 31 17

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
973	— 31 19	1009	— 31 76	1045	+ 32 33
974	+ 31 21	1010	— 31 78	1046	— 32 34
975	— 31 22	1011	+ 31 80	1047	+ 32 36
976	— 31 24	1012	— 31 81	1048	— 32 37
977	+ 31 26	1013	— 31 83	1049	+ 32 39
978	— 31 27	1014	— 31 84	1050	— 32 40
979	+ 31 29	1015	+ 31 86	1051	+ 32 42
980	— 31 30	1016	— 31 87	1052	— 32 43
981	+ 31 32	1017	— 31 89	1053	+ 32 45
982	— 31 34	1018	+ 31 91	1054	+ 32 47
983	+ 31 35	1019	— 31 92	1055	— 32 48
984	— 31 37	1020	+ 31 94	1056	+ 32 50
985	— 31 38	1021	— 31 95	1057	— 32 51
986	— 31 40	1022	+ 31 97	1058	+ 32 53
987	+ 31 42	1023	— 31 98	1059	— 32 54
988	— 31 43	1024	32 00	1060	+ 32 56
989	+ 31 45	1025	+ 32 02	1061	— 32 57
990	— 31 46	1026	— 32 03	1062	+ 32 59
991	— 31 48	1027	+ 32 05	1063	— 32 60
992	+ 31 50	1028	— 32 06	1064	+ 32 62
993	— 31 51	1029	+ 32 08	1065	— 32 63
994	+ 31 53	1030	— 32 09	1066	+ 32 65
995	— 31 54	1031	+ 32 11	1067	— 32 66
996	+ 31 56	1032	— 32 12	1068	— 32 68
997	+ 31 58	1033	— 32 14	1069	+ 32 70
998	— 31 59	1034	+ 32 16	1070	— 32 71
999	+ 31 61	1035	— 32 17	1071	+ 32 73
1000	— 31 62	1036	+ 32 19	1072	— 32 74
1001	+ 31 64	1037	— 32 20	1073	— 32 76
1002	— 31 65	1038	+ 32 22	1074	+ 32 77
1003	— 31 67	1039	— 32 23	1075	— 32 79
1004	+ 31 69	1040	+ 32 25	1076	+ 32 80
1005	— 31 70	1041	— 32 26	1077	+ 32 82
1006	+ 31 72	1042	— 32 28	1078	— 32 83
1007	— 31 73	1043	+ 32 30	1079	+ 32 85
1008	+ 31 75	1044	— 32 31	1080	— 32 86

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1081	+ 32 88	1117	- 33 42	1153	+ 33 96
1082	- 32 89	1118	+ 33 44	1154	- 33 97
1083	+ 32 91	1119	- 33 45	1155	+ 33 99
1084	- 32 92	1120	+ 33 47	1156	34 00
1085	+ 32 94	1121	- 33 48	1157	- 34 01
1086	- 32 95	1122	+ 33 50	1158	+ 34 03
1087	+ 32 97	1123	- 33 51	1159	- 34 04
1088	- 32 98	1124	+ 33 53	1160	+ 34 06
1089	33 00	1125	- 33 54	1161	- 34 07
1090	+ 33 02	1126	+ 33 56	1162	+ 34 09
1091	- 33 03	1127	- 33 57	1163	- 34 10
1092	+ 33 05	1128	+ 33 59	1164	+ 34 12
1093	- 33 06	1129	- 33 60	1165	- 34 13
1094	+ 33 08	1130	+ 33 62	1166	+ 34 15
1095	- 33 09	1131	- 33 63	1167	- 34 16
1096	+ 33 11	1132	+ 33 65	1168	+ 34 18
1097	- 33 12	1133	- 33 66	1169	- 34 19
1098	+ 33 14	1134	- 33 67	1170	+ 34 21
1099	- 33 15	1135	+ 33 69	1171	+ 34 22
1100	+ 33 17	1136	- 33 70	1172	- 34 23
1101	- 33 18	1137	+ 33 72	1173	+ 34 25
1102	+ 33 20	1138	- 33 73	1174	- 34 26
1103	- 33 21	1139	+ 33 75	1175	+ 34 28
1104	+ 33 23	1140	- 33 76	1176	- 34 29
1105	- 33 24	1141	+ 33 78	1177	+ 34 31
1106	+ 33 26	1142	- 33 79	1178	- 34 32
1107	- 33 27	1143	+ 33 81	1179	+ 34 34
1108	+ 33 29	1144	- 33 82	1180	- 34 35
1109	- 33 30	1145	+ 33 84	1181	+ 34 37
1110	+ 33 32	1146	- 33 85	1182	- 34 38
1111	+ 33 33	1147	+ 33 87	1183	- 34 39
1112	+ 33 35	1148	- 33 88	1184	+ 34 41
1113	- 33 36	1149	+ 33 90	1185	- 34 42
1114	+ 32 38	1150	- 33 91	1186	+ 34 44
1115	- 33 39	1151	+ 33 93	1187	- 34 45
1116	+ 33 41	1152	- 33 94	1188	+ 34 47

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1189	— 34 48	1225	35 00	1261	— 35 51
1190	+ 34 50	1226	— 35 01	1262	— 35 52
1191	— 34 51	1227	+ 35 03	1263	+ 35 54
1192	+ 34 53	1228	— 35 04	1264	— 35 55
1193	+ 34 54	1229	+ 35 06	1265	+ 35 57
1194	— 34 56	1230	— 35 07	1266	— 35 58
1195	+ 34 57	1231	+ 35 09	1267	— 35 59
1196	— 34 58	1232	+ 35 10	1268	+ 35 61
1197	+ 34 60	1233	— 35 11	1269	— 35 62
1198	— 34 61	1234	+ 35 13	1270	+ 35 64
1199	+ 34 63	1235	— 35 14	1271	— 35 65
1200	— 34 64	1236	+ 35 16	1272	+ 35 67
1201	+ 34 66	1237	— 35 17	1273	+ 35 68
1202	+ 34 67	1238	+ 35 19	1274	— 35 69
1203	+ 34 68	1239	+ 35 20	1275	+ 35 71
1204	— 34 70	1240	— 35 21	1276	— 35 72
1205	— 34 71	1241	+ 35 23	1277	+ 35 74
1206	+ 34 73	1242	— 35 24	1278	+ 35 75
1207	— 34 74	1243	+ 35 26	1279	— 35 76
1208	+ 34 76	1244	— 35 27	1280	+ 35 78
1209	— 34 77	1245	— 35 28	1281	— 35 79
1210	+ 34 79	1246	+ 35 30	1282	+ 35 81
1211	+ 34 80	1247	— 35 31	1283	+ 35 82
1212	— 34 81	1248	+ 35 33	1284	— 35 83
1213	+ 33 83	1249	— 35 34	1285	+ 35 85
1214	— 34 84	1250	+ 35 36	1286	— 35 86
1215	+ 34 86	1251	+ 35 37	1287	— 35 87
1216	— 34 87	1252	— 35 38	1288	+ 35 89
1217	+ 34 89	1253	+ 35 40	1289	— 35 90
1218	+ 34 90	1254	— 35 41	1290	+ 35 92
1219	— 34 91	1255	+ 35 43	1291	— 35 93
1220	+ 34 93	1256	— 35 44	1292	— 35 94
1221	— 34 94	1257	— 35 45	1293	+ 35 96
1222	+ 34 96	1258	+ 35 47	1294	— 35 97
1223	— 34 97	1259	— 35 48	1295	+ 35 99
1224	+ 34 99	1260	+ 35 50	1296	36 00

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1297	— 36 01	1333	— 36 51	1369	37 00
1298	+ 36 03	1334	— 36 52	1370	— 37 01
1299	— 36 04	1335	+ 36 54	1371	+ 37 03
1300	+ 36 05	1336	+ 36 55	1372	— 37 04
1301	+ 36 07	1337	+ 36 57	1373	— 37 05
1302	— 36 08	1338	+ 36 58	1374	+ 37 07
1303	+ 36 10	1339	— 36 59	1375	— 37 08
1304	— 36 11	1340	+ 36 61	1376	— 37 09
1305	+ 36 13	1341	+ 36 62	1377	+ 37 11
1306	+ 36 14	1342	— 36 63	1378	— 37 12
1307	— 36 15	1343	+ 36 65	1379	— 37 13
1308	+ 36 17	1344	— 36 66	1380	+ 37 15
1309	— 36 18	1345	— 36 67	1381	— 37 16
1310	— 36 19	1346	+ 36 69	1382	+ 37 18
1311	+ 36 21	1347	— 36 70	1383	+ 37 19
1312	— 36 22	1348	— 36 71	1384	— 37 20
1313	+ 36 24	1349	+ 35 73	1385	+ 37 22
1314	+ 36 25	1350	— 36 74	1386	+ 37 23
1315	— 36 26	1351	+ 36 76	1387	— 37 24
1316	+ 36 28	1352	+ 36 77	1388	+ 37 26
1317	— 36 29	1353	— 36 78	1389	+ 37 27
1318	— 36 30	1354	+ 36 80	1390	— 37 28
1319	+ 36 32	1355	— 36 81	1391	+ 37 30
1320	— 36 33	1356	— 36 82	1392	+ 37 31
1321	+ 36 35	1357	+ 36 84	1393	— 37 32
1322	+ 36 36	1358	— 36 85	1394	+ 37 34
1323	— 36 37	1359	— 36 86	1395	+ 37 35
1324	+ 36 39	1360	+ 36 88	1396	+ 37 36
1325	— 36 40	1361	— 36 89	1397	+ 37 38
1326	— 36 41	1362	+ 36 91	1398	+ 37 39
1327	+ 36 43	1393	+ 36 92	1399	— 37 40
1328	— 36 44	1364	— 36 93	1400	+ 37 42
1329	+ 36 46	1365	+ 36 95	1401	+ 37 43
1330	+ 36 47	1366	+ 36 96	1402	— 37 44
1331	— 36 48	1367	+ 36 97	1403	+ 37 46
1332	+ 36 50	1368	+ 36 99	1404	+ 37 47

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1405	— 37 48	1441	— 37 96	1477	— 38 43
1406	† 37 50	1442	— 37 97	1478	— 38 44
1407	— 37 51	1443	† 37 99	1479	† 38 46
1408	— 37 52	1444	38 00	1480	— 38 47
1409	† 37 54	1445	— 38 01	1481	— 38 48
1410	† 37 55	1446	† 38 03	1482	† 38 50
1411	— 37 56	1447	† 38 04	1483	† 38 51
1412	† 37 58	1448	— 38 05	1484	— 38 52
1413	† 35 59	1449	† 38 07	1485	† 38 54
1414	— 37 60	1450	† 38 08	1486	† 38 55
1415	† 37 62	1451	— 38 09	1487	— 38 56
1416	† 37 63	1452	† 38 11	1488	— 38 57
1417	— 37 64	1453	† 38 12	1489	† 38 59
1418	† 37 66	1454	— 38 13	1490	— 38 60
1419	† 37 67	1455	— 38 14	1491	— 38 61
1420	— 37 68	1456	† 38 16	1492	† 38 63
1421	† 37 70	1457	— 38 17	1493	† 38 64
1422	† 57 71	1458	— 38 18	1494	— 38 65
1423	— 37 72	1459	† 38 20	1495	† 38 67
1424	† 37 74	1460	† 38 21	1496	† 38 68
1425	† 37 75	1461	— 38 22	1497	— 38 69
1426	— 37 76	1462	† 38 24	1498	— 38 70
1427	† 37 78	1463	† 38 25	1499	† 38 72
1428	† 37 79	1464	— 38 26	1500	† 38 73
1429	— 37 80	1465	† 38 28	1501	— 38 74
1430	† 37 82	1466	† 38 29	1502	† 38 76
1431	† 37 83	1467	— 38 30	1503	† 38 77
1432	— 37 84	1468	— 38 31	1504	— 38 78
1433	— 37 85	1469	† 38 33	1505	— 38 79
1434	† 37 87	1470	— 38 34	1506	† 38 81
1435	— 37 88	1471	— 38 35	1507	— 38 82
1436	— 37 89	1472	† 38 37	1508	— 38 83
1437	† 37 91	1473	† 38 38	1509	† 38 85
1438	— 37 92	1474	— 38 39	1510	† 38 86
1439	— 37 93	1475	† 38 41	1511	— 38 87
1440	† 37 95	1476	† 38 42	1512	— 38 88

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1513	+ 38 90	1549	+ 39 36	1585	— 39 81
1514	— 38 91	1550	— 39 37	1586	— 39 82
1515	— 38 92	1551	— 39 38	1587	+ 39 84
1516	+ 38 94	1552	+ 39 40	1588	+ 39 85
1517	+ 38 95	1553	+ 39 41	1589	— 39 86
1518	— 38 96	1554	— 39 42	1590	— 39 87
1519	— 38 97	1555	— 39 43	1591	+ 39 89
1520	+ 38 99	1556	+ 39 45	1592	+ 39 90
1521	— 39 00	1557	+ 39 46	1593	— 39 91
1522	— 39 01	1558	— 39 47	1594	— 39 92
1523	+ 39 03	1559	— 39 48	1595	+ 39 94
1524	— 39 04	1560	+ 39 50	1596	+ 39 95
1525	— 39 05	1561	+ 39 51	1597	— 39 96
1526	— 39 06	1562	— 39 52	1598	— 39 97
1527	+ 39 08	1563	— 39 53	1599	+ 39 99
1528	+ 39 09	1564	+ 39 55	1600	40 00
1529	— 39 10	1565	— 39 56	1601	— 40 01
1530	+ 39 12	1566	— 39 57	1602	— 40 02
1531	+ 39 13	1567	+ 39 59	1603	+ 40 04
1532	— 39 14	1568	+ 39 60	1604	+ 40 05
1533	— 39 15	1569	— 39 61	1605	— 40 06
1534	+ 39 17	1570	— 39 62	1606	— 40 07
1535	+ 39 18	1571	+ 39 64	1607	+ 40 09
1536	— 39 19	1572	+ 39 65	1608	+ 40 10
1537	— 39 20	1573	— 39 66	1609	— 40 11
1538	+ 39 22	1574	— 39 67	1610	— 40 12
1539	— 39 23	1575	— 39 69	1611	+ 40 14
1540	— 39 24	1576	+ 39 70	1612	+ 40 15
1541	+ 39 26	1577	— 39 71	1613	— 40 16
1542	+ 39 27	1578	— 39 72	1614	— 40 17
1543	— 39 28	1579	+ 39 74	1615	+ 40 19
1544	— 39 29	1580	+ 39 75	1616	+ 40 20
1545	+ 39 31	1581	— 39 76	1617	— 40 21
1546	+ 39 32	1582	— 39 77	1618	— 40 22
1547	— 39 33	1583	+ 39 79	1619	+ 40 24
1548	— 39 34	1584	+ 39 80	1620	+ 40 25

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1621	— 40 26	1657	+ 40 71	1693	+ 41 15
1622	— 40 27	1658	+ 40 72	1694	+ 41 16
1623	+ 40 29	1659	— 40 73	1695	— 41 17
1624	+ 40 30	1660	— 40 74	1696	— 41 18
1625	— 49 31	1661	+ 40 76	1697	— 41 19
1626	— 40 32	1662	+ 40 77	1698	+ 41 21
1627	+ 40 34	1663	+ 40 78	1699	+ 41 22
1628	+ 40 35	1664	— 40 79	1700	— 41 23
1629	— 40 36	1665	— 40 80	1701	— 41 24
1630	— 40 37	1666	+ 40 82	1702	+ 41 26
1631	+ 40 39	1667	+ 40 83	1703	+ 41 27
1632	+ 40 40	1668	— 40 84	1704	+ 41 28
1633	— 40 41	1669	— 40 85	1705	— 41 29
1634	— 40 42	1670	+ 40 87	1706	— 41 30
1635	+ 40 44	1671	+ 40 88	1707	+ 41 32
1636	+ 40 45	1672	— 40 89	1708	+ 41 33
1637	+ 40 46	1673	— 40 90	1709	— 41 34
1638	— 40 47	1674	— 40 91	1710	— 41 35
1639	— 40 48	1675	+ 40 93	1711	— 41 36
1640	+ 40 50	1676	+ 40 94	1712	+ 41 38
1641	+ 40 51	1677	— 40 95	1713	+ 41 39
1642	— 40 52	1678	— 40 96	1714	— 41 40
1643	— 40 53	1679	+ 40 98	1715	— 41 41
1644	+ 40 55	1680	+ 40 99	1716	— 41 42
1645	+ 40 56	1681	41 00	1717	+ 41 44
1646	— 40 57	1682	— 41 01	1718	+ 41 45
1647	— 40 58	1683	— 41 02	1719	— 41 46
1648	+ 40 60	1684	+ 41 04	1720	— 41 47
1649	+ 40 61	1685	+ 41 05	1721	— 41 48
1650	— 40 62	1686	— 41 06	1722	+ 41 50
1651	— 40 63	1687	— 41 07	1723	+ 41 51
1652	— 40 64	1688	+ 41 09	1724	— 41 52
1653	+ 40 66	1689	+ 41 10	1725	— 41 53
1654	+ 40 67	1690	+ 41 11	1726	+ 41 55
1655	— 40 68	1691	— 41 12	1727	+ 41 56
1656	— 40 69	1692	— 41 13	1728	+ 41 57

Fig. I.

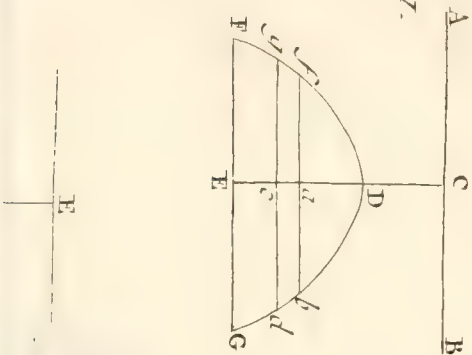


Fig. III.

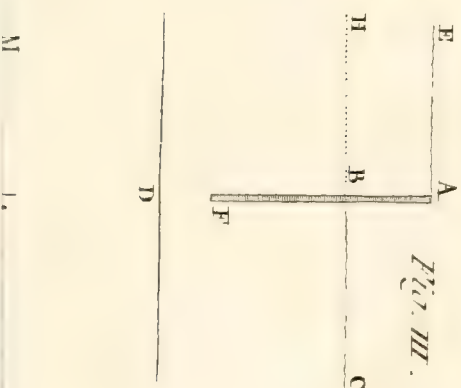


Fig. I.

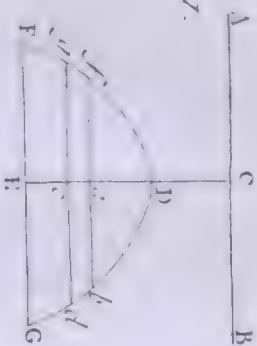


Fig. III.

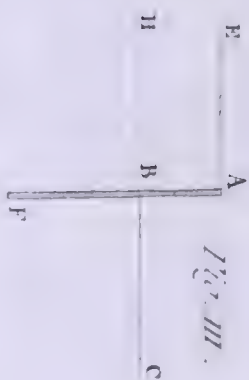
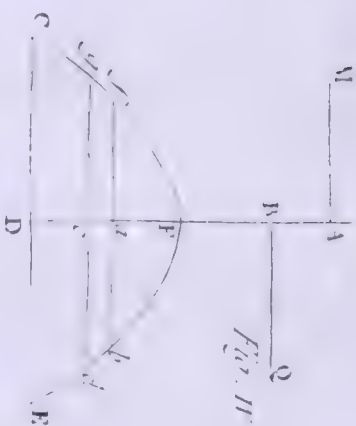


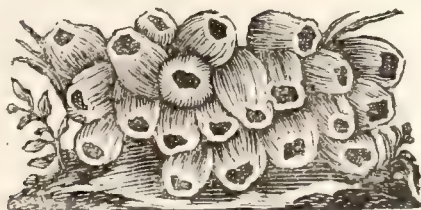
Fig. II.



Fig. IV.



Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1729	— 41 58	1753	+ 41 87	1777	— 42 15
1730	— 41 59	1754	— 41 88	1778	+ 42 17
1731	+ 41 61	1755	— 41 89	1779	+ 42 18
1732	+ 41 62	1756	— 41 90	1780	— 42 19
1733	+ 41 63	1757	+ 41 92	1781	— 42 20
1734	— 41 64	1758	+ 41 93	1782	— 42 21
1735	— 41 65	1759	— 41 94	1783	+ 42 23
1736	+ 41 67	1760	— 41 95	1784	+ 42 24
1737	+ 41 68	1761	— 41 96	1785	+ 42 25
1738	+ 41 69	1762	+ 41 98	1786	— 42 26
1739	— 41 70	1763	+ 41 99	1787	— 42 27
1740	— 41 71	1764	42 00	1788	— 42 28
1741	+ 41 73	1765	— 42 01	1789	+ 42 30
1742	+ 41 74	1766	— 42 02	1790	+ 42 31
1743	+ 41 75	1767	+ 42 04	1791	— 42 32
1744	— 41 76	1768	+ 42 05	1792	— 42 33
1745	— 41 77	1769	+ 42 06	1793	— 42 34
1746	+ 41 79	1770	— 42 07	1794	+ 42 36
1747	+ 41 80	1771	— 42 08	1795	+ 42 37
1748	+ 41 81	1772	+ 42 10	1796	+ 42 38
1749	— 41 82	1773	+ 42 11	1797	— 42 39
1750	— 41 83	1774	+ 42 12	1798	— 42 40
1751	— 41 84	1775	— 42 13	1799	— 42 41
1752	+ 41 86	1776	— 42 14	1800	+ 42 43



DESCRIZIONE

DELL' OSSERVATORIO METEOROLOGICO ERETTO
AL FINE DELL' ANNO 1780

Dal Regio Professore emerito Don PIETRO MOSCATI.

CHe la diligente osservazione delle variazioni atmosferiche in tutto il dettaglio ora chiamato *Meteorologia* molto conferisse ai progressi ed all'utile esercizio della pratica Medicina, ella è cosa stata creduta per fino dai più remoti quasi empirici principj dell'arte. Difatti *Ippocrate* fino dai suoi tempi scrisse, che niuno senza queste nozioni poteva essere buon Medico, poichè non v'era forse malattia che dalla varia azione dell'atmosfera nel nostro corpo origine non avesse (a). *Plinio* seniore nominando diversi venti ne chiama decisamente alcuni salubri, altri perniciosi, parlando come di cosa ai suoi tempi conosciuta da tutti: e di Augusto Cesare si legge, che dimorando nelle Gallie eresse un tempio al turbinoso vento *Circio*, al quale pubbliche feste si facevano e ringraziamenti sebbene alcune case ne fossero qualche volta distrutte, perchè fermamente si credeva doverli al violento soffiare di esso la salubrità del gallico clima (b). Nè solamente l'umana specie risente le variazioni dell'atmosfera; ma par che mostrino chiaramente di risentirsene anche quegli animali che più vicini all'uomo, e più socievoli con esso si lasciano meglio, e più costantemente offer-

(a) *Medicinam quicumque vult recte consequi, cum hoc agere oportet; primum quidem anni tempestates animadvertere; quid harum quæque possit efficere; non enim quidquam habent simile Deinde vero ventos tum calidos tum frigidos, maxime quidem omnibus hominibus com-*

munes; deinde eos qui unicuique regioni sunt vernaculi &c. *Ippocrates de aere aquis, & locis edit. Ren. Carter. T. 6. pag. 187.*

Hinc orationi subiiciendum morbos nunquam vix aliunde quam ab aere oriri posse. Idem de flatibus.

(b) *Seneca quæst. natur. L. 5. Cap. 17.*

vare (a); anzi i vegetabili stessi mostrano la medesima sensibilità (b). Ella è quindi stata ferma opinione ereditaria di molti valenti Medici dopo *Ippocrate*, che si dovessero le variazioni atmosferiche dal pratico Medico osservare con diligenza non solo per contrapporvi sempre le malattie che hanno nello stesso tempo dominato siccome fecero principalmente *Malovin*, *Vwintringam*, *Huxam*, e ricavarne in seguito dei risultati utili all'arte ed alla umanità; ma ancora per regolarli nell'amministrazione de' rimedj, i quali secondo l'osservazione del celebre *Berriat* non agiscono ugualmente, e debbono diversificarsi nelle dosi secondo la diversa altezza del barometro, che è quanto dire secondo il diverso peso dell'atmosfera (c).

Egli è ben vero, che vi sono stati Scrittori di credito, i quali non molto credendo alla influenza delle varietà atmosferiche si sono studiati di provare la poca utilità delle meteorologiche osservazioni applicate alla Medicina, fra i quali debbono leggerli principalmente i discorsi premessi dal dotto Medico il Sig. *Retz* alla sua Bibliografia medica (d); ma oltre a che siamo ancor assai lontani dal vedere con persuasente chiarezza dimostrato questo assunto; oltre a che non si spiegherà facilmente altrimenti il vederli nello stesso tempo in un popoloso Spedale ora tossire forse seicento ammalati sopra mille, ora essere quasi la metà sorpresi da febbri intermittenti, ora dominare quasi generalmente la dissenteria ecc. egli farà sempre vero che questa quistione altronde utilissima ai progressi dell'Arte non potrà mai essere positi-

(a) Veggasi fra gli altri libri il breve ed erudito discorso del Sig. *Tommaso Osman: de præjagiis tempestatis naturalibus* Basileæ 1781.

(b) Veggansi gli Scrittori *rei russicæ*; du Hamel elementi d'agricoltura; Cotte *Meteorologie* che cita varj Autori intorno a questo argomento: Bertolon *électricité des végétaux*, ed *électricité du corps humain*: Gardini *de influxu electricitatis atmosfericæ in vegetantia*. Taurini 1784. *de influxu electricitatis in homine*. Genuæ 1780. &c.

(c) *Memoires presentées à l'Académie des sciences par des Savants étrangers* T. 2. e *Collection Académique* T. 8 dove è stata ristampata la memoria suddetta.

(d) Veggansi i tomi 2. 3. 4. 5. delle *Nouvelles instructives bibliographiques historiques, & critiques de Médecine, Chirurgie & Pharmacie* ecc. 16. Paris chez Mequignon dall'anno 1785 al 1789.

vamente decisa, se non appunto con un lungo paziente, ed esatto parallelo fra le variazioni atmosferiche diligentemente osservate e le malattie che dominato avranno per lo spazio di molti anni in un popolo abitualmente solito nutrirsi vestire abitare lavorare vivere ad un dipresso nello stesso modo, siccome è quello per esempio che abita la nostra ampia ed uniforme pianura.

Molte possono essere le accidentali proprietà dell'atmosfera che possono agire sull'animale organizzazione, fra le quali principalmente le seguenti cioè

1. Il vario peso di essa che ora sorpassa la pressione sul nostro corpo di 37680 libbre; ora non arriva a quella di libbre 35360 con passaggio alcune volte assai celere di questa enorme differenza di peso.

2. La varia temperatura di caldo e freddo, la quale nel nostro paese si osservò balzare dalli gr. 19 in inverno oltre alli 84 in estate del termometro di Farenheit.

3. La siccità ed umidità cotanto fra noi diversa che dalla capacità della secca atmosfera di ricevere ottantasei danari d'acqua per evaporazione di una superficie d'otto pollici quadrati passa fino all'estrema umidità di deporre spontaneamente il proprio elemento acqueo sopra i corpi ad essa esposti.

4. La quiete, ed agitazione dell'aria, che respiriamo, e che ci attornia, la quale agitazione è tanta alcune volte da tenere alzate oltre cento oncie di peso in un anemometro di superficie moltissimo piccola in proporzione dell'area del nostro corpo.

5. La quantità, e durata delle piogge che ha pure una differenza somamente variabile.

6. La quantità e qualità dell'elettricità atmosferica così variabile che dalla totale privazione passa fino alla capacità terribile di fulminare.

Quindi varj e tra di loro diversi debbono essere i meccanismi col mezzo de' quali conoscer si possono tutte le suddette proprietà dell'atmosfera, nell'assortimento de' quali consiste un Gabinetto meteorologico, quale appunto io mi sono per privata mia soddisfazione fatto sul fine dell'anno 1780 in mia casa, e che ora sono per brevemente descrivere. Io

non intendo d'aver fatto l'ottimo, ma solamente di descrivere ciò che ho fatto principalmente per ottenere delle macchine, le quali essendo di facile economica e solida costruzione potessero anche da se stesse segnare le variazioni atmosferiche orarie senza che l'osservatore sia eternamente vincolato a vivere in una stanza per saperne il risultato.

Non è nuova, nè assolutamente mia l'idea di costruire delle macchine meteorologiche orarie; poichè il celebre orologio Inglese *Cummings* quasi trent'anni sono costruì un pendolo che mostrava le varie altezze del barometro quotidianamente colla più grande esattezza (a). Il Sig. *D. Onsenbray* diede la descrizione molto prima d'un anemometro che segnava le variazioni de' venti col mezzo d'un'orologio (b); il Sig. *Changeux* presentò nel 1780 all'Accademia delle scienze di Parigi una macchina che mostrava le mutazioni barometriche con un meccanismo analogo assai a quello di *Cummings* (c), ed il Sig. *Magellan* nel 1779 pubblicò il progetto di alcune macchine meteorologiche orarie col nome di Meteorografo perpetuo (d): ma queste macchine tutte, comunque molto utili, in parte erano quasi del tutto ignorate come quella di *Cummings*, in parte assai complicate e perciò non adoperate dai Fisici come quelle del Sig. *Onsenbray*, e del Sig. *Changeux*; ed in parte non furono che semplici bei progetti siccome il Meteorografo perpetuo del Sig. *Magellan*, così che egli non è a mia notizia che abbia esistito una collezione di macchine meteorologiche orarie ridotte ad uso di pratiche osservazioni avanti la mia: almeno in Italia ciò è certo, ed è forse vero anche per altrove, se riguardar si voglia il complesso di tutte insieme. Io debbo però qui rendere la dovuta giustizia al celebre socio il Sig. Cavaliere *Don Marfilio Landriani* che il primo pensò a rendere oraria la macchina per raccogliere, e notar la pioggia col nome

(a) Veggasi *Magellan Collection des differents traités sur les instrumens d'astronomie, & de physique* 9. 374 dove parla dei barometri.

(b) Veggasi *Memoires de l'acad. des sciences* 1734, e la raccolta delle macchine da esso presentate alla suddet-

ta Accademia.

(c) *Journal de l'Abbe Rozier* 1780. pag. 75.

(d) *Magellan* loc. citat. n. 373 col titolo di *idée d'un meteorographe perpetuel*.

di Croniometro, e del quale l'ingegno e le estese cognizioni mi giovarono a successivamente migliorare le altre mie macchine che ora sono per descrivere.

§. I.

Della ventaruola, ossia Anemoscopio.

Ognuno conosce la costruzione ordinaria di questo ordigno, poichè le torri, le cime de' camini, ed i campanili ne sono spessissimo forniti: ora ecco il meccanismo col quale io ho resa assai semplicemente oraria la ventaruola in modo che segni in qualunque tempo da se sola le varie direzioni de' venti senza punto essere sconcertata o pel troppo, e non rare volte rovinoso impeto, o per la multiplice irregolare e spesso celeremente variabile direzione de' venti.

La figura seconda ne pone sott' occhio con sufficiente chiarezza la intiera costruzione.

19 E' una larga ventaruola che invece d' essere più stretta, e fessa nella parte più remota dall' asta come si usa comunemente, vi è invece più larga perchè il vento vi abbia più presa e diale maggiore mobilità. 20. 20. 20 Si è una lunga asta di ferro, che scendendo dal tetto nella stanza posa con una conica mobilissima e forte punta d'acciajo sopra la rosa de' venti 34. 34, che è pure d'ottone inargentato, e potrebbe anch' essere di legno purchè avesse nel mezzo un pezzo incavato o d'acciajo o di pietra dura per ricevere la suddetta punta, e sostenerne con facile mobilità, e senza guastarsi il non piccolo peso.

21 E' un conico coperchio di rame, che cuopre il foro per il quale scende dal tetto in casa l' asta 20, ed impedisce la penetrazione delle pioggie.

22 E' una grossa asta di vetro solidissima, che finendo in un liscio anello di rame da una parte saldatovi riceve l' asta della ventaruola perchè il vento non la curvi, e dall' altra parte è piantata sodamente in un grosso trave 23. che forma parte immobilissima della travatura del tetto. Questo meccanismo non è necessario per la costruzione del semplice anemoscopio, ma egli è posto nel nostro caso sic-

siccome la interruzione 25. 25 dell'asta 20, la quale interruzione è anch'ella fatta da una grossa asta di vetro verniciato a gomma copal affine di far servire l'anemoscopia anche per conduttore elettrico senza moltiplicar le macchine, siccome farà detto in seguito.

24 E' un altro anello liscio di rame isolato per mezzo d'altro cilindro di vetro piantato nel muro, il qual anello è destinato anch' esso a tenere in registro la lunga tratta dell'asta e renderne più facile il movimento. Tali anelli dovrebbero accrescersi in proporzione della lunghezza, che bisognasse dare nelle diverse abitazioni all'asta 20.

26 . 26 E' un cilindro di sottile lastra d'ottone cavo, e saldato per mezzo di due croci leggiere all'asta 20 immobilmente, ed intorno a questo cilindro spiralmemente in giusto comparto stanno equidistanti saldati otto segmenti di circolo 27. 28. 29. 30, i quali sporgono alquanto in fuori dal cilindro 26. 26 per mezzo d'un gambo pure d'ottone che ogni segmento ha dove è saldato sul cilindro. Ognuno di questi segmenti dev' essere un poco più della ottava parte del circolo intiero, che tutti essi spiralmemente compartiti compiano intorno al cilindro 26. 26, cosicchè non solo non siavi interruzione tra l'un segmento e l' altro, ma si soprappongano alquanto l' un l' altro . Inoltre questi segmenti sono saldati al cilindro comune l'uno sotto l' altro distanti circa mezzo pollice fra di loro in modo che, girando comunque la ventaruola, mai non si potrà presentare ad una data linea perpendicolare posta avanti il cilindro 26. 26, se non uno solo dei segmenti, gli altri tutti sfuggendo per la natura della spirale loro posizione.

Dirimpetto al cilindro 26. 26 è piantato perpendicolarmente nel muro per mezzo d' una soda forchetta di ferro 33 un quadrilatero pezzo d'ottone 31. 31. 31, il quale equidistanti fra di loro d'un mezzo pollice contiene articolati a cerniera ed a molla otto altri segmenti d'ottone circolari simili ai già descritti, ognuno de' quali porta una matita bianca a molla affinchè la compressione sia sempre mobile e dolce, nè mai possa pel soverchio sfregamento impedire, o render difficile il moto della ventaruola. Ognuno dei segmenti 31. 31 a cerniera sia opposto colla sua con-

vestità ad un segmento della spirale sopra descritta in tale distanza, che quando le massime convessità di due segmenti corrispondenti si toccano, la matita del segmento 31 soffre la massima compressione contro il cilindro di legno 32. 32, e questa compressione va gradatamente diminuendo a misura che il contatto de' due corrispondenti circolari segmenti si scosta dalle rispettive loro massime convessità. Dunque ogni segmento del cilindro 26. 26 ha quasi un solo punto, nel quale possa fare la massima compressione contro il suo corrispondente segmento 31, che porta la matita; ed allora quando questa massima compressione succede, ogni matita è obbligata a segnare in bianco sopra il cilindro 32 di legno verniciato di nero, che sta innicchiato nel muro dietro alla quadrilatera asta d'ottone 31. 31. 31: e siccome i segmenti d'ottone spiralmemente, ed equidistanti, compartiti l'un sotto l'altro sul cilindro 26. 26 sono otto, così tutto il giro della ventaruola è diviso in otto parti uguali, ognuna delle quali rappresenta uno de' principali rombi di vento. Dunque per le rispettive varie compressioni dei segmenti, ossia delle lunette 27. 28. 29. 30 contro le corrispondenti lunette 31. 31 faranno colle diverse matite segnate l'una sotto l'altra le direzioni degli otto principali venti assai distintamente.

E' stata a questi segmenti d'ottone tutti data la figura circolare, e si sono messe in opposizione le rispettive convessità, affinchè massima essendo in un sol punto la compressione, e per gradi uniformi o crescente, o decrescente in tutti gli altri punti del contatto, non si venisse mai ad arrestare o alterare il moto in giro della ventaruola: inoltre i segmenti uniti alla quadrangolare asta 31. 31 stanno sempre in contatto contro i loro corrispondenti del cilindro 26. 26 perchè le mollette delle rispettive cerniere li tengono in tal posizione, e dall'altra parte la compressione massima non arresta il movimento della ventaruola perchè le molle che sono attaccate alle matite cedono dolcemente a tale compressione premendo solo quanto basta per fare che la matita segna sul vicino cilindro di legno 32. 32 verniciato di nero.

Il meccanismo col quale sono messe in opera le matite si può vedere nelle figure 5, e 6, e l'ho rappresentato in due

diverse maniere, perchè in due modi appunto l'ho adoperato, cioè nella figura 5 la canna 47 che è una delle attaccate alle lunette 31. 31 (fig. 2) contiene una molla spirale assai dolce, contro la quale sta appoggiata la matita 49 che può muoversi nel cavo della canna 48. 48 qui per facilità d'intendere rappresentato aperto. Per lo contrario nella figura 6 la canna 50 d'ottone, che pure sta unita al rispettivo segmento 31; dov' essa finisce si ha saldato un pezzetto di molla d'orologio 51. 51 ad angolo retto; ed all'altra estremità della molletta 51 sta attaccato ancora ad angolo retto un altro pezzetto di canna 52 che contiene fissa la matita 53. Ambi questi meccanismi servono all'uopo, ma più utilmente e con minor consumo di matite serve il meccanismo figura 6, perchè la molla in esso vi agisce con più costante ed uniforme pieghevolezza.

Dalla descrizione fin' ora fatta di questa macchina egli appare,

1 Che la ventaruola non può essere mossa, o voltata in verun modo dal vento senza che qualcuno degli otto segmenti preme contro una delle matite corrispondenti, e segni la sua attuale posizione sull'opposto vicino cilindro nero di legno 32. 32.

2 Che essendo gli otto segmenti, componenti tutto l'intero giro della ventola, posti l'uno sotto l'altro lungo il cilindro 26. 26 spiralmemente, dovranno stamparsi dalle matite otto diversi segni l'uno sotto l'altro distinti secondo le varie posizioni della ventola, ognuno de' quali segni rappresenterà costantemente una tale e non altra mai posizione della ventola.

3 Che siccome la ventola muta le sue posizioni secondo le varie direzioni de' venti; così le otto matite segneranno otto diverse direzioni di vento, che è quanto dire otto diversi rombi. Rimane ora a determinare, ed a qual vento corrisponda la pressione d'ogni matita, ed a far sì che i segni di ognuna delle matite mostrino oltre la qualità del vento anche per quanto tempo, ed in qual ora del giorno o della notte ogni vento abbia soffiato.

Per ottenere il primo intento cioè sapere la giusta significazione de' segni delle matite basta nella prima costruzione

della macchina orizzontare la ventaruola in modo che si sappia qual sia il vento, che corrisponde alla prima e più alta matita; poichè le altre allora acquisteranno la lor giusta significazione da sè stesse. Nella mia macchina il primo segmento 26 marca il vento est, ossia levante, dunque il secondo che è alla diritta discendendo farà il sud-est ossia sci-rocco; il terzo è il sud ossia mezzodì; poi viene il sud-west ossia libeccio; quindi il west ponente; in seguito il north-west maestro; dopo di esso il north tramontana; e per ultimo compie il circolo l'ottavo rombo north-est cioè il greco; nè il girar della ventaruola ora per un verso ora per un altro, nè l'andar di essa ora avanti ora in dietro può mai cambiare la significazione una volta determinata dei venti.

Il secondo scopo poi, che è il principale forse di questa macchina cioè quello di farla segnar le ore, nelle quali i diversi venti hanno soffiato unitamente alla loro durata, si ottiene col rendere orariamente mobile sul suo asse verticale il cilindro di legno verniciato nero 32. 32, così che in ventiquattro ore esso presenti alle matite tutta la sua superficie in una intiera rivoluzione diurna. Ciò si ottiene nella mia macchina facilissimamente dell'orologio 17 posto in mezzo fra l'anemometro e l'anemoscopio, il di cui movimento diurno essendo orizzontale sulla sega 18. 18 fa muovere i due cilindri 32. 32 (fig. 2.), e 14. 14. 14. 14 (fig. 1.) solamente col semplicissimo meccanismo d'aver avvolto ad uno de' cilindri 32. 32 la funicella 16. 16 che porta il peso movente l'orologio, il quale scende per una girella verticalmente abbasso, e a misura che l'orologio avanza da 17 in 18, ed all'altro cilindro 14. 14 similmente l'altra funicella 16. 16 che porta il contrappeso dello stesso orologio. La sola avvertenza necessaria perchè ogni cilindro abbia il suo moto orario esatto si è che la periferia d'ogni cilindro di legno dove la funicella vi è avvolta sia esattamente simile in estensione alla lunghezza della sega dell'orologio 18. 18, così che quando l'orologio ha percorso tutta la sega, ogni cilindro abbia fatta una intiera rivoluzione. Ciò posto la lunghezza delle righe orizzontali bianche segnate sul cilindro 32. 32 segnerà il numero delle ore, nelle quali ogni vento è soffiato, poichè ogni cilindro deve avere all'alto una

zona bianca divisa in ventiquattro parti uguali che sono le ore; e la diversa altezza delle righe corrispondenti alla posizione delle otto matite segnerà i diversi rombi del vento in ogni ora del giorno. Egli accade non rare volte, principalmente quando i venti sono forti, che la ventaruola oscilla avanti ed in dietro per l'ordinario per lo spazio di tre rombi; ma allora essendo la di lei posizione più costantemente sforzata nella vera direzione del vento, e le oscillazioni essendo più variabili del vento, trovasi segnata nel vero rombo una linea bianca marcata fortemente e continova; mentre nei due rombi adjacenti trovansi delle linee interrotte poco marcate e punteggiate: ed è questa pratica osservazione che mi ha determinato dopo varie sperienze a circoscrivere il mio anemoscopio a soli otto rombi, il che altronde per osservazioni meteorologiche terrestri è più che sufficiente, sebbene egli sarebbe assai facile il fargli segnare sedici, ed anche trentadue rombi, volendo, senza punto complicar la macchina solamente allungando molto il meccanismo 26. 26. Un'altra osservazione da farsi su questa macchina si è che quando l'aria è affatto quieta, il che nella nostra pianura lombarda accade spesso, vedesi dall'anemoscopio segnata solamente con uniformità e continovazione una linea che corrisponde a quel luogo dove la ventaruola sta ferma: e questa linea non può confondersi col soffio d'alcun vento sì per le di lei proprietà, come perchè l'anemometro, del quale dirò, sin'ora vedesi non aver segnati punti soffi di venti: ed ecco così compito con facile, solido e durevole meccanismo l'anemoscopio orario, del quale in nove anni che lavora la manutenzione mi costa appena qualche lira. Egli è ben vero che la mia macchina segna la sola direzione de' venti, non la inclinazione di essi all'orizzonte, siccome coll'ingegnoso suo anemometro ha fatto il Sig. Cavaliere d'*Alberg* (a) riunendo nello stesso strumento la indicazione della direzione, della inclinazione, e della forza del vento con meccanismi assai felici; ma ol-

(a) Veggasi Anemometre proposés aux amateurs de météorologie. Erfurt 1781. 4. e Giornale dell' Abate Rozier. t. 17. anno 1781. pag. 438.

tre a che questo non è strumento orario, io non ho preferito nelle mie macchine meteorografiche la riunione di più effetti in un solo strumento, perchè allora se la macchina si guasta, il che principalmente può accadere in quelle destinate a notare gli effetti de' venti non rare volte violentissimi e turbinosi, io vengo a perdere le annotazioni di tutti gli effetti insieme; laddove separando per esempio l'anemometro dall'anemoscopio, se uno di essi si guasta, perderò per quel tempo o la sola direzione, o la sola forza del vento, non ambe insieme: oltre di che egli sembra che macchine continuamente soggette a cotanto irregolari movimenti per varj anni debbano essere della maggiore semplicità unita alla solidità per non esporli spesso a perdere il frutto delle quotidiane osservazioni. A tale oggetto io ho fatto che nelle mie macchine il moto orario dipendente dall' orologio fosse così separato dal resto della macchina, che venendo a fermarsi o guastarsi l'orologio la macchina seguitasse a segnar tutto ciò che dee, eccettuata la distribuzione del tempo (a).

§. II.

Dell' Anemometro, ossia misuratore del vento.

Se le osservazioni della direzione varia dei venti sono utili alla Fisica, ed alla Medicina; non v'ha dubbio che ugualmente lo debbono essere quelle della varia forza dei

(a) Egli può accadere alcune volte, ed è anzi accaduto in mia casa, che non si possa nell'anemoscopio far discendere rettamente l'asta della ventaruola dal tetto alla stanza, e bisognar fare delle piegature, e mutar direzione; in tal caso il migliore, ed il più solido meccanismo per ottenere questo vantaggio si è l'uso de' nodi indicati nella figura 7. Al luogo dell'asta dove essa dee cangiar direzione si salda il pezzo a forchetta di ferro 54: con esso si unisce a perno mobile una croce di ferro, quindi pure a perno mobile il pezzo di

ferro 56; poi un'altra croce 57. poi il pezzo 58 che dev'essere conficcato sopra l'asta che scende nella stanza; a questo meccanismo si può dare molta lunghezza allungando secondo il bisogno l'asta del pezzo 56; ed al caso potrebbe esso anche duplicandosi, e triplicandosi estendersi alla lunghezza di molte braccia e produrre diverse inflessioni senza danneggiare il movimento della ventaruola. Il meccanismo delle ruote dentate posso assicurare per esperienza essere assai peggiore di questo, oltre a che produce un maggiore sfregamento.

venti stessi, ossia del vario impulso, col quale agiscono per esempio sul nostro corpo. Esemplari di macchine destinate a questo scopo possono vederli nel suddetto bell'opuscolo del Sig. Cavaliere d'*Alberg*; nella Filosofia Britannica di *Martin* tomo secondo; nelle Transazioni Filosofiche dove leggesi la descrizione dell'anemometro di *Smeaton*; nelli due anemometri proposti dal Sig. *Brequin* de Demençe (a); nella Meteorologia del celebre Padre *Cotte* (b); nelle sopraccitate macchine del Conte *D. Onsenbray*; negli opuscoli scelti di Milano (c) tomo terzo dove è delineata la costruzione dell'anemometro di *Marshall* semplicissima, e nel tomo quarto dell'opera stessa dove è la descrizione di altro nuovo anemometro proposto dal dotto Ingegnere Collegiato *Steffano Calvi*. La generale costruzione di tutti gli anemometri, siccome avverte benissimo il Sig. *Calvi*, può ridursi alle tre classi seguenti cioè

1 Ad un piano diversamente inclinabile sopra d'un perno che rappresenti colle diverse sue inclinazioni la varia velocità del vento che lo percuote. Tale si è quello del Sig. *Marshall*.

2 Ad una ruota di molino a vento o verticale o orizzontale con annessi pesi o molle, le quali considerate come resistenze rappresentano la forza del vento che le muove, siccome è l'anemometro di *Martin*, di *Smeaton* ed il mio che ora sono per descrivere.

3 Ad un piano verticale di una data superficie orizzontalmente e sempre direttamente opposto al vento che spira, il movimento del qual piano rappresenta l'impeto del vento che lo muove. Non è del mio argomento l'entrare ora a discutere gl'inconvenienti, ed i vantaggi di ognuna di queste costruzioni; e solo dirò che ho preferita quella a molino orizzontale con annessi pesi determinati perchè mi è sembrata questa costruzione più durevole ed atta a soffrire senza pericolo le ingiurie de' venti e delle stagioni: perchè l'azione dei pesi è più costantemente uniforme di quella delle molle,

(a) Giornale dell' Abate *Rozier* t. 15. 1780. pag. 433.

Paris 1774. pag. 198 tav. 12. fig. 2.

(c) Veggasi Opuscoli scelti T. 3. pag.

(b) *Cotte* traité de meteorologie 4.

262. 1780 e T. 4. pag. 45 1781.

perchè gli sfregamenti con questa costruzione mi sono sembrati meno alterabili che nelle altre, ed anche minori, il che fa ritornare con maggiore facilità, e costanza la macchina allo stesso punto nello stato di quiete, ed è una condizione utilissima, se non necessaria, volendovi adattare l'orario movimento. Frattanto mentre edotti altri degl' inconvenienti di tutti gli anemometri antecedenti, ed anche dell'anemometrografo mio ne miglioreranno la costruzione, io descriverò quello di cui mi servo da quasi un decennio.

N. 1. 1. (fig. 1.) è un robusto trave fermato solidamente alla travatura di tutto il tetto, il quale sale quattro buone braccia sopra il tetto medesimo. 2. 2. è un coperchio di rame perchè la pioggia non scenda lung'h' esso e penetri in casa. Al disopra di questo coperchio tutto il trave è a molte mani verniciato a olio per preservarlo dalle ingiurie delle stagioni. N. 3. 6 è un'asta orizzontale di ferro immobilmente attaccata al trave, che in 6 ha un buco d'acciajo ben tornito e liscio, entro cui gira il perno superiore del mobilissimo mulino. 9. 9. è un'altra asta di ferro orizzontale immobile che finendo in un pezzo d'acciajo con una rotonda incavatura riceve la punta inferiore dell'asta verticale 6. 6 del mulino. 4. 4: 4. 4. sono quattro ale di latta rinforzate con orli di ferro e declinanti di circa 22 gradi dal perpendicolo, perchè il vento motore si sdruccioli sopra, e ne renda maggiore la mobilità. Esse ale sono più larghe alla estremità remota dal comune loro centro, e ne ho determinata la superficie per poter poi calcolare la forza del vento che le muove. 5. 5 è un coperchio pure di rame pel solito intento d'impedire che l'acqua entri lungo l'asta verticale in casa. 7 è un rocchetto fermamente saldato sull'asta reggitrice del mulino, al quale è attaccata una funicella che attraversando la girella 8 scende 10. 10. 10 nella stanza attaccata al meccanismo, che sostiene i pesi rappresentanti nell'alzarsi la forza del vento. Questa fune deve essere così tesa e legata che ad istromento quieto tenga tese le catenelle sostentatrici del primo peso senza alzarlo, e lo alzi poi al menomo moto del mulino corrispondente.

La fune 10. 10 scendendo dalla soffitta a perpendicolo arri-

arriva fino all'ultimo n. 10 nella stanza dove col mezzo d'un anello s'annoda ad un'ansa scorsoja d'acciajo 13. che sostiene e la matita che preme sempre uniformemente contro il cilindro di legno nero 14. 14. 14. 14. e quattro catenelle tutte annodate all'ansa stessa, le quali sostengono ventidue pezzi di piombo fatti tutti a ferro di cavallo 11. 11. 11. 11. ed attaccati tutti equidistanti l'uno dall'altro con quattro ugualissime catenelle per ognuno di questi pesi. Li primi diciotto sono di tre oncie l'uno, i due susseguenti di sei oncie, e gli ultimi due di dodici oncie per cadauno. Ed affinchè l'alzamento, e l'abbassamento molte volte rapido, ed oscillatorio di questi pesi si faccia con una costante direzione, vi è 1°. una forte sbarra di ferro liscia quadrangolare 12. 12. sodamente fermata sulla tavola che sostiene i pesi, lungo la quale con direzione sempre perpendicolare scorrere l'ansa scorsoja 13 : 2°. v'è una rotonda bacchetta forte pure di ferro che attaccata all'ansa passa per entro la cavità di tutti li pesi, fatti perciò a ferro di cavallo, e scende registrata entro la solidità della sottoposta tavola in modo da mantener costante il perpendicolo di tutti i pesi tanto nel salire quanto nello scendere.

Da questa costruzione ne siegue che qualunque vento faccia muovere le ale del molino 4. 4. 4. dovrà far avvolgere la fune 10. 10. 10. sopra il rocchetto 7. e per mezzo di questo avvolgimento di fune si alzeranno tanti pesetti 11. 11. 11. quanti bastino a far l'equilibrio colla forza del vento, che muove il mulino; quindi a rappresentarne la medesima forza. Ma non possono alzarli i pesi senza che s'alzi l'ansa scorsoja, la quale porta la matita 13; e questa perchè premente con molla (veggasi meccanismo figura 5. e 6. sopra descritto) contro il cilindro di legno nero 14. 14. non può strisciarsi sopra senza lasciar segno del suo alzamento; dunque sarà sempre segnato sul cilindro qualunque alzamento di pesi dal primo fino all'ultimo, ossia qualunque forza di vento dall'equivalente di tre oncie in peso fino alle oncie novanta.

Ora siccome il cilindro grande di legno nero 14. 14. simile a quello 32. 32. dell'anemoscopio si avvolge sopra il suo asse in ventiquattro ore, così presentando sempre diversa

superficie alla matita accaderà che si vedranno sul cilindro notati tutti i soffj di vento in ogni momento in modo che le ordinate linee mostreranno la forza del vento per la quantità de' pesi alzati, e le ascisse l'intervallo di tempo che è corso fra un soffio e l'altro, siccome indicato vedesi nella figura.

Egli è appena bisogno di far avvertire agl'intelligenti di queste materie, che per potere calcolare la forza del vento con questa macchina conviene prima aver trovato per esperienza ripetuta di tempo in tempo la quantità dello sfregamento della macchina stessa, che nel mio caso equivale circa al peso di un'oncia e mezza, e la superficie delle ale 4. 4. 4. 4. del mulino, oltre la loro inclinazione, delle quali cose parlerò quando una volta pubblicherò almeno i generali risultati delle mie osservazioni. Piuttosto egli è più necessario l'aggiugnere che siccome la forza del vento sulla mia macchina forpassa non rarissime volte le oncie novanta, ed anche cento, io ho provveduto alla sicurezza e durata del mulino ne' tempi turbinosi col meccanismo seguente che fin' ora mi è riescito felicemente.

All'alto dell'asta quadrangolare di ferro 12. 12. è un orlo prominente in fuori che impedisce l'ansa scorsoja 13. d'alzarsi più oltre sebbene una forza superiore tentasse di tirarvela: dunque arrivata fin là l'ansa, non si può avvolgere più altra fune al rocchetto 7. ed avrebbe il mulino un ostacolo insuperabile a muoversi comunque spinto dal vento fortissimo, se non vi fossero nel comune centro delle ale del mulino due molle con una ruota dentata, la resistenza delle quali essendo superiore al peso d'oncie novanta non agisce finchè vi sono pesi da alzare, e dall'altra parte lascia girare il mulino solo sulla sua asta 6. 6. allora quando quest'asta per avere avvolta tutta la fune che poteva diventò immobile. Io non ho nel mio anemometro voluto tener conto della forza del vento superiore a cent'oncie, perchè essendo stato mio scopo principale di applicare le osservazioni meteorologiche alla Medicina ho veduto poterli chiamar vento massimo in generale il superiore alla forza suddetta, e bastare all'intento propostomi il poter distinguere di tre in tre oncie le differenze di ogni vento fino alla quantità sopra indicata.

Già egli è stato detto descrivendo l'anemoscopio che lo stesso orologio 17.17 muove ambi i cilindri di legno, e che sopra ambi questi neri cilindri v'è una zona che mostra le ore 24 del giorno. Dunque per sapere con ambe queste macchine che cosa sia accaduto in tutto il giorno, o nella direzione, o nella forza non si ha che da osservare le righe bianche segnatevi dalle rispettive matite; notare col favore della zona oraria sotto quali ore sieno le principali mutazioni accadute; in seguito dopo avere registrato tutto in un libro per esempio la sera, rimontar l'orologio facendolo retrocedere per la sua sega da dritta a sinistra, e per ultimo cassare col mezzo d'una spugna umida in ambi i cilindri le segnature tutte delle matite.

Vi sarebbe un metodo anche migliore per ottenere, e cassare più facilmente le segnature delle matite in queste macchine, il quale mi è stato recentissimamente comunicato dal celebre Sig. Cav. *Landriani*, cioè di porre in opera delle matite nere comuni, e far che segnino non sopra legno verniciato, ma sopra vetro smerigliato, cioè spulito collo smeriglio. Le segnature così fatte riescono nette visibilissime; lo sfregamento delle matite è molto minore, quindi la macchina muovesi con maggiore agilità, ed è facilissimo il modo di levare i segni passandovi sopra un'umida spugna. Io non ho posto fin ora in opera questo metodo che credo preferibile al sopra descritto, perchè non l'ho saputo che in questi ultimi tempi. Può ancora adoperarsi quella carta perpetua sulla quale si scrive la musica, che è suscettibile di quotidiane cassature, ma ho trovato in pratica che essa corrisponde male all'uopo, perchè alterandosi ed incurvandosi col caldo, freddo, umido, e secco essa arresta qualche volta le matite, o fa loro fare de' salti che ne rendono dubbj in seguito i significati.

§. III.

Dell' Elettrografo, o dimostratore orario dell' elettricità aerea .

Egli è noto che il celebre *P. Beccaria* tanto benemerito e delle scienze fisiche e particolarmente dell' elettricità propose nel 1780 uno strumento col nome di cerannografo,

perchè regnar potesse lo scoppio de' fulmini; il tempo, nel quale ogni fulmine scoppiava; e la qualità positiva o negativa della elettricità che lo produceva (a). Quest' opuscolo mi venne alle mani nel tempo che costruivo il mio osservatorio meteorologico, e pensai d'adattarvi anche questo a dir vero più curioso che utile ordigno. Per ottenere ciò con facile meccanismo dopo avere isolata col mezzo di due grossi bastoni di vetro verniciato la ventaruola fig. 2 vi unii sotto il tetto una liscia canna d'ottone 20. 37, la quale fa comunicare la fig. 2 colla 3, e scende diventando perpendicolare 36. 36 fino nella stanza vicino al centro di un quadrante da orologio di cartone 42. 42. 42 fig. 3. Dove la canna si curva ad angolo retto è sostenuta con cordone di seta e canna di vetro verniciato 37. 37, e dove attraversa la soffitta della stanza, ed entra nella cassetta a vetri quadrangolare che si vede disegnata nella fig. 3, ivi dico passa la canna attraverso a lunghi tubi di vetro verniciati di cera lacca, perchè sia sempre bene isolata. Finisce questa canna al n.º 38 in un campanello attaccatovi ed isolato, vicino al quale ve n'è un altro 39 sospeso pure alla medesima altezza per mezzo d'un grosso filo d'ottone che scendendo in angolo lungo la parete della cassa esce dalla stanza per terminare con lungo giro in un pozzo facendo le veci di filo di salute. Tra i due campanelli v'è pendolo un battente metallico sospeso con un filo di seta che produce il continuo suonare de' campanelli, ed avverte l'osservatore, quando vi è nell'atmosfera della elettricità scintillante.

Al n.º 43 v'è un pezzo di filo d'ottone terminato in ottusa punta attaccato alla canna 36, e curvato in modo che stia dirimpetto perpendicolarmente alla zona esteriore 42 del quadrante orario. Dietro a questa zona, che dee essere di carta verniciata con cinabro, v'è un filo metallico terminato anch'esso in grossa ed ottusa punta vicino alla zona medesima comunicante col filo soprad detto di salute. La zona di carta, ed il quadrante orario girano con moto uniforme sul proprio asse per l'azione dell'orologio a sega 44. 44. al quale è il quadrante unito con una corda

(a) D'un cerannografo, e della cagione dei tremuoti Scritti due di G. B. Baccaria Torino 8. 1780 1786 B. I. 50.

avvoltolata ad una girella, la di cui circonferenza equivale alla lunghezza di tutta la sega 44. 44. Dunque quando in ventiquattro ore l'orologio ha percorsa tutta la sega, il quadrante ha egualmente compiuto un intiero giro. Il facile meccanismo della girella fissata al centro del quadrante mobile sul suo perno centrale, e della fune attaccata all'orologio, ed alla girella è posto dietro al quadrante, nè può vedersi; ma appunto perch'esso è semplice e facile, ho creduto inutile moltiplicar le figure per rappresentarlo.

Posta questa costruzione, allora quando viene un temporale ed io voglio veder segnate le scintille fulminee, levo il pendoletto 40. poichè essendo allora più distanti i campanelli fra di loro che lo sieno li due fili metallici 43 pure fra di loro, la scintilla salta sempre dalla punta anteriore alla punta posteriore, e fora la carta. E siccome la zona di carta gira con moto orario, così io veggio ed a qual'ora ha cominciato la prima scintilla, e per quanto tempo ha durato la elettricità scintillante, anzi anche quanti colpi sono scoppiati. Oltre di che dalla diversità delle impressioni fatte sulla carta si può conoscere se positiva o negativa è stata la elettricità; per lo contrario poi quando si vuole essere avvertiti, essendo in casa, solamente del principio d'un temporale, si lascia a suo luogo il pendoletto, si accorre al suonare de' campanelli, e si fanno quelle osservazioni che vogliono farsi.

Per ottenere anche i segni della minima elettricità non scintillante io vi tengo vicina una boccetta di leiden 46 che comunica col campanello 38, col mezzo della quale distaccata dal campanello ed applicata subito al conosciuto elettrometro del Sig. *Saunders* (fig. 4) si distingue e la piccola elettricità, e la di lei qualità. Meglio è ancora applicarvi il condensatore del Sig. *Volta*, o quello più recente del Sig. *Cavallo*, la di cui utilità ed efficacia io ho potuto confermare anche colla propria esperienza (a). Non posso però a me-

(a) Veggasi intorno al condensatore del Sig. *Volta* il giornale di *Rozier* T. 22. 23. anno 1783; intorno al condensatore del Sig. *Cavallo* lo stesso giornale t. 34. 1789. pag. 258.

Sopra un altro elettroscopio adattabile al conduttore elettrico aereo la memoria del Sig. *Boyer-Brun* nella stessa opera t. 28. 1786 pag. 133, sopra un elettrometro adattabile allo

no di ricordar quivi, qualunque metodo si siegua, o meccanismo si adoperi, una somma cautela e nella prima posizione dei conduttori aerei, e nell'osservare intorno ad essi; non solo perchè si leggono esempj d' illustri Fisici disgraziatamente sacrificati al troppo fervido desiderio d'investigazione in questo pericoloso argomento, ma perchè a me medesimo accadde un violento fenomeno, del quale se ne può vedere un breve ragguaglio nell'opera sui conduttori elettrici del chiarissimo Sig. Cavalier *Landriani*.

§. IV.

Del Pluviometro, ed Atmidometro Orarj. Dell'Igrometro, de' barometri, termometri, e delle macchine magnetiche costituenti il compimento dell'osservatorio meteorologico.

Il pluviometro, ossia stromento misuratore della pioggia, entra necessariamente nel corredo delle macchine meteorologiche. La costruzione di esso era assai semplice, e meno atta allo scopo delle più diligenti diurne osservazioni avanti che il Sig. Cavaliere *Landriani* lo rendesse il primo tra i Fisici a mia notizia orario col nome di cronografo, quindi capace di segnare oltre la quantità totale dell'acqua caduta in un dato tempo anche la durata della pioggia (a). Io ho adottato l'uso di questo ingegnoso stromento, e per la pratica che ne faccio di nove anni continovi posso conchiudere che esso serve assai bene all'intento, e non porta seco bisogno di dispendiosa manutenzione, o soverchia cura per conservarlo, principalmente quando venga posto in uso colle modificazioni ed avvertenze che ora sono per indicare. Non

stesso scopo la memoria del Sig. Cavallo l. c. t. 13. 1779 pag. 220.

E volendo conoscere ciò che è stato proposto intorno alle macchine per raccogliere l'elettricità aerea, ed osservarne i fenomeni veggansi li doti opuscoli de' Signori *Saussure*, *Beccaria*, *Bertolon*, *Le Roy*, *Pasumot*, *Rouland*, *Ferry*, *Romaine*, *Tourry*, *Liktemberg* ecc. sparsi in varj luoghi dell'u-

tilissima opera periodica sopracitata.

(a) Veggasi intorno alla costruzione degli antichi pluviometri la meteorologia del P. Cotte sopra citato; il giornale di *Rozier* anno 1776 t. 8. pag. 38. lettera del Sig. *Pasumot*. Opuscoli scelti di Milano dove è indicato il pluviometro della Specola di Brera ecc.

ho creduto in primo luogo di far uso dell' iometografo, comunque bene imaginato, sì perchè ho trovato in pratica che utilissima cosa riesca il conservare tutta l'acqua che cade per fino a che se ne sia fatta l'annotazione, e verificata la misura indipendentemente dall'orologio; sì perchè rendendosi necessariamente per l'unione di questi due meccanismi più composta, delicata, e guastabile la macchina, non può esserne così durevole, economico, e facile l'uso. Altronde poi non essendo mio scopo il fare delle osservazioni dettagliatissime di uso fisico, ma l'applicare le meteorologiche osservazioni alla Medicina, non ho creduta importante per me la scrupolosa annotazione del quantitativo esatto orario di pioggia bastandomi d'avere il tempo, ossia la durata della pioggia oltre alla quantità caduta in ogni giorno. Ho detto il quantitativo esatto orario, perchè anche senza l' iometografo si ottiene benissimo per approssimazione sufficiente anche la quantità oraria della pioggia d'un giorno dividendo la totale osservata acqua pel numero delle ore che ha piovuto; e se qualche volta cade un rovescio d'acqua abbondante, e raro, nel qual caso dubito che l' iometografo qual'è fin' ora stato costruito possa servir bene; allora basta notar subito dopo senza aspettare la sera la quantità dell'acqua caduta, e dividerla pel tempo, nel quale essa cadde.

Ella farebbe una inutilità il voler qui dare la figura, e minuta descrizione del pluviografo da me adoperato, ed è perciò che quantunque esso faccia parte costante della collezione di mie macchine meteorologiche non l'ho fatto disegnare: solamente basterà l'indicare che il vaso superiore, il quale riceve la pioggia sul tetto tav. 2. fig. 9. l'orologio orizzontale tav. 1. fig. 2. la matita a molla tav. 1. fig. 3, il vasetto conico *R.* tav. 1. fig. 3., ed il sifoncino *N.* v. fig. 6. essendo i medesimi che descritti sono dal Sig. Cavaliere *Landriani* nel Tomo 1. di questi medesimi Atti pag. 203, io ho sottoposto poi al conico vasetto *R* armato del suo sifoncino un parallelepipedo di rame del diametro di sei pollici francesi, alto quattro piedi, e chiuso di sopra in modo che vi rimane solamente un foro per penetrarvi l'acqua versata dal conico vasetto. A questo recipiente sta lateralmente unita una canna di vetro dell'altezza pure di quattro piedi

che fa tubo comunicante colla sua scala divisa in pollici e linee cosicchè per essa veggo sempre le quantità anche minime d'acqua contenuta nel recipiente . Per ultimo al fondo del recipiente è saldata una chiave, ossia robinetto d'ottone pel di cui mezzo si vuota il recipiente sempre con facilità dopo aver segnata l'acqua . Con questo semplice meccanismo si ottengono i seguenti comodi .

1 Essendo il diametro del recipiente la ventesima parte del diametro del vaso che è sul tetto a ricevere l'acqua piovuta, io vengo ad avere ingrandita venti volte l'acqua caduta; e siccome si può ad occhio nudo facilmente prendere un terzo di linea senza errore sensibile, io vengo colla mia scala divisa in linee annessa al tubo di vetro a conoscere sempre senza microscopj la sessantesima parte di linea dell'acqua piovuta .

2 Per essere profondo quattro piedi il recipiente di rame altronde stretto molto per tanta profondità, egli fa pozzo, e produce pochissima evaporazione massime quando l'acqua è vicina al fondo del vase, il che accade nelle piccole piogge, nelle quali è più necessaria l'esattezza .

3 Se per avventura mi si viene a fermare, o guastare l'orologio o il meccanismo sostenitore del conico vasetto, ovvero il sifoncino, io perderò in quel giorno la segnatura delle ore, nelle quali è piovuto, che pure posso per approssimazione sapere sempre, ma non perderò mai la quantità dell'acqua caduta, che è il più importante oggetto; ciò che non accade nel più delicato e composto iometografo . Alle quali riflessioni poi mi sembra che se ne debba un'altra aggiugnere più generale, cioè che la matematica esattezza, e perfezione degli stromenti non serve in quelle sperienze, nelle quali la natura del fenomeno da osservarsi non ammette che l'approssimazione .

Nel nostro caso la quantità della pioggia che cade per la natura dello stromento stesso, e delle circostanze accompagnanti la pioggia, non può raccogliersi se non in un determinato piccolo spazio, sopra il quale pe' diversi venti che soffiano, e per altre accidentali circostanze potrà cadere ora più ora meno acqua, grandine, e neve di quello cada negli spazj circonvicini . Dunque possono benissimo ritenersi per
sufficientemente

sufficientemente esatti i risultati delle quotidiane osservazioni pluviometriche quando esse sieno per lungo tempo continuate, e si confrontino moltissimi, e non troppo brevi spazj di tempo fra di loro, perchè in tal caso gli errori possibili ora in più ora in meno si compensano; ma non potrà mai dirsi per esempio che in un mese la pioggia indicata da un tale pluviografo sia precisamente quella che è caduta in quel mese sopra tutta la superficie della città.

Fin qui del pluviografo; venghiamo ora all'atmidometro o atmidografo. Io diedi nel tomo quarto degli Opuscoli scelti milanesi (a) fino dall'anno 1781 la descrizione colla figura dell'ordigno, col quale misurare si potesse giornalmente la evaporazione dell'acqua; in seguito nel 1782 resi orario questo strumento cosicchè con esso si potesse vedere segnata in ogni ora del giorno la quantità parziale di essa evaporazione, ed a quell'Opuscolo ancora mi riporto per evitare le inutili ripetizioni; se non che debbo ora aggiugnere che in questa macchina principalmente più che nelle sopraddescritte è necessario mettere in pratica il meccanismo della matita, che scriva sul vetro per diminuire al possibile lo sfregamento che nuoce moltissimo alla sensibilità della bilancia. Del rimanente le ragioni, per le quali mi sia sembrata preferibile la bilancia agli altri metodi di misurare l'evaporazione, e l'utilità di queste osservazioni per giudicare dello stato dell'atmosfera possono vedersi nelli due Opuscoli sopraccitati.

Anche un igrometro è necessario in un osservatorio meteorologico, il quale potrebbe assai facilmente rendersi orario, e difatti io l'aveva reso tale adottando la costruzione delle due tavolette che si scostano fra di loro restringendosi per lo asciutto, e si accostano gonfiandosi ad un dipresso come si vede indicato presso il Sig. *Magellan* (b); ma l'esperienza mostrato avendomi che tale strumento indica sempre il passato non l'attuale stato dell'atmosfera, ho rinunciato

Tom. V.

Bbb

(a) Ved. pag. 118 lettera del R. P. D. *Pietro Moscati* al Ch. Sig. de *Sausfure* ecc. e T. V. pag. 46. Descrizione d'un nuovo atmidometro orario col quale si può sapere in assen-

za dell'osservatore la quantità della evaporazione che siegue ogni ora del giorno.

(b) *Magellan* Collection des differents traités ecc. Londres 1782. Sur les meteorographes perpetuels pag. 163.

al vantaggio non grande nelle igrometriche osservazioni dirette solo ad uso meteorologico d'aver questo strumento orario adottando la costruzione conosciuta del celebre Sig. de *Saussure*, dal quale lo strumento è stato colla maggiore precisione descritto unitamente alle più delicate ed ingegnose sperienze sopra questo articolo (a); perchè io debba entrare in dettagli inutili sopra lo stesso argomento. Solamente aggiungerò che temendo a principio la fragilità del capello che doveva sempre stare esposto alle atmosferiche irregolarità ho voluto usare del crine di cavallo comparativamente per potervelo sostituire; ma l'esperienza m'ha dimostrato esservi ne' movimenti del crine molta, ed incostante irregolarità così che io non lo credo atto a simili osservazioni; dall'altra poi ho dovuto vedere non senza meraviglia la tenuità appena visibile d'un capello reggere per alcuni anni continovi all'inclemenza atmosferica, la quale pure aveva alterate, e quasi distrutte funicelle e di canape e di cotone e di seta e di budello esposte per paragone un uguale spazio di tempo, e nello stesso luogo.

Intorno al barometro dirò, che io ne uso uno fatto colle cautele socialmente già esposte insieme al più volte lodato Sig. Cavalier *Landriani* nel Tomo primo di questi Atti, del quale la superiore altezza si determina con un nonio scorrevole assai delicato secondo il metodo de' migliori barometri portatili Inglese, ed il livello inferiore si ha sempre costante col mezzo di una vaschetta di vetro che circonda l'estremità in su rivolta del tubo barometrico. Si versa del mercurio ogni volta in questa vaschetta cosicchè soprananzi il livello della canna barometrica; poi si assorbe il versato mercurio con un sifone annesso ad una boccia di cont-cont, ovvero resina elastica in modo che a nudo rimanga la canna barometrica colla quantità di mercurio che nel tempo della osservazione dee contenere. Così si ha con facile meccanismo un livello esattamente costante. Una curiosa osservazione mi è accaduto di fare usando di questo mecca-

(a) Veggasi l'eccellente libro del Sig. de *Saussure* *Essay sur l'hygrometrie* 4. Neuchatel 1783.

nifmo , ed è che il mercurio alla lunga , cioè in un anno o poco più , fi combina colla fofianza della refina elastica , la ammolliſce , ne forma una paſta ſimile ad un cerotto facendole perdere la propria ſodezza , ed elasticità . Per ultimo finifce coll' affottigliarla e forarla . Egli è dunque non ſempre vero che tale o tal altra fofianza ſia intaccabile , o inſolubile da un'altra , ficcome fuolſi afferire dai Chimici , perchè il contatto reciproco di poco tempo non le altera , o combina . Coſì lo ſtagno , ed il piombo , che contengono l'acqua per molto tempo ſenza alterarſi , vi ſi ſcompongono laſciandoveli immerſi per intieri anni , ficcome io ho dovuto offervare . Può dunque la natura per la meſcolanza , per la immerſione , pel contatto di diverſe ſoſtanze continovato non ſolamente per anni , ma per interi ſecoli produrre de' riſultati de' quali noi non acquiſteremo mai idea nelle effimere operazioni de' noſtri piccoli laboratorj .

De' termometri non è nulla da dir di particolare , io mi ſervo abitualmente di quelli di Farheneith perchè la diviſione n' è più minuta ; perchè ſopra di eſſi è già fatto il calcolo delle operazioni barometriche con molta diligenza dal celebre Fiſico *Milor Shukbourg* . E perchè in queſta ſcala non v' è biſogno di notare ſe tal grado ſia ſopra o ſotto al zero cioè al punto di congelazione . Solamente potrà forſe qui cadere in acconcio il riferire una oſſervazione da me fatta per quaſi tre anni continovi ſopra due termometri , de' quali il movimento era ſtato prima trovato uguale ; in ſeguito ne ruppi uno alla cima coſicchè l'aria vi aveſſe libero acceſſo , e laſciandoli nella ſteſſa maniera e ſotto le ſteſſe circoſtanze ne regitrai tre volte al giorno le altezze ſenza trovar mai notabile differenza tra l'uno e l'altro : dico notabile perchè la maſſima non fu mai maggiore di mezzo grado , e queſta differenza aveva luogo principalmente nello ſtato della maggiore ſiccità atmosferica . Potranno altri e ſeguitare e variare queſte oſſervazioni , e ricavarne forſe degli utili collarj .

Per compiere la ſerie delle meteorologiche oſſervazioni conviene anche notare i fenomeni diurni del magnetiſmo nella ſua direzione , nella ſua inclinazione , nella ſua forza , ed anche queſte diligenze non ſono ſtate da me neglette , nè

mancono le macchine opportune a tali bisogni nel mio meteorologico gabinetto. La direzione viene osservata con un ago calamitato molto lungo posto in una cassetta lunga poco più dell'ago e stretta, bastando che l'ago percorrer possa lo spazio di cinque gradi al più per parte. Egli è bene che possa averfi una sufficientemente piccola suddivisione del grado, e la mia bussola declinatoria segna di cinque in cinque minuti; perchè si possano vedere le minime variazioni diurne. Di tutte le macchine magnetiche applicate alle osservazioni meteorologiche la declinatoria si è la più importante perchè le variazioni diurne, e periodiche sempre dentro ventiquattro ore dell'ago calamitato sono assai notabili oltrepassando i due gradi e mezzo qualche volta in un giorno; perchè non sono uguali in tutte le stagioni dell'anno essendovi due volte l'anno la minima declinazione diurna che lentamente va crescendo fino al suo massimo: nè dipendono questi movimenti o dalla presenza del sole, poichè hanno ugualmente luogo a tempo nuvoloso e piovoso, o dalle altre variazioni atmosferiche, o finalmente nemmeno dall'atmosfera elettrica, poichè il moto diurno non è spesso punto alterato nemmeno dai temporali, siccome avrò luogo di esporre pubblicando i risultati delle mie osservazioni.

L'inclinazione, altro dei movimenti magnetici, si osserva colla macchina detta inclinatoria, che descritta trovasi presso *Muskembroek* e presso *Adams* (a) fra gli altri. Io mi sono sempre servito della macchina inclinatoria di *Brander* sufficientemente esatta, e di semplice costruzione; e non ho durato lungo tempo ad osservare, perchè in due anni non mi è riuscito mai di vedere sensibili variazioni nella magnetica inclinazione, nè mai ho veduto più di dodici minuti di differenza, senza che altronde anche questo minimo movimento avesse visibile relazione con alcuna delle atmosferiche variazioni. Lo stesso mi è accaduto per riguardo alle osservazioni magnetometriche, le quali io ho fatto col conosciuto magnetometro del celebre Sig. de *Saussure*, del quale il movi-

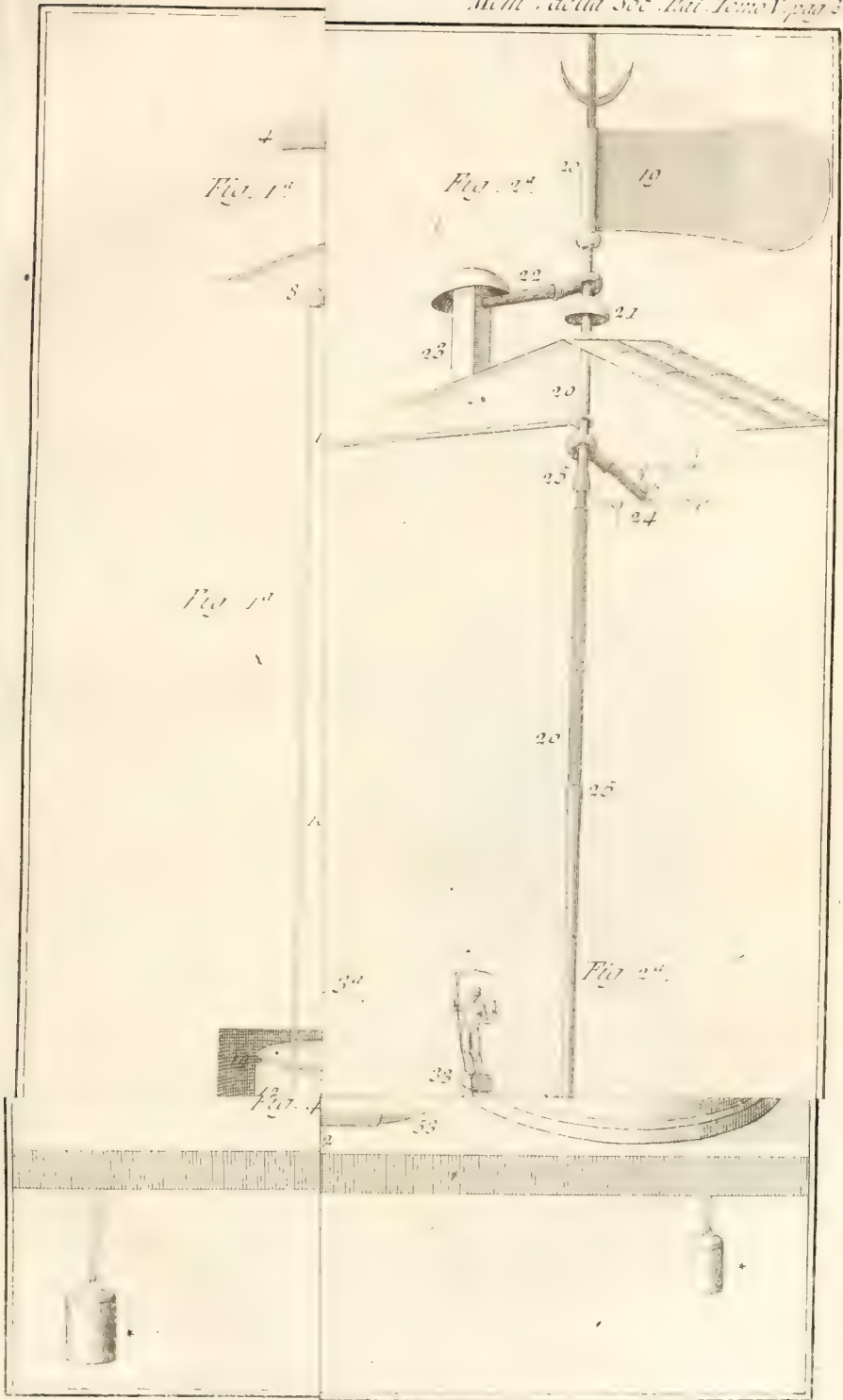
(a) *Muskembroek* de magnete. *Adams* an essays on electricity with an essays on magnetism London 1787. 8.

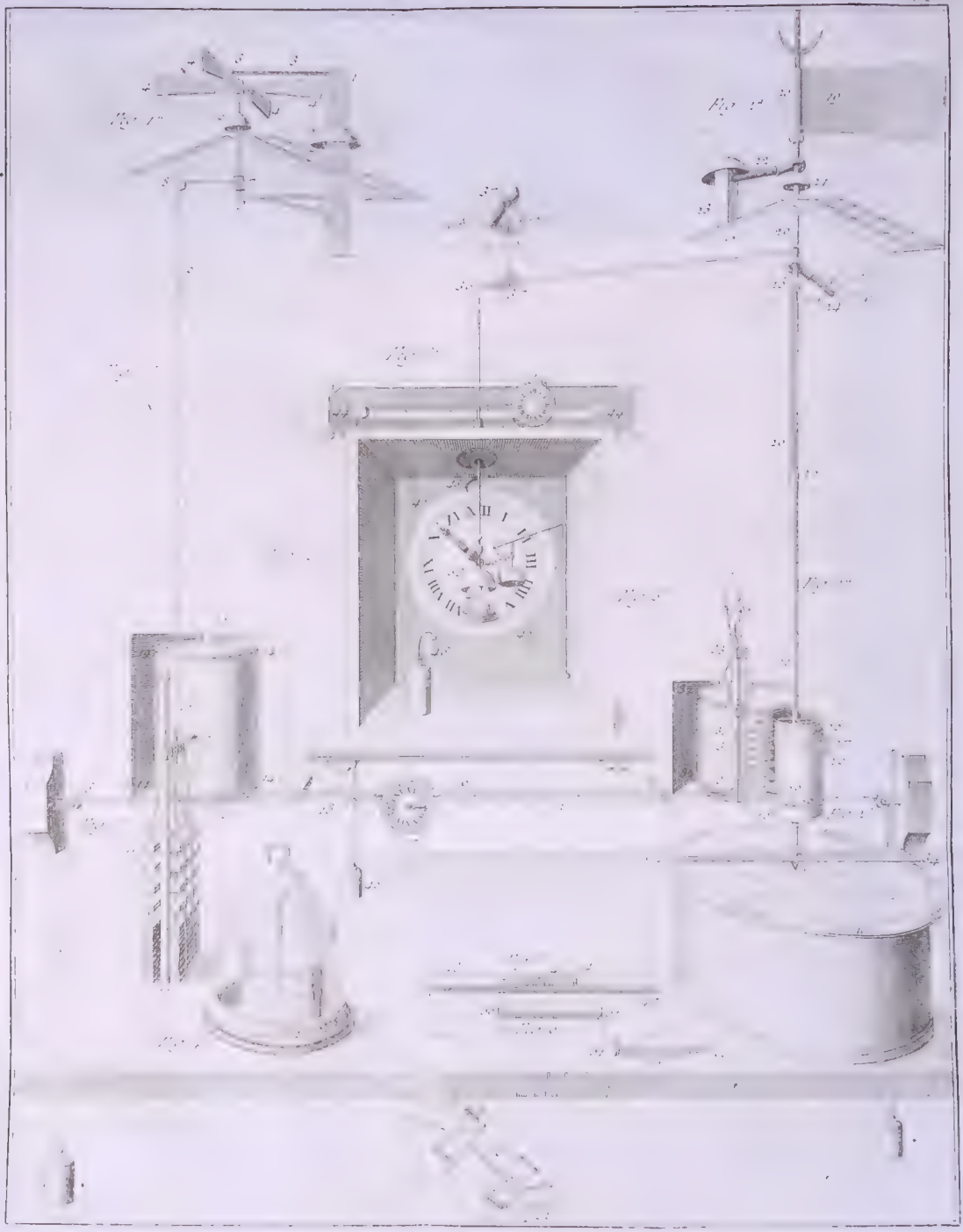
Fig. 1^a

Fig. 2^a

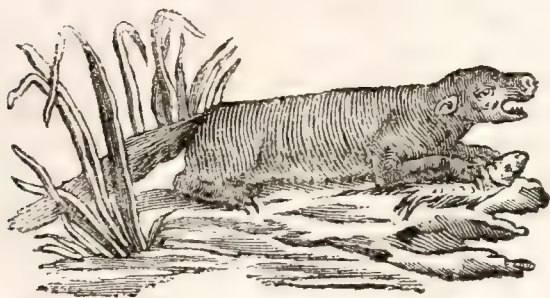
Fig. 1^a

Fig. 2^a





mento e le variazioni sono sensibili finchè esso si adopera incassato in legno, e diventano piccolissime, isolate da ogni altra mutazione atmosferica; non diurne, nè ebdomadarie, nè mensuali, allora quando si posa la macchina sopra un inalterabile sostegno di pietra, e si cuopre con una cassa di cristallo. Io non intendo perciò di biasimare l'uso di queste ingegnose macchine, o di distrarre l'attenzione de' Fisici da queste osservazioni, che possono o riescire diversamente in altri paesi, o presentare sotto altre viste che le meteorologiche degli utili risultati. Ed ecco compiuta la descrizione degli stromenti che compongono il mio meteorologico Gabinetto, il quale aveva forse qualche pregio rimontando all'epoca di sua fondazione, ma sarei presto superato dalla generale fervida attività colla quale ed i Fisici coltivano, ed i Principi proteggono in oggi lo studio della meteorologia.



S T O R I A

DI UN' EGAGROPILE RITROVATA NEL SECONDO
VENTRICOLO DI UN BUE,

Scritta da FRANCESCO TOGGIA
Regio Professore di Veterinaria

P R E S E N T A T A

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA.

Medicina sola observatione crevit, sola observatione firmanda est.

§. I.

UN' accurata cognizione de' fenomeni, che scorgonsi ne' corpi degli animali, i quali di certe malattie periscono, dee considerarsi come un necessario fondamento per ben giudicare de' corpi infermi. Questa cognizione non si può acquistare senza le anatomiche osservazioni, le quali massime nella nostr' arte ci abilitano a poter formare e sulla malattia, e sulle di lei cagioni un accurato, e sicuro giudizio. Quindi appare quanto i maniscalchi in molte malattie giuochino a indovinare per mancanza di tali osservazioni, e quanto ciecamente decidano di questo, o di quell' altro accidente come cagione della morte di un animale, quando non sarà, che una conseguenza della malattia. Questa verità è confermata dal seguente esempio.

§. II.

Un bue d'anni 8. circa fu affalito da una leggiera timpanitide, la quale cresceva a misura che l'animale si nutriva, e diminuiva in massima parte colla dieta: del resto era alle-

gro, senza febbre, mangiava, e ruminava secondo il solito, in una parola tutte le sue funzioni erano in perfetto stato di sanità. Passati sette giorni principiò la timpanitide a farsi considerabile per poco che il bue mangiasse, o bevessè, veniva in seguito assalito da interpolati tremori a tutte due le coscie, mandava ad intervalli qualche gemito, provava un'inquietudine massime nel restar coricato, aveva il respiro affannoso, ed un leggier battimento de' fianchi, e col distendersi, e contorcersi interpolatamente dava segni di dolore. Tutti gli accennati sintomi diminuivano qualche poco, se l'animale si teneva ad una dieta rigorosa, ma subito ritornavano, allorquando gli veniva somministrata qualche sostanza solida, o fluida. Finalmente fattasi costante la timpanitide, e ribelle ad ogni rimedio, mi determinai di far uccidere il bue.

§. III.

Prima di passare all'esame del cadavere sembrami convenevole di esporre il metodo di cura da me praticato durante la malattia. Chiamato io pertanto a visitare detto bue giudicai dai sintomi, che la malattia era probabilmente un effetto d'indigestione, per cui gli prescrissi una dieta rigorosa, ed una decozione di fiori di camomilla da darsi alla dose di tre pinte per volta (a).

Con questo metodo di cura continuato per tre giorni consecutivi si risolse la timpanitide; e siccome la lingua non era pastosa, e le dejezioni erano nello stato naturale, feci dare all'animale un po di fieno, ma con mia sorpresa ritornò subito dopo il pasto il meteorismo, e quel, che m'è paruto più singolare in simile circostanza, si è, che il bue pochi momenti dopo si mise a ruminare come fosse sano sanissimo senzachè siasi risolta la timpanitide, al qual effetto gli fu prescritta nuovamente la dieta, e la sovraccennata deco-

(a) Non feci uso in questa circostanza del tanto decantato, e potente rimedio dell'acquavite col nitro, perchè sapeva benissimo, che il meteoris-

mo non era prodotto dall'aver il bue mangiato trifoglio, medica, o altre simili piante.

zione; e supponendo qualche vizio nelle prime strade, stimai di dargli il giorno seguente a digiuno due once di *aloe soccotrino* in boccone con miele, il qual rimedio sebbene abbia prodotto delle abbondanti evacuazioni, non apportò all'animale un benchè menomo sollievo.

§. IV.

Veggendo infruttuosi questi mezzi, gli feci prendere a digiuno per alcuni giorni consecutivi due once di china per volta in una bottiglia di vino rosso generoso, e nello stesso tempo procurai, che fosse nutrito di una parca dose di ottimo foraggio, ma neppure con questo mezzo ho potuto ottenere qualche alleviamento.

Non sapendo da qual causa potesse essere mantenuta questa così ostinata timpanitide, mi determinai di fargli la paracentesi del ventre, cioè di penetrare col *trequarti* un palmo sotto la testa dell'osso iliaco in mezzo al fianco sinistro nella cavità stessa del ventricolo (a). Con questa operazione uscì una quantità d'aria, e l'animale restò alquanto sollevato: ma passati appena tre giorni comparve colla stessa forza il meteorismo, cessò la ruminazione, e restarono soppressi le evacuazioni fecali. Tentai di rimediare a questo nuovo accidente coll'imposizione di frequenti lavativi emollienti, e col fargli ingojare in una decozione appropriata due libbre d'olio di ulive, le quali produssero una tale inquietudine al bue, che perduta ogni speranza di guarigione stimai di farlo uccidere.

§. V.

Aperto il cadavere esaminai primieramente i visceri contenuti nel torace, e nulla vi ritrovai di morbofo a riserva dei polmoni, i quali erano un po' sovraccarichi di sangue, ed alquanto infiammati: il qual accidente fu da me attribuito alla difficoltà, con cui il sangue circolava in questo viscere

(a) V. il mio Tom. II. sulle malattie esterne del cavallo pag. 32.

scere per la pressione continua del grande ventricolo sul diaframma.

Passai quindi all'esame della cavità del basso ventre, e non trovai vizio di sorte alcuna nella milza, nel pancreas, nel fegato, e nella vescica del fiele: gl'intestini crassi erano naturali, ed affatto sgombri di materie fecali, ma il colon era straordinariamente disteso da ventosità puzzolenti; al contrario negl'intestini tenui vi si scorgeva una tenuissima porzione di materie liquide fetenti. Il grande ventricolo detto volgarmente il *panzone* era enormemente gonfio. Fatto un taglio longitudinale per tutta l'estensione di questo viscere vi uscì una quantità d'aria fetente, e di sostanze solide, e fluide, per lo più di quelle prese negli ultimi giorni della malattia; osservai in seguito l'orifizio cardiaco alquanto dilatato, e sfoscio; nel resto questo ventricolo era sano, e naturale, salvo che si scorgeva alla sua grande curvatura la ferita da me fatta col *Trequarti*.

§. VI.

Nulla avendo ritrovato da appagare le mie brame, passai ad esaminare il secondo ventricolo detto la *cuffia*, e dai Francesi *bonnet*, *chapeau*, o *reseau*, e spaccandolo per la sua lunghezza m'avvidi, che tra la sua base ed il terzo ventricolo detto volgarmente il *millefoglio*, dai Francesi *mellier*, o *pseautier*, eravi un corpo bruno avvolto di foraggio, che per la sua capacità era arrivato ad otturare del tutto l'orifizio comunicante tra questi due sacchi. Estratto questo corpo vidi, che era un' egagropile di notevole grossezza (a), la quale col chiudere il passaggio degli alimenti al

Tom. V.

Ccc

(a) Questa egagropile unitamente alla descritta storia fu da me inviata al chiarissimo Sig. Co. Ignazio Somis di Chiaurie Medico di S. M., Professore primario di Medicina, e Capo del protomedicato, il quale mi fece l'onore di scrivermi la seguente lettera.

„ Ho letto con sommo piacere la

„ storia dell'egagropile, che si è compia-
„ ciuta inviarmi: ella è scritta con
„ diligenza, e con erudizione tale,
„ che stampandola le recherà onore.
„ L'osservazione è per quanto mi
„ ricordo singolare, e servirà di lu-
„ me in consimili circostanze ecc.

Torino addì 27. Gennajo del 1790.
Sottoscritto Ignazio Somis di Chiaurie.

terzo ventricolo aveva dato luogo a quella incurabile timpanitide, ed agli altri surriferiti accidenti. Continuai intanto ad osservare il terzo, e quarto stomaco, ma questi erano affatto vuoti, ed in perfetto stato di sanità.

§. VII:

Moltissimi sono gli scrittori, che parlano delle *egagropili*, che si trovano nei ventricoli de' ruminanti; ma la maggior parte sono d'accordo, che queste hanno soltanto la loro sede nel primo stomaco, che viziano la digestione quando sono giunte ad una certa grossezza, ma che non sono capaci di dare la morte all'animale. "I tori, dice il Sig. *Buffon*, le vacche, ed i buoi sono molto soggetti a leccarsi massime quando sono in pieno riposo,; e poichè si crede, che questo ne impedisca l'ingrassamento, si ha cura di strofinare col loro sterco tutte le parti del corpo, dove possono arrivare a leccarsi; quando non si usi questa cautela, colla lingua assai rozza alzano del pelo, e ne inghiottiscono in quantità grande. Siccome questa è una sostanza, che non si può digerire, ella si rimane nel loro stomaco, e vi forma de' gomitoli rotondi, che s'appellano *egagropiles*, e che talora sono di sì notabile grandezza da doverli tormentare pel volume, e per la dimora loro entro lo stomaco, ed impedirne la digestione. Questi gomitoli col tempo si rivestono d'una crosta bruna molto foda, che poi non è, che una mucilaggine spessa, la quale per lo strofinamento, e la cottura s'indurisce, e lucente. Essi non trovansi che nella pancia, e se negli altri stomachi c'entra del pelo, non vi si ferma, siccome neppure nelle budella, e passa visibilmente colla feccia degli alimenti (a). Il Sig. *Geoffroy* parlando delle *egagropili* è dello stesso sentimento del prelodato Sig. *Buffon* (b).

(a) Storia naturale degli animali quadrupedi Tom. II. pag. 114. Venezia in. o. 1782. Lo stesso *Buffon* dà la figura, e grandezza di varie *egagropili*. V. in seguito la descrizione del-

la parte del Gabinetto, che ha rapporto alla storia naturale del toro pag. 204.

(b) Mater. Medic. Tom. III. de quadruped. pag. 575.

§. VIII.

Michele Tonini definisce l'egagropile quel cumulo di peli, che si veggono talvolta radunati massime nel ventricolo del vitello, e che quasi ad arte sembrano disposti in forma di globo, o palla. Discendono questi peli nel ventricolo mediante il lambire, che fa il vitello se stesso, o la madre, o i compagni, e giungono tali animali ad inghiottirne qualche volta con tanta frequenza, ed in tanta copia, che queste palle, o egagropile si formano in una mole così prodigiosa, che sembrano la testa di un bambino, come nelle *Efemeridi* di Germania si legge; ma ordinariamente però acquistano il volume di un pomo, o per lo meno di un uovo (a). Non potendo il vitello, soggiunge l'autore, digerire l'egagropile, o farla passare negl'intestini, se ne sta melanconico, colla schiena incurvata, perde il ruminare, cessa dal succhiare il latte, e se ne muore, se non è prontamente soccorso (b): prescrive a tal effetto per ottenere la guarigione del vitello cinque once di olio di ulive unito a tre once di ranno dolce da darli per due volte nello stesso giorno, soggiungendo; che se malgrado il rimedio la palla non passa negl'intestini, allora è segno, che il di lei diametro supera quello dell'orifizio del piloro, ossia della bocca inferiore dello stomaco (c), on-

Ccc ij

(a) *Germanorum ephemerides sunt, quibus relatum legimus, vituli cujusdam sextum vitæ mensem agentis in stomacho, cumulum pilorum flavidorum, & quasi arte dispositorum fuisse reperi- tum. Hic figuram quasi rotundam, & magnitudine sua caput infantis repræ- sentabat, cujus originem vituli alius pilis, quem stabulo detentus ille de- lambrat, tribui posse censemus. Qui quidem topi mortem vituli, nisi ma- diando acceleraretur, dubio procul pro- ducerent. Frequentissima enim lanionum experientia comprobata res est, quod & taurorum, & boum, & vitulorum in stomachis, cumuli pilorum jam ovi, jam pugni magnitudine reperiantur. Tantus enim est, sic Cardanus, natu- ræ lusus, ut vel armenta interdum es-*

se velit ovipara. Tophos igitur, ovo- rum formam imitantes, pro ovis ha- buisse vides Cardanum. Geoffroy loc. cit. pag. 584.

(b) Io credo, che sia molto difficile il poter conoscere dagli accennati sintomi l'esistenza di un' egagropile nei ventricoli di un vitello, e qualora il maniscalco avesse una tale abilità egli è impossibile per poco che sia voluminosa di farla passare con qualche rimedio nel tubo intestinale e successivamente fuori del corpo. L'ignoranza dell'Autore nella scienza Anatomica ha dato luogo a sì strabocchevole errore. Dirò col Sig. Vitet: sans l'anatomic la médecine ne présente qu'incertitude & danger.

(c) Il piloro nei ruminanti, che so-

de convien ben tosto mandarlo al macello per prevenire l'irreparabile morte con minor perdita (a) .

§. IX.

Diderot (b), e l'eruditissimo Abate *Rozier* (c) dopo aver dato la definizione delle egagropili, ed aver fatto vedere quest' ultimo, che quelle, che sono vestite di una crosta nera, e soda, provano soltanto la loro lunga esistenza, ma non differiscono dalle altre, che sono nude, essendo amendue composte di peli, conchiudono, che parecchi Autori hanno attribuito una virtù alexisfarmaca, e diaforetica alle egagropili date internamente agli uomini, ed agli animali, che altri ne raccomandano l'uso ne' morbi epizootici, e contagiosi, e che molti seguaci di *Velschio* le credono buone per il flusso di sangue, per le emorragie, per le vertigini ecc. Si può dare di più ridicolo, che l'attribuire simili proprietà alle egagropili? *N'y a-t-il pas de l'absurdité d'attribuer des pareilles vertus à des semblables productions?* (d).

§. X.

Il *Ramazzini* racconta, che nell' Epizoozia dell' anno 1711 si ritrovò nel terzo stomaco de' buoi, detto dai Latini *omasus*, una massa dura, e compatta, aderente alle sue pareti, d'un odore insopportabile, la quale egli considerò come il germe del miasma contagioso. *Illud vero corpus durum, & compactum ad inflar calcis, quod in omaso observatur, primum*

no dotati di quattro ventricoli, trovansi all' estremità inferiore dell' ultimo ventricolo detto il *coagulo*, dai Francesi *caillette*, *franche mulle*, dai Latini *obomasus*; e siccome la sede dell' egagropile è soltanto nel primo, o secondo stomaco, così non è possibile, come già abbiamo detto, che pel suo diametro possa superare l'orifizio, che comunica col terzo stomaco, passare consecutivamente per i foglietti del centopelle, e portarsi

al piloro. Quel che è certo, non si sono mai trovati tali corpi negli ultimi due ventricoli, nè nel tubo intestinale, nè tampoco si sono colle feccie evacuati.

(a) Manuale del Maniscalco pag.

43. 44.

(b) Encyclopedie au mot *Egagropile*.

(c) Dictionnaire d'agricul. au mot *Egagropile*.

(d) *Rozier* ivi.

productum esse contagiosi miasmatis pro certo habeo, dum tacite sevitiem suam exercens, stomachicum fermentum labefactat, & corrumpit (a). Il *Lancisi*, che descrisse parimente questa Epizoozia, pretende che quella massa di fieno nera, che si è osservata nell' *omaso*, e che rassomiglia a ciò, che *Plinio* chiama *juvencarum topus*, non sia altro, che un' egagropile formata, com' egli dice, dai peli, che gli animali portano via colla lingua nel leccarsi, e che cadono nello stomaco mischiati colla saliva (b).

§. XI.

Narra *Adam Jensei*, che nell' Epizoozia del 1712, che attaccò il bestiame nella bassa Ungheria, si ritrovarono nel ventricolo di più animali delle egagropili della grossezza di una noce, rivestite di una membrana molto forte, le quali con molta difficoltà si potevano tagliare (c).

§. XII.

Mi giova sperare, che questo tenue mio lavoro farà gra-

(a) De contag. Epid. an. 1711.

(b) *Dissertatio historica de bovillapese an. 1711.*

(c) *Constit. Epidemic. Hungariæ inferioris an. 1712* Notisi, che le egagropili ritrovate nel ventricolo degli animali bovini in tempo di epizoozie non debbono considerarsi come una causa morbifera, come pare che siasi preteso dal *Lancisi*, e da *Adam*. Le palle di foraggio dure, appiattite, e quasi abbruciate, che ben sovente s'incontrano nei foglietti dell' *omaso* sì nelle epizoozie, che in molti altri morbi, possono essere qualche volta un accidente della malattia, ed altre volte la prima causa del miasma contagioso, come ha osservato il citato *Ramazzini*. Può anche accadere, che in quelle palle formate dagli alimenti induriti, e divenuti neri pel vizio de' fughi gastrici, e per l'infiammazione dell' *omaso* s'incontrino talvolta dei

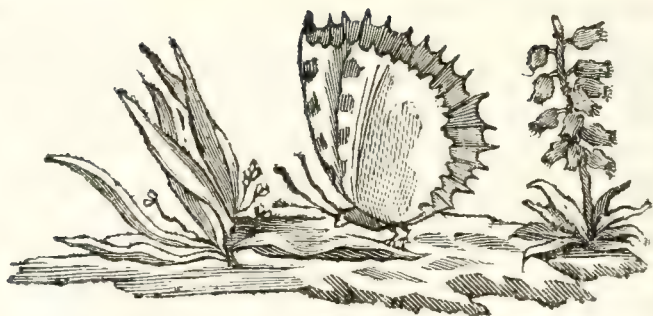
peli framischiati insieme se la massima malattia è comparsa nel tempo della *mu-da*, in cui gli animali bovini per le ragioni superiormente addotte ne ingoiano una quantità, ma non per questo dobbiamo supporre, che i peli in simili casi osservati possano aver dato origine al morbo.

Egli è costante, che le egagropili non cagionano alcun danno all'animale, salvochè per la troppa grossezza impediscono il passaggio agli alimenti, perchè io ne conservo alcune, che sono state a caso ritrovate dai macellaj nel panzone de' buoi, e vitelli stati macellati sani, sanissimi: fra le quali una se ne ritrovò di un volume considerabilissimo, la quale fu da me presentata al Sig. Marchese di *Berzese* Brigadiere di Cavalleria, e Membro della R. Accademia delle Scienze di Torino.

dito dai Fisici, perchè tratta di un corpo eterogeneo molto familiare ne' ruminanti, il quale si è dalla maggior parte degli scrittori creduto, che si formasse nel primo stomaco, nè più oltre passasse, nè fosse capace di dare la morte, come si è osservato nel nostro caso.

Mi sia dunque permesso, dottissimi, e rispettabilissimi Accademici, di presentarvi come un contrassegno di mia servitù, e del mio più profondo rispetto questa Memoria, la quale vi supplico ad accettare come uno di quei lavori, che possono in qualche modo meritare la vostra attenzione.

Trino 4. Marzo 1790



S E Z I O N E

DI UN CADAVERO.

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

Nella Storia Anatomica Medica, compilata dal *Lieutaud*, e riordinata dal *Portal*, si legge fra i casi più rari e stravaganti una Osservazione dello stesso *Lieutaud*, contenente la sezionè del cadavero di un uomo gran bevitore, che morì dopo aver patiti de' dolori ricorrenti che sembravano reumatici. Trovossi in esso con istupore de' risguardanti una porzione del ventricolo entrata nella cassa del petto per un foro che era nel diaframma, a guisa d'ernia all' insù (a). Nella Storia che io sono qui per narrare si espone un caso egualmente strano, e forse non più veduto: la sezionè cioè del cadavero di un infelice uomo bevitore del pari, in cui trovossi la milza salita e concentrata dentro il ventricolo per una grande apertura, che era in esso, nella parte a quella risguardante.

Antonio Franzoso, di professione macellajo, uomo corpulento e pingue, ozioso, ed agitato da una forte e diuturna passione di animo, essendo nell'età sua di anni presso a sessanta, cominciò a provare di tratto in tratto de' dolori di stomaco, a guisa di una colica ricorrente: i quali in pochi giorni cedevano all'uso dell'olio di mandorle dolci, del siero di latte, e di qualche missione di sangue. Poco dopo divenne magro e scarnato, e cadè in una profonda malinconia. Allora se gli manifestò al sinistro ipocondro una dolorosa tumefazione, per cui sospettai di un mal purulento alla milza. Rifiutando ogni sorte di alimento, provato in va-

(a) Lib. 2. sect. 6. art. 3. n. 779.

no per alquanti dì per consiglio di un altro Medico l'estratto di cicuta, febricitante e tabido morì li 28 di Dicembre del passato anno 1789.

Fu demandata da questo pubblico Uffizio di Sanità la licenza di aprire il cadavero all'esperto Chirurgo Sig. *Luigi Monterossi*: il quale poi nei seguenti termini ne presentò la relazione.

„ Veramente è cosa rara da sapersi (come io
 „ già rinvenni nello sbarro del sopradetto cadavero) la par-
 „ ticular malattia tumorosa del ventricolo: la rottura del
 „ suddetto: e più la copiosa materia marcia e sanguinolenta
 „ scaricata in detto viscere della milza: e l'ingresso della
 „ milza entro il ventricolo Prima di tutto vidi il
 „ ventricolo, ch'era reso scirroso e tutto ostrutto. La sua
 „ figura quasi perduta e alquanto piccola; il suo colorito al-
 „ terato, tendente al giallastro rossigno smorto; la cavità
 „ impoverita e piuttosto piccolissima; la sua sostanza ingros-
 „ sata straordinariamente. Indagata e tagliata la sua sostan-
 „ za e tessitura, la rilevai vasculosa, scirroso, contenente
 „ molti corpi glandulosi, avente molta materia di qualità
 „ sebacea e di colorito biancastro. Alla sua parte sinistra e
 „ obliquamente inferiormente ho veduto un pertugio fatto
 „ dalla suppurazione nata dalla milza; e la milza internata
 „ nel sopradetto viscere: e le membrane erano tutte sfacella-
 „ te e consunte. La materia effusa dalla milza al ventricolo
 „ era in gran copia, di qualità sanguinolenta marcia; che
 „ perfino si empirono li primi intestini, dimostrando il sud-
 „ detto colorito. La milza, che era tumorosa e grossa fuori
 „ di modo da prima, era annichilata, di colorito fosco e
 „ *nogaraceo*, consunta e sfacellata, ridotta come una borsa
 „ vuota, e conteneva solamente certa porzione della suddet-
 „ ta materia del suo ascesso. „ Fin qui il Chirurgo.

E' cosa molto ordinaria e comune il trovarli ne' cadaveri per forza di morbo agglutinate insieme, aderenti e congiunte viscere e parti che secondo natura sono staccate e disgiunte. Spesso il polmone o tutto o in parte si trova unito e aderente alla pleura. Qualche volta il fegato si attacca al ventricolo, o alla parete del ventre, dove se ne aprono degli ascessi all'esterno che la sua interna materia al di fuori trasportano.

portano . Questo pure succede ne' reni: i quali tal volta la loro purulenta materia generata per l'intraversatura de' calcoli tramandano dal dorso. Qui pure abbiain noi ultimamente con nostro stupore nel cadavero di un Signore morto per uno sfracellamento del sinistro rene veduta una mirabile morbosa congiunzione del rene medesimo col vicino tratto dell' intestino colon: nel centro della quale stava aperto un foro di comunicazione, che portava liberamente la marcia del rene dentro l'intestino, e cagionava una perpetua diarrea dell' infermo, la quale era purulenta: di cui non sapevano i Medici assistenti trovare una sufficiente ragione. Sembra che avvengano queste morbose concrezioni per effetto della infiammazione, qualora per essa disseccasi quella untuosa umidità che naturalmente copre e rimpalma la superficie delle viscere, per la quale conservansi sdrucchiole e sfaccate, onde dal morbo gonfie e una contro dell'altra compresse si uniscono e internano. Per la quale stretta unione avvien altresì che il loro morbo da una all'altra passa a comunicarsi: come succede alla giornata ne' morbi infiammatorj del petto, che nel sito del polmone infiammato si trova aderente la pleura, e con esso contaminata: ignorandosi ancora dopo tante aperture de' cadaveri in quale di queste parti stesse a principio fitto il morbo.

Nel caso nostro una vita sedentaria ed oziosa in corpo pingue e di mollissima fibra, un animo inquieto, e da forte e diuturna passion d'animo ingombrato, avranno probabilmente cagionata qualche ostruzione di milza. Questa viscera era tenuta da' nostri Antichi per sede dell' affezione ipocondriaca. Ma è più giusto il dire che quella che essi tenevano per causa fosse effetto: e che infatti ne' morbi ipocondriaci non a principio ma in fine dopo lungo corso melanconico la milza venga ad ingrossarsi e a patire. In questa viscera scorre il sangue proveniente dalla vena porta assai tardo, e però tenace e concreto qual atra pece. La sua tessitura e sostanza è sfoscia e cellulosa, e però atta ad ingombrarsi da un sangue lento che passa: massimamente se non sia promosso il suo giro dall'azione del corpo. Queste ostruzioni però per tal causa nate sono di natura croniche e fredde, rade volte passano a farsi infiammate e a suppurare; e

solo son valevoli a produrre qualche molesto peso, ostinate febbri periodiche, o gonfiamenti d'idropisia. Ma se lo stomaco in tale circostanza si trovi, come fu nel *Franzoso*, quotidianamente repleto e disteso da enorme quantità di cibo grossolano e difficile e di vino pretto infiammante, compresso esso stomaco alla sottoposta milza, può far trapassare in essa una forza infiammante, e farla passare da uno stato di ostruzion fredda in quello di una infiammazion vera e suppurativa.

Nel cadavero trovossi guasto e suppurato tanto il ventricolo come la milza. Qual di queste due viscere fu la prima ad essere offesa dalla infiammazione? Attendendo io al corso primo del male, non dubito di asserire che fu dal principio offeso il ventricolo: perchè prima ancora che apparisse vestigio alcuno di durezza o enfiagione al sito della milza, fu travagliato l'uomo da una colica ricorrente di stomaco, che mostrossi prodotta da infiammazione dalla utilità, che recarono i salassi, gli oliosi, ed il siero di latte. Questo però poco importa il definire: stantechè torna la cosa al medesimo effetto, o vogliasi dalla milza cominciato il morbo, ovvero dallo stomaco. La suppurazione in seguito di una o d'altra parte, o di tutte due insieme logorando a poco a poco e consumando le fibre, si è aperto da una all'altra parte un foro di comunicazione, che faceva la marcia comune.

Perchè traforato il ventricolo non caddero gli alimenti nella cavità del ventre? In un somigliante caso di ventricolo traforato tale interrogazione fece il *Mezzavia* al *Morgagni*: *Cum autem esset in medio fere ulcere ventriculus penitus perforatus; ex me querebat Mediavia, num censerem potuisse forte id foramen per incuriam cultro fieri, dum ventriculus eximebatur; nihil enim vel diligenti perquisitione repertum esse affirmabat in ventre præter aliquid feri in ima pelvi, quod fortasse ex ventriculo dici posset effusum, cum tamen in muliere perpetuo decumbente multum videretur effundi debuisse.* Quanto segue ebbe per risposta dal dottissimo uomo: *Ego vero etsi minus veri simile existimabam, si cultro ladi ventriculus fortuito debuisset, in ea potissimum sede læsum esse, quæ medio ulceri responderet, nec forma, & magni-*

tudo foraminis, quod capax erat propemodum apicis minimi digiti, ea viderentur quae facile ad cultelli mucronem, aut aciem referri possent; tamen ut ipsi, mihiq̃ue simul verum dignoscere cupientibus satisfacerem iterum ac tertio foraminis oras accurate inspexi. Quas cum viderem non modo callosas, sed inaequales, & quo magis extrorsum foramen pergebat, eo minorem ambitum complectentes, quae duo certe ab exterioribus introrsum illapsus culter minime facere potuisset; non huic sed morbo imputandum esse foramen censui. Nam quod nihil effusum esset in ventrem, inde fieri potuisse quod paulatim quidem extenuata esset membranula extima, nec tamen penitus nisi extremo tempore erosa demum atque pertusa, cum videlicet moribunda mulieris contractus & corrugatus ventriculus nihil haberet quod effunderet (a). Questa ottima spiegazione convenientissima al caso narrato non compete per nulla al caso nostro. Perchè in questo non trattasi di una piccola apertura che poco prima della morte potesse essere nell'esterior parte ancor chiusa da un resto di membrana: ma si tratta di una grande apertura capace di accogliere la sottoposta milza. Altra ragione però bisogna rintracciare a render conto perchè non sieno fuor di essa caduti gli alimenti e spanti nel ventre. La ragione di questo stranio avvenimento si può trarre dal riflettere che non in un punto solo, ma in grande estensione sarà stata la milza aderente e conglutinata al ventricolo: d'onde poi nata la suppurazione in una o altra parte, questa a poco a poco logorando la superficie di amendue le viscere s'è aperto un foro di comunicazione da una nell'altra: il qual foro certamente dovea farsi nel centro, e non ne' lati della adesione. In questa maniera il foro nel contorno era chiuso, e non dava luogo di spandersi in cavità del ventre nè alla materia purulenta, nè a quella che dentro cadeva per alimento nel ventricolo: e restava dentro la milza chiusa come dentro una borsa: o rigurgitava al ventricolo, e dopo si distribuiva agl' intestini come fu veduto e dichiarato dal Chirurgo che la trovò nel

D d d ij

(a) De Sedibus ec. lib. 3. epist. 29. art. 14.

cadavere in que' siti simile a se stessa e della stessa natura e colore.

Tanto avvenne nel caso di una femmina, narrato dall' *Allero*, (a) nel di cui cadavere trovossi una forte coesione dell' intestino colon al ventricolo, coll' aperto passaggio di una nell' altra parte, senza che si faccia menzione di alimenti, o fecce intestinali spante nel ventre; come certamente niente della copiosa fetidissima materia del rene cresciuto e congiunto nel cadavere del sopra descritto Signore si spandeva nel ventre per il foro di comunicazione che stava aperto fra il rene ed il colon intestino.

Per qual forza, e in qual tempo la milza vuota di sostanza e dentro confunta dalla putredine è salita ed entrata per la morbosa apertura dentro il ventricolo? Può questo insolito accidente essere intravenuto nella respirazione. In essa riempiendosi di aria il petto, si abbassa il diaframma, preme questo sopra il ventricolo, e sopra le parti inferiori, le quali quindi urtano per ogni lato e tentano d' insinuarsi ove trovano minore la resistenza. Così in quel tempo può essere entrata nel vacuo ventricolo la vicina sottoposta milza. Ma ben anche questo può essere nato facilmente in uno sforzo di tosse o di starnuto: nella pressione de' muscoli del ventre nell' evacuare le fecce intestinali, nel piegare a terra la persona, o in qualche altra simile occasione. Nè repugno se altri creda meglio che nato sia questo fenomeno dopo morte, o per lo costringimento che il freddo esterno produce nella pelle, o per la soverchia dilatazione degl' interni spazj del ventre originata dalla putredine che l'aria interna gonfia e dislega. Molte lesioni si trovano ne' cadaveri, le quali da' meno periti si credono costitutive della malattia antecedente degl' infermi, quando sono puri effetti di essa nati poco prima o dopo la morte.

CATERATA IDROMETRICA

PROPOSTA

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA.

§. I.

POchissime sono le derivazioni di acqua che si fanno dai fiumi per uso degli uomini, le quali non sieno di limitata quantità, sì perchè è limitato il bisogno che n'hanno coloro che ne fan uso, e sì ancora perchè deve avere un limite l'impoverimento del tronco, e l'obbligazione de' terreni pe' quali è forza che tragittino le acque derivate. E tanto più gelosamente suol essere prescritta la misura delle derivazioni, quanto più si moltiplicano sul medesimo fiume, e si suddividono nel condotto le estrazioni. In tre modi adoperano gli uomini comunemente per limitare queste misure, lasciando da parte i tisoni galleggianti, e altre artificiose maniere che non possono felicemente praticarsi e aver effetto in grande, come l'hanno in piccolo. Il primo consiste nel praticare delle aperture di lume determinato nelle sponde del fiume, ond'escia l'acqua a sua posta. Il secondo nell'armare d'imposte di legno, chiamate dagl'Italiani paratoje, dette aperture, onde calarle e rialzarle secondo che si alza e si abbassa il fiume, perchè nell'acqua del condotto abbia sempre luogo la medesima altezza sensibilmente; e finalmente una terza maniera v'ha ancora consistente nel costruire nel medesimo condotto a qualche distanza dalla prima un'altra apertura determinata, regolando la prima secondo le vicende del fiume in guisa, che sopraffaccia sempre alla foglia della seconda apertura una data altezza di acqua, cioè al dir nostro comune un dato battente. Del primo modo è inutile che si faccia parola non avendo luogo che in quelle contrade, ove tuttora si misura buonamen-

te l'acqua per due dimensioni, trascurando il più e meno di velocità ond'è animata sotto il più e meno di altezza che ha il fiume sopra il medesimo foro. Degli altri due il terzo è il più esatto e corrispondente al fine dell'idrometria, di cui abbiamo in Lombardia e altrove più d'un esempio. A questo si riduce pure l'artificio con cui si estrae l'acqua da' così detti *Navigli* di Milano, descritto del 1779 dal Sig. *Francesco Bernardino Ferrari*, e contro di cui aveva per l'innanzi declamato a torto il fu d'altronde reputatissimo Sig. Ab. *Frisi*. Se qualche cosa avesse da desiderarsi in simili derivazioni, ella sarebbe una condizione nell'acqua interposta tra la prima e la seconda apertura più analoga a quella dell'acqua contenuta ne' vasi a costante altezza sopra i fori di efflusso, cioè la condizione dell'acqua perfettamente ringorgata. Senza questa uniformità di condizioni non può rigorosamente applicarsi alla derivazione la teorica de' vasi. Imperciocchè in tutti i casi che ho potuto esaminare non mi è accaduto giammai di riconoscere in quell'intervallo, e segnatamente in vicinanza della seconda bocca, l'acqua costituita in istato di ringorgamento, come ho dimostrato esser ella ne' vasi (Mem. della Soc. Italiana Tom. IV.), e però con la superficie orizzontale e quieta sensibilmente (§. IV. della I. Mem. di questo volume). Ho sempre veduto, che un'acqua si affacciava alla bocca a un bel circa corrente.

§. II.

Tutto dunque consiste l'artificio di questo metodo nell'alzare ed abbassare pazientemente l'imposta della prima cateratta, aumentando e scemando il foro per tentativi finchè il pelo dell'acqua tocchi un segno stabilito, e si riduca sopra la seconda apertura all'altezza modulare convenuta. Ma il magistero è alquanto difettoso, perchè oltre alla soggezione perpetua del caterattajo di cercare il segno aspettando ad ogni mossa dell'imposta la permanenza del nuovo stato d'acqua nel castello, è cosa indubitata, che le piccole variazioni nel fiume sfuggono, e sfugge anche gran parte delle maggiori, se accadano nottetempo, o in assenza del custode. Sarebbe dunque desiderabile

I. Che fosse tolta interamente la soggezione di tentare , e che si riducesse l'inspezione del custode a calare od alzare l'imposta tanto nè più , nè meno , quanto contrariamente si fosse alzato od abbassato il fiume , o secondo qualche determinata proporzione cogli alzamenti od abbassamenti del fiume .

II. E molto più che l'operazione fosse fatta dal fiume medesimo senza custode per qualche facile meccanismo , sicchè ogni minima crescenza o decrescenza nel fiume inducesse da sè il proporzionato scemamento o accrescimento di luce alla cateratta . Questo è l'oggetto utilissimo cui tende a soddisfare la presente Memoria .

§. I I I .

Cominciamo pestanto dal supporre nota e determinata in pollici cubici la quantità di acqua che si vuol estrarre dal fiume , a cagion di esempio per ogni minuto secondo . Siccome è stato mostrato nella Mem. precedente come vadano ridotti i così detti quadretti di acqua , le oncie ecc. secondo le denominazioni de' paesi in piedi e pollici cubici , così basterà che segniamo qui con la lettera $\mathcal{Q}$ una tal misura ch'è proposito di derivare . Condizione del nostro assunto è , che l'apertura di efflusso riesca ad ogn'istante tanta , quanta occorre per tirar dal fiume costantemente la quantità di acqua $\mathcal{Q}$ sotto l'altezza che ha il fiume in quell'istante . Ed è pure condizione assunta , che nella cateratta variabile così costituita tanto solamente debba calarsi ad ogni mutazione del fiume , od alzarsi verticalmente l'imposta o paratoja , quanto nè più nè meno si fosse contrariamente alzato od abbassato verticalmente in quella mutazione il pelo del fiume , o secondo qualche determinata proporzione con dette mutazioni . E' dunque mestieri , che livellata col fondo del fiume la foglia di questa cateratta , gli stipiti abbiano una figura tale , onde possa soddisfarsi a questa condizione puntualmente . Posto ciò sia l'orizzontale AB (*Fig. 1.*) la foglia di questa cateratta , e le curve AP $B\mathcal{Q}$ simili ed eguali rappresentino gli stipiti della cateratta . Condotta ovunque l'orizzontale IK , sia proprietà caratteristica di que-

ste curve, che il prodotto dell'area $AIKB$ da esse compresa per la velocità v , onde debbono intendersi animate le stille uscenti sotto l'altezza attuale del fiume, come CE , uguagli la costante quantità $\mathcal{Q}$. Divisa pertanto in due ugualmente in C la AB , sia l'indefinita CD perpendicolare ad AB l'asse delle ascisse, e C l'origine delle coordinate; e però, presa $CM = x$, $MI = y$, $Mm = dx$, e per m condotta la ab parallela alla IK , farà l'elemento dell'area $Miam = ydx$, e $AIKB = 2ydx$; in conseguenza, essendo l'area $AIKB = 2 \int ydx$ dovrà essere in qualunque sito $2v \int ydx = \mathcal{Q}$. Ora per ridurre a due variabili quest'equazione bisogna trovare la relazione convenevole tra v ed x , giacchè sul medesimo asse delle x CD deve misurarsi anche l'altezza variabile del fiume CE imminente alla foglia AB . Per la qual cosa sia cd la superficie del fiume altissimo, onde CD riesca la massima altezza con cui può egli soprastare alla foglia. Tutte le mutazioni del fiume dovendo accadere sotto l'ultimo limite cd , si riferiscano gli abbassamenti e rialzamenti del pelo al punto D , e di là in giù si misurino sopra la DC . Si faccia perciò $CD = f$, qualunque mutazione $DE = z$, onde sia $f - z$ l'altezza attuale CE del pelo d'acqua sopra la foglia, $f - z - x = EM$ l'altezza attuale dell'acqua sopra il labbro dell'apertura IK , e le curve cardinali AL , BN abbiano quest'altra proprietà, che $f - z - x = EM$ rappresenti l'altezza dovuta alla velocità ragguagliata v delle stille uscenti dalla luce sottoposta $IKBA$. Secondo i principj noti della Dinamica farà $v = \sqrt{f - z - x}$, e però combinando insieme le due proprietà di queste curve, dovrà aver luogo la seguente equazione

$$2 \sqrt{f - z - x} \times \int y dx = \mathcal{Q}$$

Ma per condizione del Problema alle mutazioni verticali z del fiume sotto il pelo altissimo debbono rispondere in data proporzione contrariamente le mutazioni delle altezze verticali delle luci all'emissario; è dunque necessario, che si determini un punto per origine di queste mutazioni nelle aperture, com'è fissò il punto D da cui si misurano le mutazioni nel fiume. Il punto C nella foglia non può esserlo, altrimenti sotto l'altezza massima non sarebbe preparato alcuna

alcuna uscita, e in tal caso dovrebbe star chiusa la cateratta, che può essere, e può non essere necessario. Laonde bisogna determinare una luce, come $AGHB$, la quale, quando il fiume è altissimo, trasmetta la data quantità di acqua $\mathcal{Q}$. Sia dunque presa $CF = a$, e si trasporti in F l'origine delle mutazioni $FM = t$, che debbono corrispondere contrariamente a quelle del fiume, onde sarà $x - a = t$, e sia stabilito ch'esser debba generalmente $DE(z) : FM(t) = n : 1$, secondo la condizione del Problema, posto n numero intero. Per la qual cosa sarà $z = nt = n(x - a)$. Sostituito questo valore di z nell'equazione fondamentale, avremo

$$2 \int \sqrt{f - n(x - a) - x} \times y dx = \mathcal{Q}$$

Ma $f - n(x - a) - x$ non è in fatto un'altezza libera a cui sia dovuta la velocità $v = \sqrt{f - n(x - a) - x}$. Ella è un'altezza di acqua che sovrasta al foro attuale, e di acqua che deve supporre in istato di ringorgamento perchè possa cadere sotto la legge de' vasi, sicchè sotto un tal carico non hanno le stille uscenti velocità dovuta a tutta l'intera altezza sovrastante; perciò l'equazione trovata ha bisogno di correzione. Inerendo pertanto a quanto abbiamo stabilito nella Mem. preced. §. §. IV. V. sarà

$2(f - n(x - a) - x) \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^3$ la vera altezza ridotta,

e la nostra equazione prenderà questa forma, facendo

$$K = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sqrt{f - n(x - a) - x}$$

$$2 \int y dx = \frac{\mathcal{Q}}{K \sqrt{f - n(x - a) - x}}.$$

Differenziando, e dividendo per $2dx$, si avrà l'equazione ad un ramo della curva AL della forma seguente

$$(A) \dots y = \frac{(n + 1) \mathcal{Q}}{2K(f - n(x - a) - x) \sqrt{f - n(x - a) - x}}$$

la quale appartiene ad un'Iperboloide, di cui è uno degli asintoti la CD , che descriveremo per punti assai facilmente qui appresso.

§. IV.

Veggiamo dunque primamente della luce $AGHB$ che abbiamo stabilito per l'acqua giunta al più alto segno D . Cominciando gl'incrementi verticali delle aperture dal punto F , è certo, che da C fino al punto F è costante l'altezza $CD = f$, e il pelo dell'acqua cd non s'alza, nè si abbassa, stante che si suppone la luce $AGHB$ trasmettere la quantità di acqua $\mathcal{Q}$ sotto l'altezza massima. E' dunque in questo caso $n(x-a) = z = nt = 0$, e vale per questo tratto l'equazione

$$(A') \dots y = \frac{\mathcal{Q}}{2K(f-x)\sqrt{f-x}}$$

Sicchè posto $x=0$, sarà $CA=y=\frac{\mathcal{Q}}{2Kf\sqrt{f}}$, e posto

$x=a=CF$, sarà $FG=y=\frac{\mathcal{Q}}{2K(f-a)\sqrt{f-a}}$, e pren-

dendo per x valori successivi da $x=0$ fino ad $x=a$, si troveranno le semiordinate intermedie della curva da A fino in G . Dal punto F poi dell'assintoto verso D vale per tutti i punti della curva GL l'equazione (A) (§. III.), dovendo crescere in altezza le aperture sopra il punto F secondo che si abbassa il fiume sotto il pelo altissimo cd con la legge stabilita, che sia l'incremento FM la n^{ma} parte del decremento DE del fiume, e così contrariamente, tornando a rialzarsi il fiume. Se sia dunque gb il pelo infimo del fiume, e si prenda Fq parte n^{ma} del massimo decremento $Dp=b$, sarà definito il limite dell'altezza verticale di tut-

ta la cateratta, la qual altezza sarà $Cq = a + \frac{Dp}{n} = a + \frac{b}{n}$,

onde pigliando successivamente tutti i valori per x nell'equazione (A) maggiori di a , e minori di $a + \frac{b}{n}$, si avranno le

semiordinate intermedie della curva da G fino in P , e sarà la semiordinata massima

$$qP=y=\frac{(n+1)\mathcal{Q}}{2K(f-a-\frac{n+1}{n}b)\sqrt{(f-a-\frac{n+1}{n}b)}}$$

posto $x=a+\frac{b}{n}$. Costrutti similmente i rami negativi BH , $H\mathcal{Q}$, la cateratta intera farà $AP\mathcal{Q}B$.

§. V.

E per la pratica ci gioveremo del modo facile che l'equazione ci addita, onde descrivere questi rami per punti con le tavole de' logaritmi. In fatto l'equazione (A') per gl' infimi AG , BH , si riduce a questa forma

$$y(f-x)^{3:2}=\mathcal{Q}:2K, \text{ e però } l.y=l.\mathcal{Q}-l.2K-\frac{1}{2}l.(f-x)$$

Così l'equazione (A) pe' rami GP , $H\mathcal{Q}$ si riduce a questa

$$y(f+na-(n+1)x)^{3:2}=(n+1)\mathcal{Q}:2K,$$

da cui risulta

$$l.y=l.(n+1)\mathcal{Q}-l.2K-\frac{1}{2}l.(f+na-(n+1)x),$$

onde non può avervi uomo appena iniziato in sì fatte materie, che non possa secondo l'occorrenza descrivere sopra un cartone entrambi i rami della nostra curva, che debbono essere gli stipiti della cateratta, perchè dall' artefice ueno poscia in pietra o legno incavati full' esemplare facilmente.

§. VI.

La lettera K è già determinata, ed è uguale alla frazione $\frac{65}{96}$ assai prossimamente. E quanto alla lettera a , cioè

all'altezza CF della luce che trasmette la quantità di acqua $\mathcal{Q}$ sotto la massima altezza del fiume, ella è in arbitrio nostro. Ma siccome la posizione della foglia è sempre determinata da detta altezza massima $CD=f$, essendo $AB=2CA=\frac{2}{Kf\sqrt{f}}$

così potrebbe farsi dipendere l'altezza $CF=a$ dal valore

E e e ij

convenevole che si volesse dare alla massima larghezza della cateratta

$$PQ = 2qP = \frac{(n+1)Q}{K(f+na-(n+1)x)\sqrt{(f+na-(n+1)x)}},$$

disimpegnando il simbolo a dall'equazione. Gioverà però sempre il dargli un piccolo valore relativamente all'altezza f , affinchè riesca la cateratta di discreta ampiezza, influenzando questo valore essenzialmente in quello delle ordinate della curva.

§. VII.

Ed ecco la cateratta idrometrica proposta nel titolo di questa operetta. Imperciocchè incavata che sia la figura $PABQ$ (Fig. I. II.) in pietra o in legno, e murato l'emissario con questa bocca armata d'imposta che s'alza ed abbassa pe' suoi canali secondo il costume, s'intende facilmente come vada moderata la luce secondando la condizione del fiume. Immaginiamo segnata verso il fiume la scala delle sue mutazioni (Fig. III.) dal punto sommo D fino all'infimo p ; bisogna contrassegnarne un'altra qF , nella quale sia notato il cammino della paratoja contrariamente dal punto infimo F fino al sommo q per modo che, come Fq deve essere la n^{ma} parte di Dp , così ciascun segmento della Fq riesca la n^{ma} parte della corrispondente mutazione del fiume segnata nell'altra scala. Come per esempio, se le mutazioni nel fiume dovessero essere sempre doppie delle mutazioni contrarie nella paratoja, sicchè per ogni misura di abbassamento o rialzamento nel fiume dovesse contrariamente rialzarsi o abbassarsi di mezza misura la paratoja, bisognerebbe prendere per seconda scala la qF metà della Dp , e dividerla in tante parti eguali in quante fosse divisa la Dp , e segnare le divisioni della medesima qF cogli stessi numeri della Dp , ma contrariamente posti. Così essendo il fiume al punto sommo D , la sommità o altro punto fisso della paratoja dovrebbe essere in F , perchè il labbro inferiore fosse nella linea GH (Fig. I.); e trovandosi il fiume in p , il punto fisso della paratoja dovrebbe essere in q , e così degli

altri punti intermedj, ben intendendosi, che quando non si volesse trasmettere acqua nelle massime piene, basterebbe calare la paratoja oltre il punto *F*, e farla ripofare fu la foglia *AB*.

§. VIII.

E' dunque soddisfatto il primo assunto di costruire una cateratta, che trasmetta in ogni stato del fiume la stessa quantità di acqua $\mathcal{Q}$, senza necessità che la si governi a tentoni, ma sì bene per determinate misure abbassando e alzando la paratoja secondo le condizioni del fiume. E' raro il caso, che tanta sia la differenza tra la massima e minima altezza, onde, per non dar luogo a cateratta di smodata elevazione, convenga assumere per n numero maggiore del 4, o del 6; anzi ne' moderati canali potrebbe anche accadere, che tanto bastasse calare o alzare la paratoja, quanto nè più nè meno si fosse alzato od abbassato il fiume. Ma già la regola nostra è fatta per tutti i casi.

§. IX.

Resta ora che indichiamo, come potrebbe ottenersi, che anche senza custode, per mezzo di un facile meccanismo, obbedisse la paratoja da sè alle mutazioni del fiume. Ancorchè io estimi, che la pratica possa e debba contentarsi del modo sopra esposto, il quale non altro richiede dal custode fuorchè un momento di osservazione alla scala del fiume per collocare al segno corrispondente la paratoja; ciò non ostante, non essendo impraticabile quello pure che son per esporre, mi fo qui a dichiararlo per soddisfare anche al secondo assunto. Supponghiamo pertanto conosciuto il peso assoluto della paratoja compiuta, che diremo P , e sia P' la n^{ma} parte del peso P , essendo n il simbolo adoperato qui innanzi per gli abbassamenti e alzamenti della paratoja relativamente alle mutazioni verticali del fiume. S'intenda sospesa la paratoja *A* ad un sistema di carrucole *BB* (Fig. IV.), tante di numero quante occorrono, secondo i principj della Statica, perchè il peso $P' = P : n$ applicato in *F* faccia equilibrio

con la paratoja o col peso P , ch'è cosa facile da conoscere. Messa a suo luogo la paratoja con le taglie, si sperimenti quanto debba aggiugnerli al contrappeso P' , onde alzare effettivamente la paratoja immersa nell'acqua verticalmente, come deve stare, vincendo gli sfregamenti, la rigidezza delle funi, e la resistenza dell'acqua che le sta accollata, e sia p la giunta necessaria. Ciò supposto, si prepari una cassetta di legno a conca, la quale gravata oltre al proprio peso anche dal peso p galleggi tuttavia sull'acqua; di tale forma però che possa contenere nella sua capacità il peso $P' + p$, e la si commetta al fiume come in DD . Applicato ora alla fune in F il contrappeso unito $P' + p$, e riposto nella conca, è certo che crescerà l'immersione naturale della medesima per conto del solo peso p , giacchè il peso P' è in equilibrio col peso della paratoja, e non può agire sul galleggiante. In questa condizione di cose non può nè la paratoja alzare il contrappeso cioè abbassarsi, perchè è contrabbilanciata dal peso P' , nè il contrappeso alzare la paratoja, perchè la giunta p è tenuta in equilibrio dall'acqua scacciata coll' immersione della cassetta. Dunque tutto si comporrà in equilibrio. Si alzi ora per giunta d'acqua il fiume, o si abbassi per iscemamento, e sia m la mutazione verticale; bisogna che la paratoja si ab-

bassi da sè, o si alzi per l'intervallo verticale $\frac{m}{n}$. Imper-

ciocchè per natura delle taglie è mestieri, che per un tratto di fune corso dalla resistenza verticalmente, cioè nel caso nostro dalla paratoja, cammini per contrario verso per n tratti verticali di fune la potenza, vale a dire nel nostro caso il galleggiante col contrappeso, come richiede per appunto la ragione reciproca de' pesi equilibrati. Stabiliti per tanto nel dato emissario i limiti delle mutazioni estreme del fiume per un verso, e delle reciproche mutazioni della paratoja per l'altro nelle debite rispettive posizioni, sarà facile l'adattare al caso, secondo il numero delle carrucole, la lunghezza della fune che occorre per l'effetto contemplato. Ben inteso che sia questo artificio, che è de' semplici, non si troverà impraticabile, che il fiume possa andar moderando da sè le luci nella nostra cateratta, perchè venga trasmessa in ogni caso la data quantità di acqua Q .

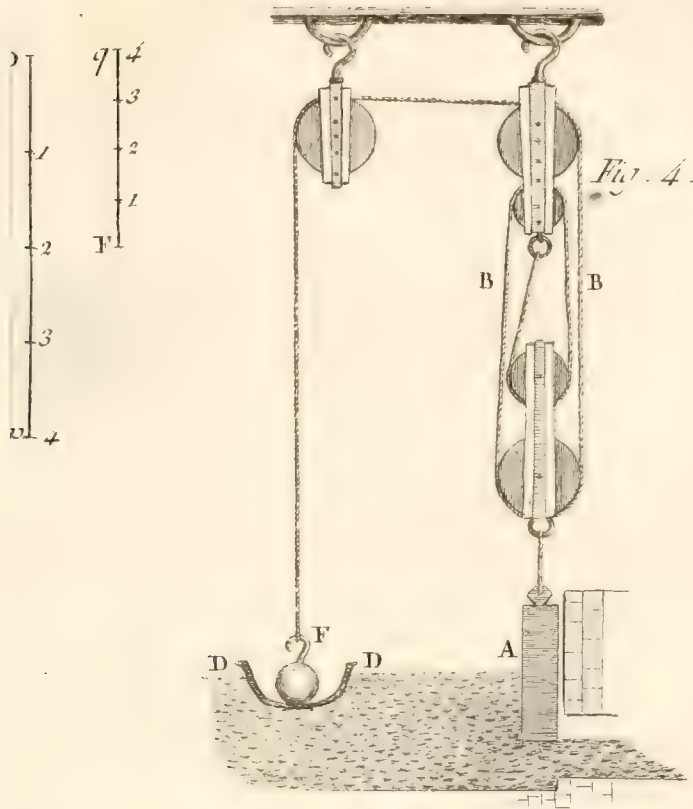




Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4



§. X.

E' superfluo l'avvertire , che, come per l' altre cateratte comuni, è pur necessario per la nostra, che l'acqua vi si accolli in istato di ringorgamento, e non mai corrente : altrimenti la teorica de' vasi non vi può aver luogo. E similmente è d' uopo che si offervi, se l' acqua uscente sia libera, o se debba sboccare sommersa; nel qual caso bisognerà introdurre le correzioni indicate nella seconda delle Memorie precedenti.



CONTINUAZIONE

DELLE OSSERVAZIONI ANATOMICHE E PATOLOGICHE
SUGLI ORGANI UROPOIETICI

Del Sig. VINCENZO MALACARNE

Al Sig. Cavaliere D. GIOVANNI ALESSANDRO BRAMBILLA.

Illustrissimo ed Eccellentissimo Signore

LE poche osservazioni qui unite, che ho la premura di aggiungere alle pubblicate già nel terzo volume di questa Filosofica Società, oltre all'aggirarsi sopra lo stesso argomento, faceano parte del discorso a V. S. Illust. indirizzato, dal quale di buon grado le sveltii, e ne ho tessuto il presente breve ragionamento, affinchè sempre più chiara ed evidente si rendesse la verità d'un punto di Patologia cerulica stato con tutta la maestria toccato dal chiarissimo Sig. Don *Antonio Scarpa* Profess. di Notomia, e di operazioni ceruliche, nella promozione d'alcuni valorosi studenti di questa R. Università Pavese al magistero in Cirugia. Io abbracciai somigliante occasione tosto che mi si presentò, e resi omaggio al vero, e all'oculata perizia del Collega, persuaso, che se l'Illust. S. V. disgradite non avrebbe queste osservazioni com'erano prima, degenerassero pure d'accoglierle colla benignità sua consueta quali hanno l'onore di presentarsi, venendo esse dalla mano stessa, che diretta dal cuore si pregierà sempre di manifestar all'universo quanto giusta sia e quanto grande la rispettosà gratitudine, che a V. S. Illust. debbo, ed inalterabile professio.

Dell'

Dell' aderenza de' calcoli urinosi non solo alle pareti interiori della vescica, ma sì a quelle degli ureteri.

Se le osservazioni di fenomeni rari nelle scienze, e nelle arti, comunicate da persone ingenue ad uomini atti a valutarle, capaci di trarne corollarij sempre più vantaggiosi al pubblico, riscuoter ne debbono applauso e lode; quelle, che concernono la chirurgia tendendo al ristabilimento della sanità, siccome ne rendono più comune la salutare applicazione a' casi ardui, che si presentano tutto dì, non solo meritano sterili encomj, e inoperosa approvazione, ma debbono in special foggia animare i Professori, ed i pratici a corroborarle colla sincera espolizione di quanto occorre loro d' analogo, e di valevole a convincer anche i più increduli della sussistenza e solidità dell' opinione di chi a forza d' assiduità, e di fatica si ridusse a termine di palesar dimostrate simili verità. Non ho io dunque motivo di sperare, N. N. che sia per esservi aggradevole, in questa lieta occasione del congratularci noi tutti con i qui presenti ornatissimi giovani del Magistero della Chirurgia maggiore meritamente decorati, il mio assicurarvi a confermazione di quanto non ha guari vi fu in questo orrevolissimo luogo medesimo indicato circa l'aderenza d'alcuni calcoli alla sostanza interiore della vescica, questo fenomeno essere stato incontrato più volte anche da me? Ed affinchè io non sembri diffidare della vostra urbanità, ed avere men giusto concetto della vostra laudevole curiosità intorno ad oggetto di sì grande importanza, quasi che l'una e l'altra di queste vostre esimie doti abbisognasse d'eccitamento, senz' altro preambolo passo alla sposizion genuina de' fatti.

Il primo calcolo aderente al parete interne della vescica urinaria mi si è offerto in un sessagenario, appunto nell' aspetto che ravvisar potete nella centuria delle Osservazioni Anatomico-Ceruliche del *Ruiscbio* alla fig. 62, che accompagna la 78. osservazione. Un grosso calcolo irregolarmente ovale, il cui maggiore diametro superava diciotto linee, il minore undici, pendeva da un picciuolo piramidale carneo-membranoso grosso come il ceppo d'una penna or-

dinaria da scrivere; lungo quattro linee : questo picciuolo introducendosi nel calcolo aspro, e bernoccolato, stato spaccato appunto per meglio considerarne la fabbrica interiore, mantenea la propria carnosità, e diventava ovale anch'esso, ed ottuso per lo tratto di quattro altre linee verso il centro del tubercolo.

Grave ed ostinata corizza di vescica avea sofferto da più anni l'infermo, ed abbondante flusso di muco tenacissimo per l'uretra, esalante un odor ammoniacale insoffribile; era stato molestato da tenesmi, che si calmavano col mezzo de' semicupii; abbandonati i quali negli ultimi mesi del viver suo, si risvegliavano sempre più molesti due volte almeno alla settimana. Ingrossarono altresì le emorroidi attorno all'ano a dismisura, quattro delle quali spalmate di fetido muco superavano in diametro il pollice; e si resero incomodissime perchè si trassero dietro porzione dell' intestino che a stento potevasi ricomporre. Sospettai subito, che nella vescica s'annidasse calcolo, e vi avrei pure introdotto il catetere se l'ammalato già quasi consunto, e troppo tormentato dal proprio male, che lo riduceva all'agonia, se i timidi parenti, e se più efficacemente ancora la mia persuasione, che il convincermi di tal verità non sarebbe riescito di verun anche menomo vantaggio all'infelice, non me ne avessero distolto. Morì egli infatti due giorni dopo, e sparato al cenotafio il cadavere, trovammo dalle tuniche spesse, e fibrose della vescica pendente il calcolo quale già vi descrissi, e il collo del sacco largamente infiammato.

Un vecchio Militare col proprio valor elevato ad uno de' più alti gradi nelle Truppe del Re di Sardegna, era stato già da tre anni attaccato da sintomi analoghi a' descritti, e minacciato di consunzione, essendo gravemente molestato da erpete crostoso alle gambe, portossi alle R. Terme Aquesi l'anno 1776 persuaso d'aver la pietra, e di poter dall'uso interno ed esterno di quelle acque trar sollievo per amendue gl' incomodi. Volle esservi diretto da me, e col grossissimo catetere, ch'egli era avvezzo d'introdur da se stesso, mi fece sentir la pietra sempre però dirigendo il becco dello strumento in alto assai, ed a sinistra. Mi parve

spinosa perchè il catetere cacciato tra le disuguaglianze di tale superficie sembrava trarsela dietro . e sollevarla ne' movimenti suoi . Usò per 24 giorni circa dodici libbre d'acqua termale al fontanino ogni mattina , impiegandovi pressochè due ore tra il bere ed il passeggiare : usò 1 fanghi a mezza vita la sera : tenne a piccioli pezzi in bocca ogni dì mezz'uncia circa di manna cannellata affinchè gli servisse di beccico , e di sciogliente ; nè era ancora al sedicesimo , che lo spurgo delle mucoità dall'uretra era già ridotto a men del terzo , le turgidissime emorroidi appassite , nette le gambe , vivace l'appetito , vispo e vegeto il corpo tutto . Restituitosi alla Capitale soffrì molto per lo scuotimento della vettura , e n'ebbe per l'uretra in meno di due mesi oltre a buon numero di briciole dodici cubetti di calcolo gialli , lisci , lucenti , il peso de' quali tra tutti era 58 grani . Lo consolai scrivendogli che sovente le acque termali avevano contribuito allo scomponimento de' calcoli , intanto gli replicai il suggerimento di cangiare in analeptica l'antica sua dieta tutta brodi medicati , decozioni , saponate , polveri litontritiche ; e simili , ed egli docile si valse da poi costantemente d'ottimo brodo di coscia di vitello e di pollastra , di gelatina consistente non acida , ben fornita di raschiatura di corno di cervo , e tanto alla primavera quanto all'autunno degli anni seguenti prese per 25 giorni il brodo di vipera ; il qual regime sostenne l'ottenuto miglioramento sì a risguardo del salino , e delle emorroidi , che relativo al corpo morbofo della vescica , dalla quale gettava di tant' in tanto nuove briciole di cui non tenne conto , anzi attese con molto minor incomodo alle serie faticose sue incombenze , e impinguò . Solo il cavallo , e la vettura gli rammemoravano il calcolo per li dolori che risvegliavano , e l'abbondante muco , che ne spremeano dalla vescica ; astenendosene gioiva d'una calma invidiabile da chiunque avesse lo stesso vizio organico . Evacuava i soliti cubetti , di sostanza calcareo-terrestre , giallastra , lucente , e ne' tre ultimi anni trenta ne conservò grossi poco più di due linee , che pesavano in tutto 162 grani . Assistendo agli esercizj militari in un dì temporalesco del 1786 , e dopo d'aver sofferto gran calore a' raggi del sole , sorpreso da fredda pioggia con impe-

tuoso vento, piuttosto che valersi della carrozza che gli si offriva, amando meglio ritirarsi a piedi, sorpreso da gravissima infiammazion di petto in sette giorni morì. M'industriai tanto, che ottenni di spararne il cadavero, la vescica del quale premeami grandemente di osservare, e la trovai molto meno spessa, men fibrosa della precedente ora descritta, nulla infiammata, occupata da un calcolo aderente al parete destro per una larga base, che per lo spazio di sedici linee interessavane la membrana interna come le lische di sostanza calcarea interessano l'interior tunica delle arterie nella litiasi loro.

Di questa specie d'incrostamento, d'intonacatura calcarea ho già fatto cenno, per ciò che riguarda la vescica urinaria, nelle mie osservazioni sugli organi uropoietici stampatesi in parte nel IV. Vol. delle Mem. della Società Italiana di Verona pag. 120 favellando di una donna in cui le ho vedute: là interessavano pur anco la tunica fibrosa, mentre che qui la base del calcolo, o del mucchio di calcoletti cubici, era soltanto aderentissima alla tunica interiore, mobile per ogni verso sulla fibrosa medesima, verso la quale tutto era liscio: allo 'ncontro erane disuguale la superficie interna, coperta come da una cristallizzazione dell'acqua giallognola della dissoluzion del sale marino; l'altezza maggiore, o per meglio dir la spessezza della quale concrezione appena superava cinque linee.

Quattro isolette vedemmo intorno alla principale, la maggior delle quali irregolarmente ovale era larga sei linee, spessa due; la minore non superava un cece. Sarebb'egli stato per avventura fra queste, che il becco del catetere impregnava nelle da me fatte esplorazioni? Eran elleno già tali dieci anni addietro? Non sarebb'egli sgranellato, scommessosi il calcolo maggiore dopo l'uso delle acque termali, per l'azion delle medesime opportuna a disciogliere il glutine, onde collegati erano insieme i cubi, de' quali era fatto il calcolo? Io veramente ho veduto sopra molte altre pietre di vescica urinaria umana spiegarfi attività simile delle acque Termali d'Aqui, alle quali ben mi persuado che tutte le analoghe, le congeneri, vanno in questa prerogativa del pari. Ho veduto parimente molte altre pietre non aderenti, ma

contenute nelle vesciche umane, composte di cubi, di congiunti troncati all'acuta loro estremità, di parallelogrammi solidi più o meno grandi, congegnati insieme come ne' preziosi lavori detti a mosaico: e se alcune erano tutte cubi tanto all'esterno quanto al nocciolo, taluna pur ne vidi tutta cubi elegantissimi all'esterno, tutta congiunti, con mirabile artificio congegnati d'intorno ad un nocciolo ovale, qual è la bellissima, e forse unica, grossa come un mezzano uovo di struzzo, che ha (se la memoria non m'inganna) diciott' oncie di peso di color bianco, i cubi della quale sono disposti in due strati concentrici, esposta all'esame de' curiosi nel Gabinetto del Sig. *Giuseppe Buzzani*, Cerusico della R. Corte di Torino, Cer. Prim. dell'Ospedale della Religione de' Ss. Maurizio e Lazzaro. Queste, s'io non erro, costituiscono una specie di calcoli diversa da quella in cui tutta è spinosa la superficie; dalla seconda ove tutto è confuso, tutto irregolarmente conglutinato; e dall'altra che comprende i calcoli fatti a strati circolari, ovali, ellittici, o cicloidei, quali sono quelli della bellissima raccolta, che nel lodato gabinetto del *Buzzani* si ammira. Di quest'ultima specie eccovi i frammenti d'un calcolo, che ha dato luogo alla seguente osservazione, che fra le altre particolarità, per cui la giudico degna della vostra cortese attenzione, mi sembra a proposito per confermar quanto si è detto finora della possibilità dell'aderenza de' calcoli alla vescica, posto che dimostra la possibilità di tale aderenza al pariete dell'uretere, non già alla sua inserzione nella vescica, ma nella più alta parte del medesimo.

Pietro Marchino d'Aqui figlio d'un calzolaio di quella città, secco, vivacissimo giovine di diciassette anni, da otto soli mesi prima ch'io fossi chiamato a visitarlo per gravi dolori di ventre, accompagnati da bruciori, e difficoltà d'orinare, onde i parenti sospettavano, che avesse contratto qualche mal venereo, fu trovato da me con tutti i sintomi della pietra nella vescica, la esistenza della quale venne assicurata dallo scrosciar essa contra al catetere introdotto per l'uretra. Gli feci l'operazione col mezzo del taglio laterale, e ne estraissi facilmente due calcoli simili a due mandorle col guscio, liscj, l'un de' quali aveva una concavità

ad una delle sue faccie, contro la quale vedeaſi ch'era ſtato quali articolato il calcolo compagno, che appunto avea un' eminenza conformiſſima alla predetta concavità. Guarì l' infermo della ferita in quindici giorni, e già tutta l' orina uſciva per l' uretra, e ſtava in letto ſoltanto per laſciar meglio aſſodar la cicatrice; quando verſo le dieci della mattina del 16 giorno vengo avviſato, che ſorpreſo da violentiſſimi dolori colici, dopo ſtravagantiſſimi divincolamenti, il povero giovine era morto. Sommo fu lo ſtupor mio, e non preſtando intiera fede alla relazione mi portai al letto dell' infelice, che trovai già coperto del ſolo lenzuolo, colla meſta compagnia d' un lumicino a' piedi del letto. Era ancor caldo quel corpo, le membra ancora fleſſibili, la faccia pallida sì, ma non di pallor di morte, e tanto meno le labbra, alle quali accoſtando il cerino acceſo mentre che coll' altra mano eſaminavane i moti allora inſenſibili del cuore, de' giugoli, e de' polli, m' avvidi dal tremolio, che pur di qualche reſpiro il giovinetto ancor godeva, ſicchè fattegli fregar le coſcie, le gambe, le braccia, e irritatone il naſo coll' introdurvi tabacco, e introdottoagli aceto gagliardo in bocca, ordinando che ſi ricoprìſſe, a poco a poco gli ſi riſvegliarono e i movimenti del cuore, e que' de' polmoni.

Dopo alcuni forſi di vin generoſo incominciò a perder involontariamente l' orina, il che dimoſtrò che noja gli recava, e continuò a piſciare profuſamente per quattr' ore continue; non ricuſò nè il brodo, nè la panatella che gli ſi diedero alla giornata, e nelle tre ſeguenti che ſopravviſſe, ma quaſi paralitico, ed aſono, e ſenza determinata volontà, nè deſiderio, nè avverſione alcuna dimoſtrando.

A miſura che le orine colavano ſi abbaffava, ſ' ammolliava l' abdomine ch' io avea trovato gonfio e duro; nè queſte ceſſarono di colare fin che il giovinetto non fu morto davvero.

Feci portar il cadavero nella Sala di Notomia ch' allora io avea nello Spedale, ed oltre agli ſtudenti miei, numero grande vi concorſe di ſpettatori d' ogni condizione, anſiò di vedere e la cicatrice interiore della veſcica venti giorni prima ſtata da me aperta, e il fonte di quelle orine

che in sì gran copia erano uscite da quel corpo; e quale non fu lo stupor mio, o Signori, quando all'apertura dell'abdomine trovai la vescica di color cremesino, spessissima di tuniche, grossa e figurata come uno de' più grossi uovi d'oca, durissima al contatto come se avesse contenuto un grosso pezzo di marmo! Prima d'aprirla sgombravi dalle intestina tutto l'abdomine, e alcuni degli allievi miei credettero, che avessimo dimenticato un gran pezzo dell'intestino colon al vedere specialmente l'uretere destro pieno d'acqua simile al siero di latte depurato, ondeggiante, che per tutta l'obliqua sua estensione avea un pollice e mezzo di calibro. Anche la pelvi era amplissima, e avea principio da un rene lungo sette pollici, largo quattro, spesso quattro, diviso in due caverne, una piena di siero verso la pelvi, l'altra piena di liquame creminoso in cui eransi ridotta quasi tutta la sostanza corticale e tubulata: in questa trovavansi tre calcoletti irregolarmente simili a capi di chiodi, o funghetti, col loro gambo, oltre a briciole qua e là alle pareti del sacco aderenti.

Quantunque l'uretere sinistro fosse più grosso del pollice anch'esso, ed avesse molto capace la pelvi, quel rene però non avea vizio: ciò non ostante separammo tutto, reni, ureteri, vescica, e pene dal rimanente del cadavero affine di esaminar più facilmente colla dovuta diligenza ogni cosa a parte a parte. Sicchè incominciammo a spaccar la faccia anteriore della vescica, al di sotto delle tonache spesse fibrosissime della quale trovammo intiero il calcolo, che qui vedete, strettissimamente abbracciato dal sacco stesso sì che incontrammo qualche pena ad estrarlo.

Esso era tutto liscio ad una faccia, ed a' contorni; tutto scabro, e come coperto di cemento biancastro irregolare all'altra faccia, del che non sapevamo trovar la ragione, e forse l'ignoreremmo ancor adesso se, dopo esaminato quell'ampio uretere, spaccandolo per la sua lunghezza fino alla superior estremità della pelvi, non avessimo trovato il parete interno della medesima, proprio nel sito dove ha principio l'uretere, coperto d'un cemento simile, molto spesso, che in larghezza e in figura corrispondeva esattamente a quello della detta faccia del calcolo. Quindi si venne in

cognizione del motivo delle orribili convulsioni, e della colica, che precedettero la asfissia, e la risoluzione simile alla morte, perchè staccatosi quel grosso calcolo dal sito dov'era stato chi sa da quanti anni aderente, nel discendere per l'uretere, e nel farsi strada verso il cavo della vescica per l'obliquo tragitto, che fa l'uretere affin di penetrarvi attraverso alle tuniche, si capiscono agevolmente gli spasimi atrocissimi, che dovettero tormentar quell'infelice; si capisce quanta urina sia stata ivi tratta dallo stimolo, dalla irritazione, intercetta nel suo corso mentre che durò la convulsion della vescica contro all'ospite suo novello non indifferente, il quale per penetrarvi dilatò l'orificio inferior di quell'uretere a segno, che aveva ancora un pollice di diametro quando lo esaminammo alla faccia interna di quella vescica.

Ecco l'esempio d'un altro calcolo aderente, non incastrato, tanto più strano quanto più sembra che il declive del sito, e il proprio peso avrebbero dovuto opporgliene e all'adesione, e al quasi enorme accrescimento. E questo basti a dimostrar sempre più evidentemente darli calcoli aderenti al pariete interno de' canali uropoietici, e a persuadervi, ornatissimi Giovani, che la natura si compiace talvolta di complicar le malattie per abbattere il nostro orgoglio, ma che l'assiduo esplorator de' fenomeni, ch'essa complicatissimi presenta, perviene a trarne luce ognor più chiara per finalmente condursi nello scioglimento di tali complicate, e ad utilità più generale insensibilmente dirigerle, nel che consiste il fine primario di tutte le osservazioni anatomiche, e patologiche, e cliniche; ad intraprender le quali con alacrità e senza prevenzione, che abbiate così distintamente meritato oggi d'avere per noi aperta amplissima strada, io con tutta questa rispettabilissima Assemblea di vero cuor mi rallegro, e a generosamente inoltrarvici, e a trarne copiosi frutti, a comune istruzione opportuni, quanto so e posso il più, caldamente vi esorto.

CONSIDERAZIONI

CONSIDERAZIONI

SOPRA UNA MANIERA DIVERSA DA QUELLA CHE
SEGUE L'EULERO, DI TRARRE DAL CIRCOLO LE
QUANTITA' TRASCENDENTI CHE ALLO STESSO
APPARTENGONO; E DIMOSTRAZIONE D'UN TEO-
REMA ANALITICO.

Del Sig. FRANCESCO PEZZI

PRESENTATA

Dal Sig. LEONARDO SALIMBENI.

LE operazioni dell'analisi finita non meno che infinite-
male dimandano continuamente il soccorso delle quan-
tità trascendenti, le quali a' tempi nostri consistono nelle so-
le quantità logaritmiche e circolari; ma quanto frequente ed
utile, altrettanto delicato e pieno di pericolo n'è l'uso: che
se per avventura questa mia espressione sembrasse ardita di
troppo, mi farei allora a ricordar solamente la tanto famo-
sa quistione intorno ai logaritmi dei numeri negativi; quin-
di è che non si dee trascurar mai di fare ogni benchè pic-
colo passo, il quale vie maggiormente c'inoltri a ben cono-
scere l'indole ed il valore delle anzidette quantità. Questa
riflessione mi ha dato il coraggio di presentare all'Illustre
Società Italiana il seguente tenue lavoro, ad oggetto di ri-
schiarire un punto d'analisi che forse sembrerà dilettevole ed
interessante.

1. Nell'opera immortale che ha per titolo *Introductio in
Analysin infinitorum*, il cui I. Tomo io ho trasportato in lin-
gua Francese (a), il dottissimo *Eulero* ha trattato diffusamen-
Tom. V. Ggg

(a) V. „Introduction à l'Analyse des
„ infinitement petits de *M. Euler* tra-
„ duite du latin par *M. M. Pezzi &*

„ *Kramp*. A' Strasbourg aux dépens
„ de la librairie Academique 1786.

te delle quantità trascendenti; ed al capitolo VIII. intitolato *de quantitativus transcendentibus ex circulo ortis* il lodato Autore vi getta i fondamenti del vasto calcolo de' seni e coseni, e vi spiega le maravigliose trasformazioni conosciute da tutti i Geometri della somma o differenza delle quantità esponenziali immaginarie in seni e coseni d'archi reali, come ancora quelle degli archi reali in logaritmi di seni e coseni moltiplicati dall'immaginario. Ora affine che il lettore vegga tosto lo scopo che qui mi sono proposto, mi sia lecito di richiamargli brevemente a memoria il metodo usato da quel grand' uomo onde ottenere le mentovate utilissime trasformazioni. Egli prende a quest' oggetto i fattori del I. membro dell' equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ in questo modo $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, $\cos z - \sqrt{-1} \sin z$, e facendo poi il prodotto di questi altri due $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, $\cos y + \sqrt{-1} \sin y$, ha $(\cos z + \sqrt{-1} \sin z) (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = \cos z \cos y - \sin z \sin y + \sqrt{-1} (\cos y \sin z + \sin y \cos z)$, e ponendo mente che $\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y+z)$, e $\cos y \sin z + \cos z \sin y = \sin(y+z)$, il prodotto precedente gli diviene $(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) (\cos z + \sqrt{-1} \sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1} \sin(y+z)$. Nello stesso modo $(\cos y - \sqrt{-1} \sin y) (\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1} \sin(y+z)$.

E $(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x) (\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y) (\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1} \sin(x+y+z)$: d'onde siegue dopo aver posto $x=y=z$, prima $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1} \sin 2z$, e poi $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1} \sin 3z$, e quindi generalmente $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz$.

La quale formola risolta in due per mezzo dell'uno e dell'altro segno $\pm$, gli somministra per addizione e per sottrazione,

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}, \dots (1)$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}}, \dots (2)$$

Le quali sono per l'appunto quelle formole che, trattate dalla mano maestra del nostro celebre Autore, conducono alle indicate trasformazioni.

2. Ma or qui nasce la curiosità di sapere, perchè $\sin z + \sqrt{-1 \cos z}$, e $\sin z - \sqrt{-1 \cos z}$ essendo al pari di $\cos z + \sqrt{-1 \sin z}$ e $\cos z - \sqrt{-1 \sin z}$ i fattori del primo membro dell'equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, l'Illustre *Eulero* abbia fatto uso ne' suoi calcoli dei secondi anzi che dei primi?

Per trovare la ragione di tale preferenza, cerchiamo a quali conseguenze l'avrebbero condotto i primi fattori $\sin z + \sqrt{-1 \cos z}$ e $\sin z - \sqrt{-1 \cos z}$.

Si ha $(\sin z + \sqrt{-1 \cos z})(\sin y - \sqrt{-1 \cos y}) = 1$; e $(\sin z + \sqrt{-1 \cos z})(\sin y + \sqrt{-1 \cos y}) = \sin z \sin y + \sqrt{-1}(\cos z \sin y + \sin z \cos y) - \cos z \cos y$. Ma $\sin z \sin y - \cos z \cos y = -\cos(z+y)$, e $\cos z \sin y + \sin z \cos y = \sin(z+y)$; dunque $(\sin z + \sqrt{-1 \cos z})(\sin y + \sqrt{-1 \cos y}) = -\cos(z+y) + \sqrt{-1} \sin(z+y)$.

Si troverà nello stesso modo $(\sin z - \sqrt{-1 \cos z})(\sin y - \sqrt{-1 \cos y}) = -\cos(z+y) - \sqrt{-1} \sin(z+y)$, quindi riunendo i due casi, $(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})(\sin y \pm \sqrt{-1 \cos y}) = -\cos(z+y) \pm \sqrt{-1} \sin(z+y)$; dunque ponendo $z=y$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1} \sin 2z$: in simile guisa si troverà $(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})(\sin y \pm \sqrt{-1 \cos y})(\sin x \pm \sqrt{-1 \cos x}) = -\sin(z+y+x) \mp \sqrt{-1} \cos(z+y+x)$; dunque supponendo $x=y=z$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1} \cos 3z$.

Se si fa allo stesso modo il prodotto di $(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})(\sin y \pm \sqrt{-1 \cos y})(\sin x \pm \sqrt{-1 \cos x})(\sin u \pm \sqrt{-1 \cos u}) \dots$, prendendo primieramente 4 poi 5, poi 6, ecc. fattori e supponendo inoltre nelle moltiplicazioni di già ridotte, $z=y=x=u=\dots$, si otterranno i valori seguenti dalle potenze successive di $\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z}$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^1 = +\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z}$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1} \sin 2z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1} \cos 3z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^4 = +\cos 4z \mp \sqrt{-1} \sin 4z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^5 = +\sin 5z \pm \sqrt{-1} \cos 5z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^6 = -\cos 6z \pm \sqrt{-1} \sin 6z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^7 = -\sin 7z \mp \sqrt{-1} \cos 7z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^8 = +\cos 8z \mp \sqrt{-1} \sin 8z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^9 = +\sin 9z \pm \sqrt{-1} \cos 9z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1 \cos z})^{10} = -\cos 10z \pm \sqrt{-1} \sin 10z$$

Si ha dunque in generale quando l'esponente è un numero pari $= 2m$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{2m} = \mp \cos 2mz \mp (\mp) \sqrt{-1} \sin 2mz \dots (3)$$

Si prenderà il segno superiore quando m farà un numero dispari, ed il segno inferiore quando m farà un numero pari.

Per l'espressione $\mp(\mp)$ intendo che l'uno de' segni $-$ e $+$ fuori de' cancelli $()$ moltiplica l'uno e l'altro segno $\mp$ entro gli stessi cancelli; onde $-(\mp) = \pm$; e $+(\mp) = \mp$.

E quando l'esponente è un numero dispari $= 2m+1$, si ha generalmente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{2m+1} = \mp \sin(2m+1)z \mp (\pm) \sqrt{-1} \cos(2m+1)z \dots (4).$$

— ovvero $+$ secondo che m è un numero dispari ovvero pari.

3. Sviluppiamo questi casi, e ponghiamo nelle formole (3) (4) prima $m = 2n$, e poi $m = 2n+1$, esse diverranno successivamente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{4n} = + \cos 4nz \mp \sqrt{-1} \sin 4nz$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{4n+2} = - \cos(4n+2)z \pm \sqrt{-1} \sin(4n+2)z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{4n+1} = + \sin(4n+1)z \pm \sqrt{-1} \cos(4n+1)z$$

$$(\sin z \pm \sqrt{-1} \cos z)^{4n+3} = - \sin(4n+3)z \mp \sqrt{-1} \cos(4n+3)z$$

dalle quali si tragge in virtù del doppio segno $\pm$ per addizione e per sottrazione

$$\cos 4nz = \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n} + (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n}}{2}, \dots (5)$$

$$\sin 4nz = \frac{(\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n} - (\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n}}{2\sqrt{-1}}, \dots (6)$$

$$\cos(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+1} - (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+1}}{2\sqrt{-1}}, \dots (7)$$

$$\sin(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+1} + (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+1}}{2}, \dots (8)$$

$$\cos(4n+2)z = - \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+2} + (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+2}}{2}, \dots (9)$$

$$\sin(4n+2)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+2} - (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+2}}{2\sqrt{-1}}, \dots (10)$$

$$\cos(4n+3)z = \frac{(\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+3} - (\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+3}}{2\sqrt{-1}}, \dots (11)$$

$$\sin(4n+3)z = - \frac{(\sin z + \sqrt{-1} \cos z)^{4n+3} + (\sin z - \sqrt{-1} \cos z)^{4n+3}}{2}, \dots (12)$$

Ma si fa che tutti i numeri interi possibili sono contenuti nell' una o nell' altra delle quattro formole $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$; dunque le otto equazioni precedenti rappresentano la somma o la differenza di tutte le potenze intere possibili dei fattori $\sin z + \sqrt{-1} \cos z$, $\sin z - \sqrt{-1} \cos z$ espressa nel seno o coseno dell' arco z moltiplicato dall' esponente delle stesse potenze.

4 Ora egli è facile di dimostrare che ciascheduna delle otto formole precedenti è la stessa di ciascheduna corrispondente delle due (1) e (2) trovate dall' immortale *Eulero* per mezzo dei secondi fattori $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, $\cos z - \sqrt{-1} \sin z$; la qual cosa si potrebbe ottenere in due modi diversi, l' uno sviluppando le mentovate formole in serie, l' altro paragonandole immediatamente fra di loro. Ci serviremo di quest' ultimo mezzo perchè più semplice del primo. Sia dunque per maggiore brevità $\sin z = a$; $\cos z = b$, e pongali mente

che $\sqrt{-1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}$; $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$; $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$;

$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$; $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$, si avrà ponendo successivamente nella formola (1) d' *Eulero* il numero arbitrario $n = 4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, si avrà dico l' equazione (1) = (5) = (7) = (9) = (11), cioè (1) = (5) ovvero

$$(b + a\sqrt{-1})^{4n} + (b - a\sqrt{-1})^{4n} = (a + b\sqrt{-1})^{4n} + (a - b\sqrt{-1})^{4n};$$

moltiplico il 2° membro di questa equazione per $(\sqrt{-1})^{4n} = 1$,

ed ho $(a\sqrt{-1} - b)^{4n} + (a\sqrt{-1} + b)^{4n}$, onde essa diviene

$$(b - a\sqrt{-1})^{4n} = (a\sqrt{-1} - b)^{4n} \text{ moltiplicando il 1° o il 2°}$$

membro di questa equazione per $(-1)^{4n} = +1$, esso si trasforma precisamente nel 2° o 1° membro della stessa equazione.

E (1) = (7) ovvero $(b + a\sqrt{-1})^{4n+1} + (b - a\sqrt{-1})^{4n+1}$

$$= \frac{(a + b\sqrt{-1})^{4n+1} - (a - b\sqrt{-1})^{4n+1}}{\sqrt{-1}};$$

moltiplicando il 2°

$$\text{membro per } \frac{\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^{4n+2}} = 1, \text{ si ha } -(a\sqrt{-1} - b)^{4n+1}$$

$$+ (a\sqrt{-1} + b)^{4n+1}. \text{ Ma } -(a\sqrt{-1} - b)^{4n+1} = (-1)^{4n+1}$$

$$(a\sqrt{-1} - b)^{4n+1} = (b - a\sqrt{-1})^{4n+1}; \text{ dunque (1) = (7);}$$

$$\text{similmente (1) = (9), cioè } (b + a\sqrt{-1})^{4n+2} + (b - a\sqrt{-1})^{4n+2}$$

$$= -(a + b\sqrt{-1})^{4n+2} - (a - b\sqrt{-1})^{4n+2}. \text{ Moltiplico il}$$

2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+2}}{-1} = 1$, ed ho $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2} + (a\sqrt{-1}+b)^{4n+2}$; multiplico $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2}$ per $(-1)^{3n+2} = 1$ ed ho $(b-a\sqrt{-1})^{4n+2}$; dunque $(1) = (9)$.

Finalmente $(1) = (11)$ ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n+3} + (b-a\sqrt{-1})^{4n+3} = \frac{(a-b\sqrt{-1})^{4n+3} - (a+b\sqrt{-1})^{4n+3}}{\sqrt{-1}}$ multiplico il 2° mem-

bro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+3}}{-\sqrt{-1}} = 1$; ed ho $(a\sqrt{-1}+b)^{4n+3} - (a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}$; ma $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3} = (-1)^{4n+3} (a\sqrt{-1}-b)^{4n+3} = (b-a\sqrt{-1})^{4n+3}$; dunque $(1) = (11)$.

Paragonando nello stesso modo l'espressione (2) del seno trovata da *Eulero* in cui n diventa successivamente $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ a ciascheduna delle nostre quattro espressioni de' seni si dimostrerà che $(2) = (6) = (8) = (10) = (12)$.

5 Quindi la ragione per cui la formola $\sin^2 z + \cos^2 z$ dev' essere sciolta nei fattori $\cos z + \sqrt{-1} \sin z, \cos z - \sqrt{-1} \sin z$, che sono quelli del non mai abbastanza lodato *Eulero* anzi che in questi da noi considerati $\sin z + \sqrt{-1} \cos z, \sin z - \sqrt{-1} \cos z$, e perchè i primi conducono ad una sola espressione del seno e del coseno d'un arco qualunque multiplo di z , la quale è generale e costante; quando gli ultimi fattori danno de' valori differenti per i seni e coseni dello stesso arco secondo ch'egli è moltiplicato da' numeri *parimente* pari ovvero *disparimente* pari, e dai numeri *dispari* che da questi derivano; ciò non ostante noi abbiamo fissata la variazione di queste espressioni per mezzo di quattro formole differenti, e necessarie a sciogliere in quest'ultimo modo il problema in tutta la sua generalità.

Che poi il nostro celebre *Eulero* abbia impiegato nelle ingegnossissime sue operazioni analitiche i migliori fattori per forza, dirò così, d'azzardo, o di previo esame, non ardirei deciderlo: parmi solamente che se avesse considerato gli altri, non si sarebbe rimasto dal rilevarne l'irregolarità, e di trarne com'era suo costume di fare in ogni parte delle matematiche che imprendesse a trattare, delle conseguenze utili e singolari; ma se è azzardo, desso è quel tatto superiore, quell'istinto sublime, che forma propriamente l'anima de' grandi uomini.

6. Mi si permetta di osservare da ultimo, che se fosse proposto di trasformare le quattro formole (5), (7), (9) e (11), le quali sono necessarie a sciogliere in questo sistema di fattori il problema in tutta la sua estensione, come ancora le quattro altre (6), (8), (10) e (12) in una sola formola generale (1) per le quattro prime, e in quella segnata (2) per le quattro ultime, come ha fatto subitamente l'immortale *Eulero*, forse la soluzione *a priori* di questo problema si presenterebbe difficilmente; onde se l'esempio analitico intorno a cui versa la presente breve Memoria prova da una parte la generalità dell'algebra, ne rileva però dall'altra la somma semplicità, nella quale unicamente consiste il pregio di questa mirabil arte.

D I M O S T R A Z I O N E

D'un teorema Analitico.

Nel §. 139 della sopracitata opera di *Eulero*, quest'illustre Geometra deduce dalle formole (1) e (2) la bellissima trasformazione de' logaritmi imaginarij negli archi circolari reali in questo modo. Egli (a) suppone nelle accennate formole (1) e (2) n eguale ad un numero infinitamente piccolo

$n = \frac{1}{i}$, i essendo un numero infinitamente grande, in modo che

$\cos n z = \cos \frac{z}{i} = 1$, e $\sin n z = \sin \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$, e dopo aver os-

servato che $\int (1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$ ossia $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} \log y$,

e posto da una parte $\cos z + \sqrt{-1} \sin z$, e dall'altra $\cos z - \sqrt{-1} \sin z$ invece di y , le formole (1) e (2) gli divengo-

(a) In questo luogo, invece delle formole (1) e (2), *Eulero* cita quelle del §. 130; ma ciò è evidentemente un errore o del copista o dello stampatore, perchè dal §. 130 non si pos-

sono trarre in nessuna maniera, se non m'inganno, i risultati analitici qui esposti, i quali chiaramente derivano dalle formole da noi segnate (1) e (2) contenute nel §. 133.

$$\text{no la prima, } 1 = \frac{1 + \frac{1}{i} l. (\cos z + \sqrt{-1} \sin z) + 1 + \frac{1}{i} l. (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)}{2} = 1$$

per i logaritmi che svaniscono, e la seconda

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i} l. (\cos z + \sqrt{-1} \sin z) - \frac{1}{i} l. (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)}{2 \sqrt{-1}}, \text{ cioè}$$

$$z = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} l. \frac{\cos z + \sqrt{-1} \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \sin z}; \text{ ma } \frac{\sin z}{\cos z} = \tan. z, \text{ dunque}$$

l'arco z verrà espresso dalla sua tangente in modo che

$$z = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} l. \frac{1 + \sqrt{-1} \tan. z}{1 - \sqrt{-1} \tan. z}.$$

2. Ma le formole (1) e (2) derivando per addizione e per sottrazione dalla formola fondamentale $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos n z \pm \sqrt{-1} \sin n z$, e questa non essendo dimostrata dall'immortale *Eulero* che nel caso di $n =$ ad un numero qualunque intero, di più il metodo usato da questo grand'uomo e da noi esposto nella prima parte di questa Memoria n. 1, non potendo condurre ad altra generalità fuori di quella di $n =$ ad un numero qualunque intero, relativamente all'anzidetta formola fondamentale, ne siegue che nè pure l'equazione $z = \frac{1}{2 \sqrt{-1}} l. \frac{1 + \sqrt{-1} \tan. z}{1 - \sqrt{-1} \tan. z}$, e le belle conseguenze che da essa derivano, restano dimostrate, perchè dipendenti dalla condizione di $n =$ a un numero frazionario $= \frac{1}{i}$. E ciò

costituisce un caso importantissimo di cui nessun Geometra ha mai dato, a mia notizia, una dimostrazione. Mi si permetta dunque di esporne qui una che non potrà forse non sembrare semplice.

Si ha $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos n z \pm \sqrt{-1} \sin n z$, n essendo un numero qualunque intero positivo, e z un arco qualunque arbitrario; perciò invece dell'arco z considero l'arco $\frac{s}{r} z$; s e r essendo de' numeri qualunque interi, ed ho

(cos

$$\left(\cos \frac{s}{r} z \pm \sqrt{-1} \sin \frac{s}{r} z\right)^r = \cos s z \pm \sqrt{-1} \sin s z$$

Ma $\cos s z \pm \sqrt{-1} \sin s z = (\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^s$; dunque

$$\left(\cos \frac{s}{r} z \pm \sqrt{-1} \sin \frac{s}{r} z\right)^r = (\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^s, \text{ ovvero}$$

$$\left(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z\right)^{\frac{s}{r}} = \cos \frac{s}{r} z \pm \sqrt{-1} \sin \frac{s}{r} z$$

Mi riferbo ad altra occasione a mostrare per mezzo di qualche applicazione l' utilità di questo elegantissimo teorema.



S A G G I O

DI UN NUOVO CORSO DI ELEMENTI DI STATICA

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI

P R E F A Z I O N E .

E' mia intenzione di presentare in questa Memoria a' matematici una serie di proposizioni costituenti il primo Elemento di un nuovo corso di statica, in cui ora mi occupo, affine di rilevarne il loro giudizio, e valermene a mio lume nel proseguimento dell' opera medesima. Se la maggior parte di queste proposizioni, per non dire tutte, contengono verità già note, egli è però affatto nuovo l'ordine loro e la dimostrazione che ho cercato di ridurre a tal segno di evidenza, che non ne resti poi ad alcuno la voglia di una migliore; nella qual cosa non sono forse gli altri autori di elementi di questa scienza così ben riusciti come conveniva. Imperciocchè per parlare di una sola; chi è che non sappia che un *Newton*, un *Daniel Bernoulli*, un *d' Alembert*, un *Bossut*, un *P. Gregorio Fontana*, ed altri ancora, hanno cercato un dopo l'altro o di dare una nuova dimostrazione del celebre teorema della composizione delle forze, o di perfezionare le date dagli altri? Questa sollecita brama di rintracciare nuove pruove di una verità, non è ella un indizio manifesto che le già note e comuni non appagano abbastanza? Di questo teorema io do appunto una dimostrazione, che mi lusingo possa restare al coperto di ogni attacco e soddisfare ai più difficili ingegni. Nè è questa opera di lieve momento, perchè, come dice il citato *Bernoulli* nel Tomo primo degli Atti dell' Accademia di Pietroburgo coll' autorità di *Varignon*, da sì fatto teorema

possono di leggieri ricavarli tutte le altre proprietà dell'equilibrio: *illam mechanicæ partem quæ versatur circa æquilibrium potentiarum totam ex sola compositione & resolutione virium deduci posse abunde monstravit Petrus Varignon*. Ma oltre la dimostrazione delle forze composte se ne troveranno in questo saggio alcune altre non dispregevoli, e sopra tutto un legame ed ordine fra loro che sembreranno anella della stessa catena. Cercando fra me stesso le ragioni per cui le prime verità della statica non persuadono così bene, come per esempio quelle della geometria, non ho potuto altra trovarne che una sola, ed è che si sono insieme confusi, se non la statica con la dinamica (giacchè molti hanno avuta l'antivedenza di far questa separazione) almeno li principj di quella co' principj di questa scienza; laddove sembra che la prima possa sopra fondamenta sue proprie innalzarsi, come io studierò di mostrare col fatto. In questo tentativo sono stato però preceduto e da *Bernoulli*, e d'*Alembert* quando cercarono la dimostrazione del teorema di sopra enunciato; onde non sia meraviglia se colla scorta di tanti uomini, e più ancora dalla ragione che dall' autorità convinto, io mi sia posto a trattare la statica da se sola e interamente separandola da ogni idea tratta dal moto; nella qual cosa quasi spererei di non esservi male riuscito.

Siccome questo è un saggio di un corso di elementi, così era ben convenevole che il mio stile fosse elementare e adattato alla intelligenza della gioventù. Anzi ho a bello studio imitato quello degli antichi nostri maestri, i quali, che che altri in contrario ne senta, debbono essere presi per modelli di questo genere di scrivere. Simile attenzione ho praticata per seguire il loro metodo; quindi li conoscerà fino dalla mostra presente essere tutto l' edificio che io cerco d'erigere fondato sopra le definizioni, i comuni concetti, e le domande, e che non mi servo mai di alcuni sforzati ragionamenti per provare i miei assunti, come per avventura sogliono fare coloro che di questo metodo non sono seguaci. Ho creduto però opportuno di spargere alcune poche note nell' opera, non per modo di commenti, ma per rendere ragione di alcune novità da me per la prima volta nella statica intromesse, o per avvertire di alcun' altra cosa

importante. Se è prezzo dell'opéra unire insieme in questa maniera le verità della statica, se la strada ch'io batto può meglio delle comuni condurre alla meta, se debbo in alcuna cosa correggermi o tutto abbandonare, decideranno i matematici, al cui giudizio, come ho detto di sopra, ben volentieri sottometto questa mia quantunque laboriosa intrapresa.

DEFINIZIONI.

1 Forza o potenza è quello ch' eccita un mobile a cangiar di polizione.

2 Direzione di una forza è la linea retta, secondo la quale la forza eccita un mobile.

3 La forza si dice tendere nella sua direzione da quella parte, verso cui è volto l' eccitamento.

4 Le forze applicate ad un mobile diconsi contrarie, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte a parti contrarie.

5 Diconsi poi direttamente contrarie, quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte a parti contrarie.

6 Le forze applicate ad un mobile diconsi parziali, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte alla stessa parte.

7 Diconsi poi direttamente parziali quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte alla stessa parte.

8 Angolo alla tendenza si dice quello, che dalle direzioni di due forze segantisi in un punto è compreso, dalla parte ove tendono le forze.

9 Le forze applicate ad un mobile si dicono fra loro in equilibrio, quando nessun eccitamento prevalga.

10 Le forze che colla medesima o colle medesime forze possono equilibrarsi, diconsi equivalenti (a).

(a) Di queste dieci definizioni le prime due, siccome ancora la nona, si trovano in tutti i libri elementari di statica. La terza è nuova, ed io la ho introdotta, perocchè non basta di-

re la direzione secondo cui viene un mobile eccitato; ma bisogna ancora mostrare da qual parte nella direzione è volto l' eccitamento. Ed a proposito della voce *eccitare* notisi aver-

D I M A N D E.

1 Dimandisi di applicare secondo qualsivoglia direzione una qualsivoglia forza, che tenda verso l'una o l'altra parte nella direzione stessa (*a*).

2 E se due forze a due direzioni che si segano in un punto sieno applicate, certa forza applicata secondo certa direzione, che passi pel punto stesso, equilibrarli coll'altre due forze (*b*).

3 E se sieno fra loro in equilibrio tre forze applicate secondo tre direzioni segantili in un punto, essere ancora fra

la io adoperata in luogo dell'altre *premere* e *tirare* usate da' statici; e ciò per poter con una sola voce esprimere ad un tratto qual si è l'una o l'altra di queste per loro natura contrarie azioni, la distinzione delle quali alla statica concreta non all'astratta appartiene. La quarta e quinta definizione sono state da molti autori, se non proposte, almeno messe in opera ne' loro elementi, ed io le credo tanto utili che a somiglianza di esse altre due nuove ne ho formato, che sono marcate sesta e settima. L'ottava è pure nuova: due direzioni che si segano fra loro fanno quattro angoli; e di questi quattro chiamo angolo alla tendenza quello, ch'è collocato dalla parte ove tendono le forze; e sembrami di avere molto con questa definizione facilitato il modo di scrivere con chiarezza e sicurezza. La decima ed ultima definizione è pure mia, e la ho surrogata all'altra solita delle forze *composte* o forze *risultanti*. La differenza non consiste nel solo cangiamento di nome, cioè per aver chiamate equivalenti le forze dette fino ad ora composte o risultanti; ma piuttosto per aver tratta la nozione di queste forze dall'equilibrio, non dal moto, come hanno fatto tutti gli altri statici. Se poi il nome di forze composte o di forze risultanti era adattato

all'idea, ch'essi se ne formavano; l'altro di forze equivalenti conviene meglio a quella ch'io cerco d'introdurre. L'opera però dimostrerà più d'ogni mio discorso se tale considerabile cangiamento apporti reale utilità nella trattazione della statica.

(*a*) *Euclide* vero maestro del metodo matematico dimandò di potere da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto tirare una linea retta, e prolungare una data retta finita continuamente per diritto, ed altre simili cose. Io a sua imitazione ho fatta questa prima dimanda, che a mio giudizio non doveva esser da alcun autore di elementi ommessa, come quella di cui fa d'uopo servirsi come quali in ogni proposizione.

(*b*) Questa domanda vale per me altrettanto, quanto pel *Cel. Bossut* il suo assioma che *un punto non può andare ad un tratto per molte strade*; ma io non etico dei confini della statica; egli si serve di un principio di dinamica. Chi vorrà attentamente esaminare le Memorie di *Daniel Bernoulli* e di *Alembert* per la dimostrazione del famoso teorema della composizione delle forze (che così da tutti vien chiamato), s'accorgerà che quantunque essi non abbiano, come me, espressa tale dimanda, l'hanno però tacitamente introdotta.

loro in equilibrio tre forze uguali a quelle, una all' altra, applicate similmente secondo tre direzioni segantisi in un punto, e comprendenti fra loro angoli alla tendenza uguali a' compresi dalle prime direzioni; ciascun angolo alla tendenza a ciascun angolo alla tendenza delle forze uguali (a).

COMUNI CONCETTI.

1 Due forze uguali e direttamente contrarie sono fra loro in equilibrio.

2 E se due forze sieno fra loro in equilibrio, saranno esse uguali e direttamente contrarie.

3 Se a forze fra loro in equilibrio aggiunganfi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze saranno pure fra loro in equilibrio.

4 E se da forze fra loro in equilibrio tolgansi forze fra loro in equilibrio, le forze rimanenti saranno pure fra loro in equilibrio.

5 Non possono essere fra loro in equilibrio le forze, le cui direzioni si seghino nello stesso punto, se le tendenze di tutte sieno volte verso la medesima parte (b).

PROPOSIZIONE I.

Le forze uguali e direttamente parziali sono fra loro equivalenti, in qualunque sito della comune direzione sia ciascuna forza applicata.

(a) Anche di questa dimanda senza preveniente avviso si sono serviti i citati autori. Ho stimato poi opportuno di trascurare l'altre solite dimande, come quella *di poter concepire i corpi non pesanti*, perchè io ho parlato e parlerò sempre astrattamente di mobili, mai di corpi. E' parimenti inutile l'altra *di poter esprimere le forze con linee rette*. Euclide trattò tutto il quinto libro, che versa sulle

grandezze in generale (e grandezze sono ancora le forze), ed espresse nelle figure tutte le grandezze col mezzo di linee, senza crederfi obbligato di farne prima alcuna inchiesta.

(b) Ho comune i due primi assiomi con tutti gli altri autori di elementi di statica; gli altri tre sono nuovi. Si conoscerà ben tosto l'utile uso che se ne può fare.

Le due forze P Q sieno uguali e direttamente parziali, Fig. 1
cioè sieno applicate secondo la stessa direzione ED e tendenti verso la stessa parte, dall' E verso il D ; ma la forza P sia applicata in C , e la forza Q in qualsivoglia altro sito D della direzione ED ; dico ch'equivalente è la forza P alla forza Q .

Imperocchè prendasi la forza R uguale ad una di esse forze P Q , e si applichi la forza R ovunque secondo la direzione ED sì che tenda dal D verso l' E . Dimand. 1

E poichè l'una e l'altra delle forze P R è applicata secondo la stessa direzione ED , ma la forza P tende da una parte, dall' E verso il D , e la forza R tende dalla parte opposta, dal D verso l' E ; quindi la forza P alla forza R è direttamente contraria, ed è ancora ad essa uguale; e due forze uguali e direttamente contrarie sono fra loro in equilibrio. In equilibrio ella è dunque la forza P colla forza R . Allo stesso modo si proverà che la forza Q è in equilibrio colla forza R . L'una e l'altra dunque delle forze P Q può equilibrarsi colla medesima forza R . Ma quelle forze che colla medesima forza possono equilibrarsi sono equivalenti. Equivalente ella è dunque la forza P alla forza Q ; il che conveniva dimostrare (a). Defin. 5
Comun.
Conc. 1
Defin. 10

(a) Questa mia prima proposizione comprende una dimanda comune a tutti i libri elementari di statica, che alcuni hanno enunciato così, *ch'egli sia permesso di riguardare una forza come applicata a qual punto si vorrà della sua direzione*, ed altri in questo modo, *che una potenza applicandosi ad operare in qualunque punto della sua direzione faccia il medesimo effetto*. Ma prima: perchè richiedere quello che possiamo dimostrare ed esigere? Ed in secondo luogo cosa vuol mai indicare con queste parole: che si possa riguardare una forza come applicata a qualsivoglia punto della sua direzione? ovvero con queste altre: che l'effetto ne sia lo stesso? Dicasi dunque piuttosto con me, che una stessa forza,

ovvero forze uguali e direttamente parziali applicate in qualunque sito della comune direzione sono fra loro equivalenti, ch'è lo stesso di dire, che esse possono colla medesima o colle medesime forze equilibrarsi. E notisi che alle forze uguali io aggiungo la condizione che debbano ancora essere direttamente parziali, nel che obbligo ad intendere le forze uguali applicate non solo ad una comune direzione, ma tendenti in oltre verso la stessa parte; nel qual caso e non più è vera l'altrui dimanda e mia proposizione. E pure essi hanno ommessa questa sì essenziale circostanza, come in quasi tutti i luoghi ne quali conviene tener conto delle rispettive tendenze delle forze.

COROLLARIO

Quindi se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, e canginli nelle proprie direzioni comunque i siti dell'applicazione delle forze non però le tendenze loro, sussisterà l'equilibrio.

PROPOSIZIONE 2.

A quante forze si vogliano direttamente parziali è equivalente una forza ad esse uguale e direttamente parziale.

Fig. 2.

Sieno le forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ direttamente parziali, cioè sieno applicate secondo la comune direzione ED e tendano tutte e tre dalla stessa parte, dall' E verso il D . Prendasi poi la forza S uguale alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$, e si applichi secondo la direzione ED , sì che tenda dall' E verso il D , e sia alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ direttamente parziale. Dico, ch'equivalente è la forza S alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$.

Dimand. 1 Imperocchè applichisi di nuovo secondo la direzione ED , uguale alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$, la forza MT , la quale tenda dal D verso l' E , e sia alle forze medesime $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ direttamente contraria. E si divida la forza MT nelle forze $MN \text{ } NO \text{ } OT$ uguali alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$, l'una all'altra; e uguale sia la forza MN alla forza P , la forza NO alla forza $\mathcal{Q}$, e la forza OT alla forza R .

Comun.
Conc. 1

E poichè uguali sono l'una e l'altra delle forze $S \text{ } MT$ alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$, quindi sarà la forza S uguale alla forza MT . E sono ancora direttamente contrarie. Adunque la forza S è in equilibrio colla forza MT . E perchè sono direttamente contrarie le forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ alla forza MT , e si è divisa la forza MT nelle forze $MN \text{ } NO \text{ } OT$; quindi ciascuna delle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ a ciascuna delle forze $MN \text{ } NO \text{ } OT$ è direttamente contraria. Di nuovo perchè la forza P è uguale e direttamente contraria alla forza MN , sarà la forza P in equilibrio colla forza MN . Per la stessa ragione la forza $\mathcal{Q}$ è in equilibrio colla forza NO , e la forza R colla forza OT . Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiunganli forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. Le

Comun.
Conc. 1.Comun.
Conc. 3

forze

forze adunque $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ si equilibrano colle forze $MN \text{ } NO \text{ } OT$, ovvero colla forza intera MT . Ma si è dimostrato che ancora la forza S si equilibra colla forza MT . Sonovi dunque alcune forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$ ed altra forza S , che possono colla medesima forza MT equilibrarsi. Equivalente ella è dunque Defin. 10 la forza S alle forze $P \text{ } \mathcal{Q} \text{ } R$; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 3.

Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali, ed altre forze pure fra loro direttamente parziali ma direttamente contrarie alle prime, e le prime forze sieno uguali alle seconde; saranno tutte le forze fra loro in equilibrio.

Le forze $H \text{ } I$ sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali l'altre forze $K \text{ } L \text{ } M$ ma direttamente contrarie alle forze $H \text{ } I$. Sia poi l' AB la comune direzione di tutte; e le forze $H \text{ } I$ tendano dall' A verso il B , e le forze $K \text{ } L \text{ } M$ dal B verso l' A . Sieno in oltre le forze $H \text{ } I$ uguali alle forze $K \text{ } L \text{ } M$. Dico che sono fra loro in equilibrio tutte le forze $H \text{ } I \text{ } K \text{ } L \text{ } M$. Fig. 3

Imperocchè prendasi la forza $\mathcal{Q}$ uguale alle forze $H \text{ } I$, e si applichi secondo la direzione AB sì che tenda dall' A verso il B , e alle stesse forze $H \text{ } I$ sia direttamente parziale. Similmente si prenda la forza R uguale alle forze $K \text{ } L \text{ } M$, e si applichi secondo la direzione AB , sì che tenda dal B verso l' A , e alle stesse forze $K \text{ } L \text{ } M$ sia direttamente parziale. Dimand. 1

E poichè uguale è la forza $\mathcal{Q}$ e direttamente parziale alle forze $H \text{ } I$, quindi sarà la forza $\mathcal{Q}$ equivalente alle forze $H \text{ } I$. Per la stessa ragione la forza R è equivalente alle forze $K \text{ } L \text{ } M$. Di nuovo poichè si pongono le forze $H \text{ } I$ uguali alle forze $K \text{ } L \text{ } M$, e le forze $H \text{ } I$ sono uguali alla forza $\mathcal{Q}$, e le forze $K \text{ } L \text{ } M$ alla forza R , quindi sarà ancora la forza $\mathcal{Q}$ uguale alla forza R . Elleno sono poi ancora le forze $\mathcal{Q} \text{ } R$ direttamente contrarie, perocchè sono applicate secondo la comune direzione AB e tendono da parti contrarie. Adunque la forza $\mathcal{Q}$ è in equilibrio colla forza R . Ma alla forza R sono equivalenti le forze $K \text{ } L \text{ } M$. La forza dunque $\mathcal{Q}$ è in equilibrio colle forze $K \text{ } L \text{ } M$. Alla forza Prop. 2

Comun.
Conc. 1
per l'inversa
Defin. 10

per l'inversa
Defin. 10 poi $\mathcal{Q}$ sono equivalenti le forze $H I$. Elleno sono dunqu
fra loro in equilibrio le forze $H I$ colle forze $K L M$; i
che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 4.

Se alcune forze fra loro direttamente parziali sieno in equilibrio con altre forze fra loro direttamente parziali, saranno le prime forze uguali alle seconde, e ad esse direttamente contrarie.

Fig. 3

Sieno fra loro in equilibrio le forze $H I K L M$; delle quali alcune forze $H I$ sieno fra loro direttamente parziali, e sieno applicate secondo la comune direzione DB e tendenti amendue dal D verso il B ; e l'altre forze $K L M$ sieno pure fra loro direttamente parziali, e sieno applicate secondo la comune direzione AC e tendenti tutte e tre dal C verso l' A . Dico che le forze $H I$ sono uguali alle forze $K L M$, e ad esse direttamente contrarie.

Imperocchè prendasi la forza $\mathcal{Q}$ uguale alle forze $H I$, e si applichi secondo la direzione DB sì che tenda dal D verso il B , e sia alle forze $H I$ direttamente parziale. Poi si prenda un'altra forza R uguale alle forze $K L M$, e si applichi secondo la direzione AC , sì che tenda dal C verso l' A , e sia alle forze $K L M$ direttamente parziale.

Fig. 2

Equivalenti elleno sono adunque, la forza $\mathcal{Q}$ alle forze $H I$, e la forza R alle forze $K L M$. E poichè si pongono le forze $H I$ in equilibrio colle forze $K L M$, e le forze $H I$ sono equivalenti alla forza $\mathcal{Q}$; quindi sarà ancora la forza $\mathcal{Q}$ in equilibrio colle forze $K L M$. Ma le forze $K L M$ sono equivalenti alla forza R . Adunque ancora le forze $\mathcal{Q} R$ sono fra loro in equilibrio. Uguale ella è adunque la forza $\mathcal{Q}$ alla forza R e direttamente contraria; e però $ACDB$ è una linea retta. Ma la forza $\mathcal{Q}$ è uguale alle forze $H I$, e la forza R alle forze $K L M$. Uguali sono adunque le forze $H I$ alle forze $K L M$ e direttamente contrarie; le une tenderanno dall' A verso il B , le altre dal B verso l' A ; il che convenia dimostrare.

per l'inversa
Defin. 10

Comun.
Coroll. 2

PROPOSIZIONE 5.

A due forze disuguali e direttamente contrarie è equivalente una forza uguale all' eccello in cui la maggiore supera la minore, direttamente parziale poi alla maggiore.

Sia la forza P disuguale alla forza Q e direttamente con- Fig. 4
traria, e sia maggiore la forza P . Sieno poi le forze P Q
applicate secondo la comune direzione AB , e tendano, la
forza P dall' A verso il B , e la forza Q dal B verso l' A .
Si applichi ora secondo la stessa direzione AB la forza S Dimand. 1
uguale all' eccello in cui la forza P supera la Q ; e tenda la
forza S dall' A verso il B , cioè sia alla forza maggiore P
direttamente parziale. Dico che equivalente è la forza S alle
forze P Q .

Imperocchè si applichi secondo la direzione AB un' altra Dimand. 1
forza R uguale alla forza S , ma tendente dal B verso l' A ,
sicchè sia la forza R alla forza Q direttamente parziale, e
alle forze S P direttamente contraria.

E poichè la forza S è uguale all' eccello in cui la forza
 P supera la forza Q , quindi uguale sarà la forza P alle for-
ze Q S ; ma la forza S è uguale alla forza R . Adunque la
forza P sarà uguale alle forze Q R . Ella è poi ancora la
forza P direttamente contraria alle forze Q R . Sonovi dun-
que alcune forze direttamente parziali Q R ed un' altra for-
za P ad esse direttamente contraria, e le forze Q R sono
uguali alla forza P . In equilibrio è adunque la forza P col-
le forze Q R ; e però le forze P Q sono in equilibrio colla Prop. 3
forza R . Ma ancora la forza S è in equilibrio colla forza
 R , perocchè sono uguali e direttamente contrarie; laonde sì
le forze P Q che la forza S possono equilibrarsi colla mede-
sima forza R . Equivalente ella è adunque la forza S alle Defin. 10
forze P Q ; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 6.

*Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali ed
altre forze pure fra loro direttamente parziali, ma diretta-
mente contrarie alle prime; e le prime forze sieno mag-10-*

ri delle seconde; una forza uguale all' eccello in cui le maggiori superano le minori, direttamente parziale poi alle maggiori, sarà equivalente a tutte le forze.

Fig. 5

Le forze $H I$ sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali le altre forze $K L M$, ma direttamente contrarie alle forze $H I$. Sia poi la retta AB la comune direzione di tutte, e tendano le forze $H I$ dall' A verso il B , e le forze $K L M$ dal B verso l' A . Sieno in oltre le forze $H I$ disuguali alle forze $K L M$, e maggiori le $H I$. Si applichi poi secondo la direzione AB la forza T uguale all' eccello in cui le forze $H I$ superano le forze $K L M$, e tenda la forza T dall' A verso il B sì che alle forze maggiori $H I$ sia direttamente parziale. Dico ch'equivalente è la forza T a tutte le forze $H I K L M$.

Dimand.

Imperocchè prendasi una forza $\mathcal{Q}$ uguale alla forza T , e sia essa applicata secondo la direzione AB e tendente dal B verso l' A sì che alle forze $K L M$ sia direttamente parziale, e direttamente contraria alle forze $T H I$.

E poichè la forza T è uguale all' eccello in cui le forze $H I$ superano le forze $K L M$; quindi saranno le forze $H I$ uguali alle forze $K L M T$. La forza T poi è uguale alla forza $\mathcal{Q}$. Uguali sono adunque le forze $H I$ alle forze $K L M \mathcal{Q}$. E poichè sonovi alcune forze $H I$ fra loro direttamente parziali, ed altre forze $K L M \mathcal{Q}$ pure fra loro direttamente parziali, ma direttamente contrarie alle prime $H I$, e le forze $H I$ sono uguali alle forze $K L M \mathcal{Q}$; quindi equilibreranno le forze $H I$ colle forze $K L M \mathcal{Q}$,

Prop. 3

cioè le forze $H I K L M$ si equilibreranno colla forza $\mathcal{Q}$.

Defn. 10

Ma ancora la forza T si equilibra colla forza $\mathcal{Q}$, perocchè sono esse uguali e direttamente contrarie. Equivalente ella è dunque la forza T alle forze $H I K L M$; il che conveniva dimostrare.

PROPOSIZIONE 7.

Se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, le uguali e direttamente contrarie ad alcune di esse, una all' altra, saranno equivalenti alle forze rimanenti.

Fig. 6

Sieno fra loro in equilibrio le forze $P \mathcal{Q} R M$, e sieno

applicate, la forza P secondo la direzione AB e tenda dall' A verso il B , la forza Q secondo la direzione CD e tenda dal C verso il D , la forza R secondo la direzione EG e tenda dal G verso l' E , e la forza M secondo la direzione LI e tenda dall' L verso l' I . Applicchinsi poi le forze $T S$ uguali e direttamente contrarie alle forze $R M$, una all'altra; cioè la forza T uguale alla forza R e tenda secondo la direzione EG dall' E verso il G , e la forza S uguale alla forza M e tenda secondo la direzione IL dall' I verso l' L . Dico ch'equivalenti sono le forze $T S$ alle forze $P Q$.

Imperocchè poichè uguale e direttamente contraria è la forza T alla forza R ; quindi sarà la forza T in equilibrio colla forza R . Per la stessa ragione la forza S è in equilibrio colla forza M . Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiunganti forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. Adunque le forze $T S$ sono in equilibrio colle forze $E M$. Si pongono poi ancora le forze $P Q$ in equilibrio colle forze $E M$. Sonovi dunque alcune forze $T S$ ed altre forze $P Q$ che possono colle medesime forze equilibrarsi. Equivalenti elleno sono dunque le forze $T S$ alle forze $P Q$; il che convenia dimostrare.

Comun.
Conc. 1

Comun.
Conc. 3

Defin. 10

PROPOSIZIONE 8.

Non possono essere in equilibrio le forze medesime con una ed altra forza applicate secondo differenti direzioni.

Imperocchè, se sia possibile, le forze $P Q$ applicate secondo le direzioni $AB CD$ sieno in equilibrio coll' una e coll' altra forza $M R$ applicate secondo differenti direzioni, la forza M secondo la direzione KF e tendente dal K verso l' F , e la forza R secondo la direzione GH e tendente dal G verso l' H . E prendasi la forza N uguale alla forza M , e si applichi la forza N sì che sia alla forza M direttamente contraria, cioè sia applicata secondo la direzione FK e tenda dall' F verso il K .

Fig. 7

Dimand. 1

E poichè le forze $P Q M$ sono fra loro in equilibrio, ed evvi una forza N uguale e direttamente contraria ad una di esse M ; quindi equivalente sarà la forza N alle forze $P Q$. Di nuovo poichè le forze $P Q R$ sono fra loro in equili-

Prop. 7

per l'inversa
Defin. 10

Comun.
Conc. 2

brio, e le forze P Q si sono dimostrate equivalenti alla forza N ; quindi sarà ancora la forza N in equilibrio colla forza R . Adunque la forza N alla forza R è uguale e direttamente contraria. Una comune direzione elleno hanno adunque le forze N R , e perciò la retta GH cade sopra la retta FK ; il che non si pone. Non possono dunque essere le medesime forze P Q in equilibrio con una ed altra forza M R applicate secondo differenti direzioni; il che convenia dimostrare.

C O R O L L A R I O .

Quindi non possono una ed altra forza applicate secondo differenti direzioni alle medesime forze essere equivalenti; imperocchè altrimenti nelle direzioni dell'una e dell'altra forza applicate forze ad esse uguali e direttamente contrarie, queste sarebbero in equilibrio colle forze medesime; il che per la proposizione non può essere.

P R O P O S I Z I O N E 9.

Se tre forze sieno fra loro in equilibrio, e le direzioni di due di esse si seghino in un punto, ancora la direzione della terza forza passerà pel punto medesimo, e tutte e tre le direzioni saranno nello stesso piano.

Fig. 8

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R ; e sieno applicate, la forza P secondo la direzione AB e tenda dall' A verso B , la forza Q secondo la direzione AC e tenda dall' A verso il C , e la forza R secondo la direzione DE e tenda dal D verso l' E . Le direzioni poi AB AC delle forze P Q seghinfi nel punto A . Dico che ancora la direzione DE della forza R passerà pel punto A , e che le tre direzioni AB AC DE sono nello stesso piano.

Dimostr. 2

Imperocchè, se sia possibile, non passi la DE pel punto A . E poichè le forze P Q sono applicate secondo le direzioni AB AC segantifi nel punto A ; quindi saravvi certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto A , la quale colle forze suddette P Q si equilibrerà. Sia questa la forza M applicata secondo la direzione AI che

passi pel punto A , e tenda la forza M dall' A verso l' I . Le due forze adunque medesime P Q sono in equilibrio e coll' una e coll' altra delle forze M R , che secondo differenti direzioni AI DE sono applicate, perocchè passa l' AI e la DE no pel punto A . Ma ciò non può essere. Non può dunque la direzione DE non passare pel punto A . Egli Prop. 8 è però necessario che passi per esso; ciò che convenia in primo luogo dimostrare.

Dico ora in secondo luogo che le tre direzioni AB AC AE sono tutte e tre costituite nello stesso piano.

Imperocchè se non è così, sieno, se sia possibile, le due AB AC in un piano e l' AE in un altro, e tirinsi le rette BC CE EB ; sarà dunque $BECA$ una piramide avente per base il triangolo EBC , vertice il punto A . Costruiscasi ora il prisma BH , la cui base sia il triangolo BCE , ed opposto ad esso il triangolo GFH ; ed abbia in oltre il prisma la stessa altezza della piramide $BECA$; cioè la perpendicolare tirata dal punto A al piano per EBC . Egli è dunque manifesto che il punto A è nel piano per GFH . E poichè parallelo è il piano per BCE al piano per GFH , e nel piano per BCE sonovi i punti B C E ; quindi i punti B C E cadono tutti e tre dalla stessa parte del piano per GFH ; il punto A è poi nel piano stesso per GFH . Adunque le tendenze delle forze P Q R , cioè quella della forza P dall' A verso il B , quella della forza Q dall' A verso il C , e quella della forza R dall' A verso l' E , sono tutte volte dalla stessa parte del piano per GFH . Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze P Q R , le cui direzioni si segano nel punto A , e le cui tendenze sono tutte volte dalla stessa parte del piano per GFH ; il che non può essere; non sono dunque Comun.
Conc. 5 le rette AB AC in un piano, e l' AE in un altro. Elleno sono adunque nello stesso piano le tre direzioni AB AC AE ; il che convenia in secondo luogo dimostrare.

COROLLARIO.

Da ciò si rende manifesto, che se una forza sia equivalente a due forze le cui direzioni si seghino in un punto, ancora la direzione della forza equivalente passerà pel pun-

to medesimo, e tutte e tre le direzioni consisteranno nello stesso piano; imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 10.

Se due forze con una forza s'equilibrino, e le direzioni delle due forze si sèghino in un punto; la terza forza non avrà una comune direzione nè coll'una, nè coll'altra delle prime forze; e la direzione di ciascuna delle tre forze segherà l'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti (a).

Fig. 9

Le due forze P Q colla forza R s'equilibrino. E sia applicata la forza P secondo la direzione EB , e la forza Q secondo la direzione DC ; e sèghinsi le direzioni EB DC nel punto A . Dico in prima che la forza R non può avere una comune direzione nè con una, nè coll'altra delle forze P Q .

Imperocchè abbiala, se sia possibile, colla forza P , cioè sia la retta EB comune direzione delle forze P R ; e presi dall'una parte e dall'altra del punto A nella direzione EB i punti E B , e nella direzione DC i punti D C ; tenda la forza P nella direzione EB dall' A verso il B , e la forza Q nella direzione DC dall' A verso il C . Pertanto la forza R applicata secondo la direzione EB tenderà o dall' A verso l' E , o dall' A verso il B , cioè farà alla forza P contraria ovvero parziale direttamente; ed essendo direttamente contraria, o farà uguale ad essa o disuguale. Sia uguale e direttamente contraria. La forza dunque R è in equilibrio e colla sola forza P e colle due forze P Q ; il che è un assurdo. Non è dunque la forza R uguale e direttamente contraria alla forza P . Sia poi disuguale e direttamente contraria, e la forza P sia maggiore. E prendasi la forza S uguale all'eccesso in cui la forza P supera la forza R , e applichisi secondo la direzione EB sì che tenda dall' A verso il B e sia
alla

(a) Tutti gli statici hanno ommesso questo Teorema, perchè nessuno si è avvisato di tener conto della tendenza delle forze.

alla forza maggiore P direttamente parziale. Equivalente el- Prop. 5.
 la è dunque la forza S alle forze $P R$. E poichè le forze
 $P R$ si pongono in equilibrio colla forza Q , e alle forze
 $P R$ è equivalente la forza S ; quindi sarà la forza S in Comun.
 Conc. 2.
 equilibrio colla forza Q . Elleno dunque sono uguali e diret-
 tamente contrarie le forze $S Q$, e però applicate secondo
 una comune direzione; il che è contro la polizione. Non è
 dunque la forza R disuguale e direttamente contraria alla
 forza P . Sia per fine la forza R alla forza P direttamente
 parziale. E presa la forza S uguale alle forze $R P$ e ad es-
 se direttamente parziale, si dimostrerà come sopra l'assurdo.
 La forza dunque R non può essere nè direttamente contra-
 ria, nè direttamente parziale alla forza P , cioè non può
 avere colla forza P una comune direzione. Allo stesso mo-
 do si proverà che la forza R non può avere una comune
 direzione colla forza Q . La forza dunque R non può avere
 una comune direzione nè con una, nè coll'altra delle forze
 $P Q$; il che convenia in primo luogo dimostrare.

Sia dunque la retta GF la direzione della forza R . Passe-
 rà certamente la direzione GF pel punto A ove si segano le Prop. 9.
 direzioni $EB DC$ delle forze $P Q$; e presi dall'una parte e
 dall'altra del punto A nella direzione GF i punti $G F$, ten-
 da la forza R secondo la direzione GF dall' A verso l' F ; e
 le forze $P Q$ tendano come di sopra si è detto. Sarà dun-
 que il BAC l'angolo alla tendenza delle due forze $P Q$, il Defin. 8.
 CAF l'angolo alla tendenza delle due forze $Q R$, e l' FAB
 l'angolo alla tendenza delle due forze $R P$. Ora dico in
 secondo luogo che la direzione di ciascuna delle tre forze
 $P Q R$ sega l'angolo alla tendenza delle due forze rima-
 nenti.

Imperocchè, se sia possibile, non seghi la direzione GF
 della forza R l'angolo BAC alla tendenza delle forze $P Q$;
 e però nemmeno l'angolo DAE opposto al vertice all'ango-
 lo BAC . La GF poi non può cadere nè sopra l'una, nè so-
 pra l'altra delle rette $EB DC$, perchè allora la forza R
 avrebbe una comune direzione o con una o coll'altra delle
 forze $P Q$, che non l'ha. La retta dunque GF segnerà gli
 angoli $BAD CAE$, che sono accanto all'angolo BAC , e tra
 loro opposti al vertice, come nella figura. E dividanli co-

munque gli altri angoli GAB EAF opposti al vertice per mezzo della retta IAH . Egli è dunque evidente che tutti e tre i punti B , C , F cadono dalla stessa parte della retta IAH ; ma il punto A è nella retta IAH . Adunque le tendenze delle forze P Q R , cioè quella della forza P dall' A verso il B , quella della forza Q dall' A verso il C , e quella della forza R dall' A verso l' F , sono tutte volte dalla stessa parte della retta IAH . Sono dunque fra loro in equilibrio le tre forze P Q R , le cui direzioni si segano nello stesso punto A , e le cui tendenze sono tutte volte dalla stessa parte della retta IAH ; il che è un assurdo. Non sega dunque la direzione GF gli angoli BAD CAE . Ella non può poi cadere nè sopra l'una, nè sopra l'altra delle rette FB DC . Segherà dunque la GF l'angolo BAC , e ancora l'angolo DAE ad esso opposto al vertice, come nell'altra figura. Nella stessa guisa si proverà che la direzione BE della forza P sega l'angolo CAF alla tendenza delle forze Q R , e che la direzione CD della forza Q sega l'angolo FAB alla tendenza delle forze R P ; il che convenia in secondo luogo dimostrare.

Comun.
Conc. 5.

Fig. 10

COROLLARIO 1.

Quindi se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, ciascuna forza nella propria direzione tenderà dalla parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti.

COROLLARIO 2.

E' manifesto ancora che se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, i tre angoli alla tendenza al detto punto costituiti saranno insieme uguali a due retti.

COROLLARIO 3.

E' pure manifesto che se una forza sia equivalente a due forze, le cui direzioni seghinli in un punto, non avrà la forza equivalente una comune direzione nè con una nè coll'

altra delle due forze; l'angolo alla loro tendenza sarà segnato dalla direzione della forza equivalente; ma questa tenderà nella propria direzione dalla parte stessa colle due altre forze. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa sarà colle prime due forze in equilibrio.

PROPOSIZIONE II.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto; e sieno uguali due di esse forze; la direzione della terza forza segherà per mezzo l'angolo alla tendenza delle forze uguali.

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R , e sieno Fig. II
applicate, la forza P secondo la direzione GB , la forza Q secondo la direzione FC , e la forza R secondo la direzione DE ; e seghinsi le direzioni GB FC DE nel punto A ; e sia in oltre uguale la forza P alla forza Q . Preli poi dall'una e dall'altra parte del punto A nella direzione GB i punti G B , nella direzione FC i punti F C , e nella direzione DE i punti D E , pongasi tendere la forza P nella propria direzione GB dall' A verso il B , la forza Q nella propria direzione FC dall' A verso il C , e la forza R nella propria direzione DE dall' A verso il D . Sarà dunque il BAC l'angolo alla tendenza delle forze P Q , il CAD l'angolo alla tendenza delle forze Q R , e il DAB l'angolo alla tendenza delle forze R P ; e la direzione ED della forza R segherà l'angolo BAC alla tendenza delle forze P Q . Dico Prop. 10.
che essa lo segherà per mezzo

Imperocchè poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze P Q R applicate secondo le direzioni GB FC DE segantisi nell' A ; quindi tenderà la forza R da parte contraria a Coroll. 1.
quella cui tendono le forze P Q . Adunque condotta qualsivoglia retta MAN che seghi gli angoli FAB CAG , che sono accanto all'angolo BAC e fra loro opposti al vertice, cadranno i punti B C dalla stessa parte BC della retta MIN , Prop. 10.
e il punto D dalla parte contraria FG ; e però sono dalla stessa parte i tre punti B E C , e dalla parte contraria gli altri tre F D G . Pertanto se non è uguale l'angolo BAE

all'angolo EAC , segghisi l'angolo BAC colla retta AK , sicchè uguale all'angolo EAC sia l'angolo BAK . Cadrà ancora il punto K dalla parte BEC della retta MAN . Applichinsi ora nella direzione FC uguale alla forza P la forza H , che tenda dall' A verso l' F , e nella direzione GB uguale alla forza Q la forza I , che tenda dall' A verso il G , e nella direzione AK uguale alla forza R la forza S che tenda dall' A verso il K . Sarà dunque l' FAG l'angolo alla tendenza delle forze $H I$, il GAK l'angolo alla tendenza delle forze $I S$, ed il KAF l'angolo alla tendenza delle forze $S H$. E poichè uguale è la forza P all'una e all'altra delle forze $Q H$, farà la forza Q uguale alla forza H ; e sono ancora direttamente contrarie; perocchè essendo applicate secondo la comune direzione FC , la forza Q tende dall' A verso il C , mentre l'altra forza H tende dall' A verso l' F . Elleno sono dunque fra loro in equilibrio le forze $Q H$. Allo stesso modo si proverà che sono fra loro in equilibrio le forze $P I$. Di nuovo perchè uguale è l'angolo BAK all'angolo EAC , e l'angolo EAC all'angolo opposto al vertice FAD ; quindi uguale farà l'angolo FAD all'angolo BAK . Pongati comune l'angolo FAB . Uguale egli è dunque tutto l'angolo DAB a tutto l'angolo KAF . In oltre essendo uguale l'angolo EAC all'angolo BAK , tolto l'angolo comune EAK ; farà l'angolo rimanente KAC uguale all'angolo rimanente BAE . Ma uguale è l'angolo BAE all'angolo DAG opposto al vertice. Adunque ancora l'angolo DAG è uguale all'angolo KAC . Pongati comune l'angolo GAC . Tutto dunque l'angolo CAD è uguale a tutto l'angolo GAK . L'angolo poi BAC è uguale all'angolo opposto al vertice FAG . Sonovi dunque fra loro in equilibrio tre forze $P Q R$ applicate secondo le direzioni $GB FC DE$ segantisi nel punto A ; e le $H I S$ sono tre altre forze uguali alle forze $P Q R$, una all'altra, cioè la forza H alla forza P , la forza I alla forza Q , e la forza S alla forza R , le quali tre forze sono applicate secondo tre direzioni $FC GB AK$ pure segantisi nel punto A ; e si è dimostrato l'angolo FAG alla tendenza delle forze $H I$ uguale all'angolo BAC alla tendenza delle forze $P Q$ ad esse uguali, l'angolo GAK alla tendenza delle forze $I S$ uguale all'angolo CAD alla tendenza delle forze $Q R$ ad esse ugua-

li, e l'angolo KAF alla tendenza delle forze $S H$ uguale all'angolo DAB alla tendenza delle forze $R P$ ad esse uguali. Elleno dunque sono ancora fra loro in equilibrio le forze $H I S$; per conseguenza tutte le sei forze $P Q R H I S$ sono fra loro in equilibrio: delle quali si è dimostrata la forza P in equilibrio colla forza I , e la forza Q colla forza H . La forza dunque rimanente R è in equilibrio colla forza rimanente S ; e perciò le forze $R P$ sono direttamente contrarie, ed avranno una comune direzione. Retta è dunque la linea DAK . Ma è retta ancora la DAE . Quindi le rette $DAK DAE$ avranno il comun segamento Da ; il che è un assurdo. Non è dunque l'angolo BAE disuguale all'angolo EAC , e però sarà ad esso uguale. Laonde l'angolo BAC è diviso per mezzo dalla retta ED ; il che convenia dimostrare.

Dimand. 3.

Comun.

Conc. 3.

Comun.

Conc. 4.

COROLLARIO.

Quindi se una forza sia equivalente a due forze fra loro uguali, e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; la direzione della forza equivalente segnerà per mezzo l'angolo alla tendenza delle forze uguali; imperciocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle due prime forze si equilibrerà (α).

PROPOSIZIONE 12.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e sieno disuguali due qualunque di esse

(α) Questo Corollario contiene una domanda di *Daniel Bernoulli*, che ei esprime così. *Potentia simplex, quae aequivalens duabus potentiis aequalibus, aequaliter versus utramque inclinatur, id est, ipsius directio secatur bifariam angulum comprehensum inter directiones duarum potentiarum.* Ma io dirò qui di nuovo, che è superfluo richiedere quello che si può dimostrare. Poi di passaggio osserverò che *Bernoulli* non si spiega abbastanza quando asserisce

che la direzione della forza equivalente debbe segar per mezzo l'angolo compreso fra le direzioni delle due potenze, poichè queste due direzioni segandosi fanno quattro angoli. Quale di questi quattro è quello che si ha da intendere segato per mezzo della direzione della forza equivalente? La mia settima definizione ficiuta motto il modo di enunciare questa vaghiuola domanda o proposizione.

forze, la direzione della terza forza segnerà l'angolo alla tendenza delle due prime forze, in modo che alla direzione della forza maggiore corrisponderà il minore segmento.

Fig. 12

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze PT Q R applicate secondo le direzioni AB AC AD segantili nel punto A ; e tendano, la forza PT nella propria direzione AB dall' A verso il B , la forza Q nella propria direzione AC dall' A verso il C , e la forza R nella propria direzione AD dall' A verso il D . E sia disuguale la forza PT alla forza Q , e di essa maggiore. Adunque la direzione DA (prolungata se occorre) della forza R segnerà l'angolo BAC alla tendenza delle forze PT Q . Dico che lo segnerà in modo che il segmento BAE , che corrisponde alla direzione AB della forza maggiore PT , farà minore del segmento EAC .

Prop. 10.

Imperocchè poichè la forza PT è maggiore della forza Q , quindi intendasi divisa la forza PT nelle forze PS ST , delle quali la forza PS sia uguale alla forza Q . E perchè le forze PT Q sono in equilibrio colla forza R , non faranno le forze PS Q in equilibrio colla forza R . Di nuovo poichè le forze PS Q sono applicate secondo le direzioni

Dimand. 2. AB AC segantili nel punto A ; quindi vi sarà certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto A , che con esse forze PS Q si equilibrerà. Sia la H questa forza; la retta FG che passa pel punto A sia la sua direzione; e presi dall' una e dall' altra parte del punto A nella FG i due punti F G , tenda la forza H nella propria direzione FG dall' A verso l' F . Si applichi finalmente secondo la stessa direzione FG la forza I uguale alla forza H e direttamente contraria, sì che tenda dall' A verso il G . Egli è manifesto che il punto G cadrà dalla stessa parte de' punti B C , e il punto F da parte contraria. E poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze PS Q H , delle quali la forza PS è uguale alla forza Q ; quindi la direzione FAG segnerà per mezzo l'angolo BAC alla tendenza delle forze PS Q ; e però farà l'angolo BAG la metà dell'angolo BAC . Oltre a ciò farà la forza I , che è uguale e direttamente contraria alla forza H , equivalente alle forze PS Q . Di nuovo poichè sono fra loro in equilibrio le forze R PT Q ; ed equivalente è la forza PT alle forze

Prop. 11.

PS ST ; quindi saranno ancora fra loro in equilibrio le forze R PS ST $\mathcal{Q}$. Ma si è dimostrata la forza I equivalente alle forze PS $\mathcal{Q}$. In equilibrio sono adunque ancora le forze R ST I applicate secondo le direzioni AD AB FG seggiantisi nel punto A , e tendenti, la forza R dall' A verso il D , la forza ST dall' A verso il B , e la forza I dall' A verso il G . Adunque la direzione DAE della forza R seggerà l'angolo BAG alla tendenza delle due forze ST $\mathcal{Q}$. Comu.
Conc. 4. Prop. 10.
Minore egli è dunque l'angolo BAE dell'angolo BAG , ossia della metà dell'angolo BAC ; laonde l'angolo rimanente EAC sarà di essa metà maggiore. L'angolo dunque BAE è minore dell'angolo EAC ; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

E però se una forza sia equivalente a due forze fra loro disuguali, e le direzioni di tutte e tre si segghino in un punto; la direzione della forza equivalente seggerà l'angolo alla tendenza delle forze disuguali, in modo che alla direzione della forza maggiore corrisponderà il minore segamento; imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 13.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si segghino in un punto, e da un punto preso nella direzione di una si conducano linee rette parallele alle direzioni dell'altre due forze, onde costituire un parallelogrammo, ed una delle due forze sia uguale all'altra; ancora il lato del parallelogrammo, che giace sulla direzione di una, sarà uguale al lato che giace sulla direzione dell'altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le direzioni AF AG AD delle forze P $\mathcal{Q}$ R fra loro in equilibrio si segghino nel punto A ; e tenda la forza P dall' A verso l' F , la forza $\mathcal{Q}$ dall' A verso il G , e la forza R dall' A verso il D . Saranno gli FAG GAD DAF gli angoli alla tendenza di due a due delle forze P $\mathcal{Q}$ R ; e la direzione Fig. 13 e 14

AD della forza R segnerà l'angolo FAG alla tendenza delle due forze P Q . Prendasi nella AD un punto E , da cui si tirino parallele alle direzioni AF AG le rette EC EB onde costituire il parallelogrammo $EBAC$. Dico che se uguale è la forza P alla forza Q , uguale sarà ancora il lato AB al lato AC ; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Prop. II.

Imperocchè sia uguale la forza P alla forza Q . Dico che il lato AB è uguale al lato AC . Poichè essendovi tre forze P Q R applicate secondo le direzioni AF AG AD segantisi nel punto A , delle quali uguale è la forza P alla forza Q ; quindi la direzione della terza forza Q segnerà per mezzo l'angolo FAG alla tendenza delle forze P Q . L'angolo dunque BAE è uguale all'angolo EAC . Ma uguale è l'angolo EAC all'angolo alterno AEB . E però sarà l'angolo BAE uguale all'angolo AEB ; laonde uguale al lato AB è il lato BE . Ma il lato BE è uguale al lato AC . Adunque ancora il lato AB sarà uguale al lato AC . Quindi se uguale è la forza P alla forza Q , uguale sarà pure il lato AB al lato AC .

Sia ora la forza P maggiore della forza Q . Dico di nuovo che maggiore è ancora il lato AB del lato AC . Poichè essendovi tre forze P Q R applicate secondo le direzioni AF AG AD segantisi nel punto A , delle quali maggiore è la forza P della forza Q ; quindi la direzione della terza forza R segnerà per modo l'angolo FAG alla tendenza delle forze P Q , che il segmento corrispondente alla direzione AF della forza maggiore P sarà minore del segmento rimanente. L'angolo adunque BAE è minore dell'angolo EAC . Ma l'angolo EAC è uguale all'angolo alterno AEB . Adunque ancora l'angolo BAE è minore dell'angolo AEB ; e perciò minore il lato BE , cioè il lato AC , del lato AB ; laonde il lato AB sarà maggiore del lato AC . Quindi se la forza P sia maggiore della forza Q , maggiore sarà ancora il lato AB del lato AC . Allo stesso modo proverassi che se minore sia la forza P della forza Q , minore sarà ancora il lato AB del lato AC . Si è poi dimostrato che se uguale è la forza P alla forza Q , uguale è ancora il lato AB al lato AC . Se adunque la forza P sia uguale alla forza Q , uguale è ancora il lato AB al lato AC ; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE

PROPOSIZIONE 14.

Se due forze le cui direzioni si segano in un punto sieno in equilibrio con due forze le cui direzioni si segano in altro punto; e le prime forze sieno contrarie alle seconde, una all'altra; e tutte e quattro le direzioni cadano nel piano medesimo per costituire un parallelogrammo; la linea retta, che giunge i punti dei detti segamenti, segnerà gli angoli alla tendenza delle prime e delle seconde forze; e se in oltre una delle prime o delle seconde forze è uguale all'altra, ancora il lato del parallelogrammo giacente sulla direzione di una sarà uguale al lato giacente sulla direzione dell'altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le due forze P Q applicate secondo le direzioni AB AD che si segano nel punto A sieno in equilibrio colle due forze R S applicate secondo le direzioni CF CE , che si segano nel punto C . Sieno poi le forze P Q contrarie alle forze R S , una all'altra, cioè la forza P alla forza R , e la forza Q alla forza S ; onde avvenga che sia parallela la direzione AB alla direzione CF , e la direzione AD alla direzione CE ; ma la forza P tenda dall' A verso il B , la forza Q dall' A verso il D , la forza R dal C verso l' F , e la forza S dal C verso l' E . Cadano in oltre le quattro direzioni AB AD CF CE nel medesimo piano, e costituiscano il parallelogrammo $AICH$. Dico che la retta che unisce i punti A C sega l'angolo BAD alla tendenza delle forze P Q , e ancora l'angolo ECF alla tendenza delle forze R S ; e che se uguale è la forza P alla forza Q , uguale sarà ancora il lato AI al lato AH ; se maggiore, maggiore; e se minore, minore. Fig. 15 16

Dimand. 4

Imperocchè poichè le forze P Q sono applicate secondo le direzioni AB AD segantili nel punto A ; quindi vi sarà certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto A , la quale colle forze P Q si equilibrerà. Parimenti poichè le due forze R S sono applicate secondo le direzioni CF CE segantili nel punto C ; quindi vi sarà certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto C , che colle forze R S si equilibrerà. Sia la T la forza, che ap-

Dimand. 2

plicata secondo la direzione AG passante pel punto A colle forze P Q si equilibri; e la V sia la forza che applicata secondo la direzione CK passante pel punto C colle forze R S si equilibri. E poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze P Q T , le cui direzioni AB AD AG si segano nel punto A ; segnerà la direzione AG della forza T l'angolo BAC alla tendenza delle due forze P Q . Allo stesso modo si proverà che la direzione CK della forza V segnerà l'angolo ECF alla tendenza delle due forze R S . Ora perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze P Q T , e sono ancora fra loro in equilibrio le altre tre forze R S V ; quindi saranno fra loro in equilibrio le sei forze P Q T R S V ; delle quali si pongono fra loro in equilibrio le quattro forze P Q R S . Elleno sono adunque fra loro in equilibrio ancora le forze rimanenti T V ; e però le forza T è uguale e direttamente contraria alla forza V ; laonde avranno esse una comune direzione; i punti adunque A G C K sono nella stessa linea retta, cioè in quella che giunge i punti A C ; e però la retta che giunge i punti A C segnerà l'uno e l'altro degli angoli BAD ECF . Di nuovo perchè le direzioni AB AD AG delle tre forze P Q T si segano nel punto A , e dal punto C preso nella direzione AG della forza T si sono condotte le linee rette CF CE parallele alle direzioni AB AD dell'altre due forze P Q , e si è costituito il parallelogrammo $AICH$; quindi se uguale è la forza P alla forza Q , uguale ancora sarà il lato AI al lato AH ; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

Prop. 10
 Comun. Conc. 3
 Comun. Conc. 4
 Comun. Conc. 2
 Prop. 13

PROPOSIZIONE 15.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio seghinsi in un punto, e da un punto preso in una si conducano rette parallele all'altre due direzioni, onde costituire un parallelogrammo; le tre forze saranno fra loro in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione.

Fig. 17 18 Le direzioni Ae Aa Ab delle tre forze X P Z fra loro in

equilibrio segghinsi nel punto A ; e la forza X tenda dall' A verso l' e , la forza P dall' A verso l' a , e la forza Z dall' A verso il b , sicchè gli $eda aab bde$ sieno gli angoli alla tendenza di due a due delle dette forze. Nella direzione Ae , che seggherà l'angolo aab alla tendenza delle forze P Z , prendasi il punto D , da cui parallele all' altre due direzioni Aa Ab tirinsi le rette DC DB , onde costituire il parallelogrammo $ABDC$. Dico, che le forze X P Z sono in proporzionalità ordinata colie rette AD AB AC , e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione; cioè la forza X omologa alla retta AD , la forza P omologa alla retta AB , e la forza Z omologa alla retta AC . Prop. 10

Poichè prendansi della forza P e della retta AB le ugualmente moltiplici, cioè la forza QR e la retta AE , e della forza Z e della retta AC prendansi altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, cioè la forza STV , e la retta AG ; e si pongano le rette AE AG sopra i lati AB AC del parallelogrammo $ABDC$. E perchè quantuplice è la forza QR della forza P , tantuplice è la retta AE della retta AB ; quindi dividasi la forza QR nelle forze Q R uguali alla forza P , e la retta AE nelle rette AB BE uguali alla retta AB . Uguaie ella è dunque la moltitudine delle forze Q R alla moltitudine delle rette AB BE . Similmente perchè quantuplice è la forza STV della forza Z , tantuplice è la retta AG della retta AC ; quindi dividasi la forza STV nelle forze S T V uguali alla forza Z , e la retta AG nelle rette AC CF FG uguali alla retta AC . Uguaie sarà dunque la moltitudine delle forze S T V alla moltitudine delle rette AC CF FG . Ora si compiano i parallelogrammi AK AH CI FK AO BK . E perchè sono uguali fra loro le rette AC CF FG , faranno pure uguali fra loro le rette EH HI IK . La retta adunque EI è doppia della EH , ossia della BD . Ma ancora la AE è doppia della AB ; laonde egli è come la EI alla BD , così la EA alla AB . La retta dunque AD passa pel punto I . Tirinsi le rette BH CK FO , e protragganli, se così piaccia, da una parte e dall' altra. E poichè egli è come la EB alla BA così la EH alla HI ; quindi parallela alla retta AI è la retta BH . Allo stesso modo si proverà che parallela alla CK è la FO . La retta poi AI è pa-

D. m. and. r

rallela alla CK , perchè esse uniscono le linee rette AC IK fra loro uguali e parallele. Elleno sono adunque tutte fra loro parallele la rette BH AI CK FO . Pertanto applichinsi secondo le direzioni Aa Ab le forze QR STV , cioè secondo la direzione Aa la forza QR direttamente parziale alla forza P , e secondo la direzione Ab la forza STV direttamente parziale alla forza Z . Similmente si applichino altre forze secondo le direzioni KG KE , cioè secondo la direzione KG la forza qr uguale e contraria alla forza RQ , e secondo la direzione KE la forza stu uguale e contraria alla forza STV , e intendanli divise, la forza qr nelle forze q r uguali di moltitudine e di grandezza alle forze Q R , e la forza stu nelle forze s t u uguali di moltitudine e di grandezza alle forze S T V . Indi secondo la direzione BO si applichino le forze d Δ una parziale, l'altra contraria, ma amendue uguali alla forza Z , vale a dire la forza d uguale e parziale alla forza Z , e ad essa uguale e contraria la forza Δ . Si applichino ancora secondo la direzione CH le forze l L , e secondo la direzione FI le forze y Y tutte uguali alla forza P , ma ad essa sieno parziali le forze l y e contrarie le forze L Y . Per fine si applichi secondo la direzione BH le forze M m , secondo la direzione CK le forze N n , secondo la direzione FO le forze Γ g , tutte uguali alla forza X ; ma ad essa sieno parziali le forze M N Γ e contrarie le forze m n g ; la forza poi x sia uguale e direttamente contraria alla forza medesima X .

E poichè sono applicate la forza M secondo la direzione BH , e la forza Q secondo la direzione Ba , e la forza d secondo la direzione BO ; quindi sono le M Q d tre forze applicate secondo tre direzioni BH Ba BO segantisi nel B . Tre altre forze sono ancora le X P Z applicate secondo le tre direzioni Ae Aa Ab segantisi nel punto A , le quali sono uguali alle prime forze M Q d l'una all'altra, cioè la forza X alla forza M , la forza P alla forza Q , e la forza Z alla forza d . Oltre a ciò parziale essendo la forza X alla forza M , e la forza Z alla forza d , tenderanno le forze X M nelle direzioni parallele Ae BH , e le forze Z d nelle direzioni parallele Ab BO dalla stessa parte della retta AB , che unisce i punti A B delle sezioni già dette. Tendendo adunque nella direzione Ae la forza X

dall' A verso l' e , tenderà nella direzione BH la forza M dal B verso l' b ; così tendendo nella direzione Ab la forza Z dall' A verso il b , tenderà nella direzione BO la forza d dal B verso il p . Le forze poi direttamente parziali P Q tendono dalla stessa parte nella comune direzione Aa , dall' A verso l' a . Uguale egli è dunque l' angolo eAa alla tendenza delle forze X P all' angolo bBa alla tendenza delle forze M Q , e così l' angolo aAb alla tendenza delle forze P Z all' angolo aBp alla tendenza delle forze Q d ; perocchè cadendo una retta sopra rette parallele, l' angolo esteriore è uguale all' angolo interiore ed opposto. L' angolo poi ancora bAe alla tendenza delle forze Z X è uguale all' angolo pBb alla tendenza delle forze d M , perocchè se due linee che si toccano sieno parallele a due altre linee che si toccano, comprendono angoli uguali. Quindi essendo fra loro in equilibrio le tre forze X P Z , faranno ancora fra loro in equilibrio le tre forze M Q d . Per la stessa ragione sono fra loro in equilibrio le tre forze N I T applicate secondo le direzioni CK CH Cb segantili nel C ; e così ancora le tre forze Γ y V applicate secondo le direzioni FO FI Fb segantili nell' F . E perchè sono in equilibrio le forze X P Z , e alle P Z sono uguali e direttamente parziali le forze R S ; quindi faranno fra loro in equilibrio ancora le forze X R S . Per il che essendo in equilibrio la forza M colle forze Q d , la forza X colle forze R S , la forza N colle forze I T , e la forza Γ colle forze y V ; quindi saranno ancora in equilibrio le forze M X N Γ colle forze Q d , R S , I T , y V . Ma le forze Q R fanno la forza QR , e le forze S T V la forza STV . Adunque le forze M X N Γ sono in equilibrio colle forze QR STV d I y ; le forze poi m x n g sono uguali e direttamente contrarie alle forze M X N Γ . Equivalenti sono adunque le forze m x n g alle forze QR STV d I y . Di nuovo m L s sono tre forze applicate secondo le tre direzioni BH HC HE segantili nel punto H , e le X P Z sono tre altre forze applicate secondo le tre direzioni Ae Aa Ab segantili nel punto A , le quali sono uguali alle prime tre forze m L s , una all' altra, cioè la forza X alla forza m , la forza P alla forza L , e la forza Z alla forza s , oltre a ciò (uniti i punti A H del-

Dimand 3

Comun.
Conc. 3

Prep. 7

le fezioni già dette colla retta AH) contraria essendo la forza X alla forza m , la forza P alla forza L , e la forza Z alla forza s , tenderanno le forze $X m$ nelle direzioni parallele $Ae BH$, le forze $P L$ nelle direzioni parallele $Aa HC$, e le forze $Z s$ nelle direzioni parallele $Ab HE$ da parti contrarie della retta stessa AH . Tendendo adunque la forza x dall' A verso l' e , tenderà la forza m dall' H verso il Ψ ; così tendendo la forza P dall' A verso l' a , tenderà la forza L dall' H verso il Π ; e tendendo la forza Z dall' A verso il b , tenderà la forza s dall' H verso il Σ . Ma se due rette che si toccano sieno parallele a due rette che si toccano, comprendono angoli uguali. Gli angoli adunque $eAa aAb bAe$ alla tendenza di due a due delle forze $X P Z$ sono uguali agli angoli $\Psi H \Pi \Pi H \Sigma \Sigma H \Psi$ alla tendenza di due a due delle forze $m L s$. Quindi essendo fra loro in equilibrio le forze $X P Z$; faranno pure fra loro in equilibrio le forze $m L s$. Allo stesso modo proverassi essere fra loro in equilibrio le forze $x Y t$ applicate secondo le direzioni $AI IF IE$ segantisi nell' I ; e così le forze $n q u$ applicate secondo le direzioni $CK KG KE$ segantisi nel K ; e le tre forze $g r \Delta$ applicate secondo le direzioni $OF OG OB$ segantisi nell' O . Per il che essendo in equilibrio la forza m colle forze $L s$, la forza x colle forze $Y t$, la forza n colle forze $q u$, e la forza g colle forze $r \Delta$; quindi faranno in equilibrio le forze $m x n g$ colle forze $L s, Y t, q u, r \Delta$. Ma le forze $s t u$ fanno la forza stu , e le forze $q r$ la forza qr . In equilibrio sono dunque le forze $m x n g$ colle forze $qr stu \Delta L Y$. Si è poi di sopra dimostrato che le forze $m x n g$ sono equivalenti alle forze $QR STV d l y$. Elleno sono dunque in equilibrio le forze $QR STV d l y$ colle forze $qr stu \Delta L Y$; delle quali sono fra loro in equilibrio la forza d colla forza Δ , la forza l colla forza L , e la forza y colla forza Y ; perocchè sono uguali e contrarie. Laonde le forze rimanenti $QR STV$ sono in equilibrio colle forze rimanenti $qr stu$. Sonovi dunque due forze $QR STV$ applicate secondo le direzioni $Aa Ab$ che si segano nel punto A in equilibrio colle forze $qr stu$ applicate secondo le direzioni $KG KE$ che si segano nel punto K ; e le prime forze sono contrarie alle

Dimand. 3

Comun.
Conc. 3

Defin. 10

Comun.
Conc. 4.

seconde, una all'altra, cioè la forza QR alla forza qr , e la forza STV alla forza stu ; e tutte e quattro le direzioni Aa Ab KG KE cadono nello stesso piano e costituiscono il parallelogrammo $AEKG$. Quindi se uguale è la forza QR alla forza STV , uguale ancora sarà il lato AE al lato AG ; se maggiore, maggiore; e se minore, minore. Sonovi pertanto quattro grandezze, cioè le due forze P Z e le due rette AB AC ; e della forza P e della retta AB si sono prese le ugualmente moltiplici, la forza QR e la retta AE ; e della forza Z e della retta AC si sono prese altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, la forza STV e la retta AG ; e si è dimostrato che se la forza QR è maggiore della forza STV , maggiore ancora è la retta AE della retta AG ; se uguale, uguale; e se minore, minore. Egli è dunque come la forza QR alla forza STV , così la retta AB alla retta AC (a).

Prop. 14

Euclide
Defin. 5
Lib. 5.

Protragganli ora, se occorre, le rette Aa CK finchè s'incontrino nel punto Φ , e dal punto Φ parallela alla AC tirili la $\Phi\Theta$ onde compiere il parallelogrammo $AC\Phi\Theta$. Uguale sarà la $A\Theta$ alla AD , perocchè uguale e simile è il triangolo $A\Phi\Theta$ al triangolo ABD . Nello stesso modo poi di prima dimostrerassi, che egli è come la forza Z alla forza X , così la retta AC alla retta $A\Theta$, ovvero alla retta AD . Per il che essendosi dimostrato che come la forza P alla forza Z , così è la retta AB alla retta AC , e come la forza Z alla forza X , così la retta AC alla retta AD ; quindi per uguaglianza di proporzione ordinata egli farà ancora come la forza P alla forza X , così la retta AB alla retta AD . Le forze adunque X P Z sono in proporzionalità ordinata colle rette AD AB AC ; e ciascuna forza è omologa alla retta, che giace sulla propria direzione; il che convenia dimostrare.

(a) Molti si sono scagliati contro questa definizione d'Euclide da me citata, sostenendo ch'ella è piuttosto proposizione che definizione. Senza entrare in tale esame osserverò solamente, che siccome presa ella o sotto uno

o sotto l'altro aspetto non contiene meno una verità indubitabile, così sarà esatta la dimostrazione del mio teorema a tale verità appoggiantesi.

COROLLARIO I.

E perchè le forze XPZ sono in proporzionalità ordinata colle rette $AD AB AC$, e uguale alla AC è la BD ; quindi saranno in proporzionalità ordinata le forze XPZ co' lati $AD AB BD$ del triangolo ABD . Ma due lati di un triangolo, comunque presi, sono maggiori del rimanente. Adunque ancora due delle forze XPZ , comunque prese, sono maggiori della forza rimanente: laonde se tre forze le cui direzioni si segano in un punto sieno fra loro in equilibrio, due delle forze, comunque prese, saranno maggiori della rimanente.

COROLLARIO 2.

Da ciò si fa manifesto ancora che se una forza sia equivalente a due forze; e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; e da un punto preso in una direzione si conducano linee rette parallele all'altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo; la forza equivalente e le due altre forze saranno in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione; ed in oltre due forze comunque prese saranno maggiori della forza rimanente. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e direttamente contraria; questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 16.

Se le direzioni di tre forze si seghino in un punto, e sieno costituite nello stesso piano; e ciascuna forza tenda nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; e da un punto preso in una direzione condotte linee rette parallele all'altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo, sieno le tre forze in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo,

mo, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione, saranno le tre forze fra loro in equilibrio (a).

Le direzioni AE AK AL delle forze R P Q s'eghinsì nel punto A , e sieno nello stesso piano costituite. Tenda poi ciascuna delle forze R P Q nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; la forza R tenda dall' A verso l' E , la forza P dall' A verso il K , e la forza Q dall' A verso l' L ; e da un punto D preso nella direzione EA condotte le rette DC DB parallele alle rette AK AL onde costituire il parallelogrammo $ABCD$, sieno le forze R P Q in proporzionalità ordinata colle rette AD AB AC , e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Dico che sono fra loro in equilibrio le tre forze R P Q .

Imperocchè poichè le due forze P Q sono applicate secondo le direzioni AK AL segantili nell' A ; quindi saravvi certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pell' A , che colle forze medesime P Q si equilibrerà. Sia questa la forza T ; e se è possibile non sia la forza T applicata secondo la direzione AE , ma secondo un' altra direzione AH , che passi però pell' A . Segherà adunque la direzione AH l'angolo BAC alla tendenza delle forze P Q , e il suo opposto al vertice. E perchè sono uguali a due retti gli angoli BAC ACD , saranno minori di due retti gli angoli GAC ACD ; laonde le rette AH CD (prolungate se occorre) rincontreranno insieme; si rincontrino nel punto G , e dal G parallela alla AL tirisi la GF . Pertanto poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze T P Q applicate secondo le direzioni AH AK AL segantili nell' A ; e dal punto G preso nella direzione AH si sono condotte linee

To. V.

M m m

(a) Alcuni fra i moderni matematici sogliono omettere, forse come superflue, le proposizioni inverse. Ciò andrebbe bene se una qualunque proposizione fosse sempre invertibile. Non sono però tanto da condannarsi per questa mancanza gli autori di memorie, quanto quelli di elementi; e per-

ciò io mi sono liberato da questa taccia dimostrando tutte quelle proposizioni inverse, che so avere grande uso nella statica, com'è la presente, nella quale credo di avere impiegato un non ispregevole artificio nella dimostrazione, che è in parte diretta, e in parte per assurdo.

Prop. 15

rette parallele all' altre due direzioni onde costituire il parallelogrammo $AFGC$; quindi le tre forze T P Q faranno in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo $AFGC$, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Egli è dunque come la forza P alla forza Q , così la retta AF alla retta AC . Ma come la forza P alla forza Q , così si pone la retta AB alla retta AC ; laonde egli è come l' AB alla AC , così l' AF alla AC . Uguale è dunque la AB alla AF ; la minore alla maggiore, il che è un assurdo. Non è dunque la forza T applicata secondo la direzione AH in equilibrio colle forze P Q . Similmente dimostreremo che secondo qualsivoglia altra direzione, passante pel A , applicata la forza T , fuorchè secondo la direzione AE , ella non può essere in equilibrio colle forze P Q . Ella è dunque la retta AE la direzione della forza T , e però hanno una comune direzione le due forze T R . E poichè sono fra loro in equilibrio le forze T P Q applicate secondo le direzioni AE AK AL segantisi nell' A ; quindi tenderà la forza T nella propria direzione AE da parte contraria a quella, cui tendono le forze P Q . Ma si pone ancora che la forza R tenda nella direzione AE da parte contraria a quella cui tendono le forze P Q . Parziali sono dunque direttamente le forze T R . Di nuovo essendo fra loro in equilibrio le forze T P Q ; egli farà proporzionalmente come la forza T alla forza P , così la retta AD alla retta AB . Ma egli è ancora come la forza R alla forza P , così la retta AD alla retta AB . Adunque le due forze T R hanno alla forza P la stessa proporzione. Uguale ella è dunque la forza T alla forza R ; sono poi ancora direttamente parziali; laonde equivalente è la forza T alla forza R . Ma la forza T è in equilibrio colle forze P Q ; adunque farà ancora la forza R colle forze P Q in equilibrio; il che convenia dimostrare.

Coroll. 1
Prop. 12

Defin. 7

Prop. 1

COROLLARIO.

Quindi è manifesto che se le direzioni di una e di altre due forze si sèghino in un punto, e sieno costituite nello stesso piano; e tendano tutte e tre le forze dalla parte stes-

sa; e la direzione della prima seghi l'angolo della tendenza dell'altre due forze; e da un punto preso in una qualsivoglia direzione condotte linee rette parallele all'altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo, sieno le tre forze in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione; farà la prima forza equivalente all'altre due. Imperocchè applicata secondo la direzione della prima forza una forza ad essa uguale e contraria direttamente, tenderà questa da parte contraria a quella cui tendono le altre due, anzi ciascuna delle tre forze da parte contraria a quella cui tendono le due rimanenti; laonde per le cose nella proposizione dimostrate, farà la nuova forza applicata in equilibrio coll'altre due; e però la forza ad essa uguale e contraria direttamente, cioè la prima forza, farà all'altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 17.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, le tre forze saranno in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli alla tendenza di due a due delle tre forze medesime, e ciascuna forza sarà omologa al seno dell'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti.

Le direzioni FC ED BK delle tre forze P Q R fra loro Fig. 21 e 22 in equilibrio seghinsi pel punto A ; e tendano la forza P dall' A verso il C , la forza Q dall' A verso il D , e la forza R dall' A verso il B , sicchè il CAD sia l'angolo alla tendenza delle forze P Q , il DAB l'angolo alla tendenza delle forze Q R , e il BAC l'angolo alla tendenza delle forze R P . Dico che le forze P Q R sono in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli DAB BAC CAD , e che ciascuna forza è omologa al seno dell'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti, cioè la forza P omologa al seno dell'angolo DAB , la forza Q al seno dell'angolo BAC , e la forza R al seno dell'angolo CAD .

Imperocchè in una direzione BK della forza R (che segherà l'angolo CAD alla tendenza dell'altre due forze P Q

M m m ij

Prop. 15

e però ancora il suo opposto al vertice) prendasi qualsivoglia punto G , da cui parallele all' altre due direzioni FC ED tirinsi le rette GI GH , onde compiere il parallelogrammo $GIAH$. Saranno dunque le forze P Q R in proporzionalità ordinata colle rette AH AI AG , e ciascuna forza farà omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Di nuovo perchè uguale è l' angolo HGA all' angolo alterno GAI ; quindi uguale sarà il seno dell' angolo HGA al seno dell' angolo GAI , ovvero al seno dell' angolo DAB ad esso GAI posto accanto. E poichè nel triangolo AHG egli è proporzionalmente come la AH alla HG , o alla AI , così il seno dell' angolo HGA al seno dell' angolo HAG ; ma uguale al seno dell' angolo HGA è il seno dell' angolo DAB , ed al seno dell' angolo HAG il seno dell' angolo posto accanto BAC ; quindi egli è come la HA alla AI , così il seno dell' angolo DAB al seno dell' angolo BAC . Ma egli è ancora come la AH alla AI , così la forza P alla forza Q . Adunque egli è come la forza P alla forza Q , così il seno dell' angolo DAB al seno dell' angolo BAC . Oltre a ciò essendo come la retta HG alla retta AG , così il seno dell' angolo HAG al seno dell' angolo AHG ; ed uguali sono, la HG alla AI , il seno dell' angolo HAG al seno dell' angolo BAC , e il seno dell' angolo AHG al seno dell' angolo CAD ; quindi egli farà come la AI alla AG , così il seno dell' angolo BAC al seno dell' angolo CAD ; ma come la retta AI alla retta AG , così è la forza Q alla forza R . Adunque egli è come la forza Q alla forza R , così il seno dell' angolo BAC al seno dell' angolo CAD . Ma si è dimostrato che egli è ancora come la forza P alla forza Q , così il seno dell' angolo DAB al seno dell' angolo BAC . Sono dunque le forze P Q R in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli DAB BAC CAD alla tendenza di due a due delle forze medesime, e ciascuna forza è omologa al seno dell'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti; il che convenia dimostrare.

C O R O L L A R I O .

Quindi se una forza a due forze sia equivalente, e le dire-

zioni delle tre forze si seghino in un punto; saranno la forza equivalente e le due forze in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime, e ciascuna forza sarà omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad ella uguale e contraria direttamente, questa si equilibrerà colle altre due forze; onde per la proposizione saranno la forza applicata e le due forze come i seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime; e la forza applicata è uguale alla prima forza; e i seni de' due angoli alla tendenza della forza applicata con una e l'altra delle due forze sono uguali a' seni de' due angoli alla tendenza della forza equivalente con l'una e l'altra delle due forze; perocchè sono fra loro uguali i seni degli angoli accanto.

PROPOSIZIONE 18.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e da rette perpendicolari alle tre direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze saranno in proporzionalità ordinata co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare.

Le direzioni AB AC AH delle tre forze P Q T seghinsi Fig. 23 nel punto A ; e la forza P tenda nella propria direzione AB dall' A verso il B , la forza Q nella propria direzione AC dall' A verso il C , e la forza T nella propria direzione AH dall' A verso l' H . Saranno li BAC CAH HAB gli angoli alla tendenza di due a due delle forze P Q T , e ciascuna forza tenderà nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti. Prendanti poi nelle direzioni AB AC AH quali si vogliano punti N I K , da' quali tirinsi linee rette ad angoli retti alle direzioni medesime AB AC AH ; la LN alla AB , la IO alla AC , e la MK alla AH ; e giungasi la KN . E poichè uguali a due retti sono gli angoli ANL AKM ; quindi saranno minori di due retti gli angoli KNL NKM . Le rette adunque LN MK , prolungate se occorre, rincontreranno insieme. Rin-

contrinfi nell' E . Allo stesso modo, giunte le $NI IK$, si proverà che le $LN IO$, e così ancora le $IO MK$ si incontrano inneme. Rincontrinfi le $LN IO$ nel G , e le $IO MK$ nell' F . Il triangolo dunque EGF ha i suoi lati perpendicolari alle direzioni $AB AC AH$, uno all' altra. Dico ora che le tre forze $P Q T$ sono in proporzionalità ordinata co' lati $EG GF FE$ del triangolo EGF , e che ciascuna forza è omologa al lato, che è alla propria direzione perpendicolare, cioè omologa la forza P al lato EG , la forza Q al lato GF , e la forza T al lato FE .

Prop. 15 Imperocchè in una direzione AH preso qualsivoglia punto D , da esso parallele all' altre due direzioni $AB AC$ tirinfi le rette $DC DB$, onde costituire il parallelogrammo $ABDC$. Le forze dunque $P Q T$ sono in proporzionalità ordinata colle rette $AB AC AD$. E poichè retti sono gli angoli $AKM ANL$, quindi faranno uguali a due retti ancora gli angoli rimanenti $NAK NEK$ del quadrilatero $AKEN$. Ma uguali a due retti sono ancora gli angoli $NAK BAD$. Gli angoli dunque $NAK NEK$ sono uguali agli angoli $NAK BID$. Toglasi l'angolo comune NAK ; sarà l'angolo rimanente NEK , o dicasi GEF , uguale all'angolo rimanente BAD . Similmente si dimostrerà che uguale all'angolo EFG è l'angolo CAD , ovvero l'alterno ADB , e all'angolo EGF l'angolo ABD . Simile egli è dunque il triangolo EGF al triangolo ABD . Proporzionali adunque sono i lati del triangolo EGF ai lati del triangolo ABD , ed omologhi i sottesi agli uguali angoli; laonde i lati $EG GF FE$ sono in proporzionalità ordinata co' lati $AB BD AD$. Ma uguale alla BD è la AC . E però sono in proporzionalità ordinata i lati $EG GF FE$ colle rette $AB AC AD$. Si è poi dimostrato che sono in proporzionalità ordinata ancora le forze $P Q T$ colle rette $AB AC AD$. Elleno sono dunque in proporzionalità ordinata le forze $P Q T$ co' lati $EG GF FE$ del triangolo EGF ; e ciascuna forza è omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se equivalente sia una forza a due forze; e le di-

rezioni di tutte e tre si seghino in un punto; e da rette perpendicolari alle loro direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze faranno in proporzionalità co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato, che alla propria direzione è perpendicolare. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà, e però faranno in proporzionalità ordinata la forza applicata e le due forze co' lati del triangolo suddetto; dunque ancora la forza equivalente e le due forze.

PROPOSIZIONE 19.

Date di posizione tre direzioni costituite nello stesso piano e segantisi in un punto, e data una forza applicata secondo una di esse direzioni e la tendenza della forza; ritrovare le forze che deggionsi applicare secondo l'altre due direzioni, e le loro tendenze per equilibrare la data forza; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare alle due direzioni e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la stessa data forza.

Sieno date di posizione le tre direzioni BK FC ED costituite in un piano e segantisi nell' A ; e sia data la forza R applicata secondo la direzione BK , e la sua tendenza, che sia dall' A verso il B . Bisogna ritrovare le forze che debbonsi applicare secondo l'altre due direzioni FC ED , e le loro tendenze per equilibrare la forza R ; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare secondo le direzioni FC ED e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la forza R . Fig. 24

Prendansi da una parte e dall'altra del punto A nella direzione FC i punti F C , e nella direzione ED i punti E D . E poichè le due direzioni FC ED si segano nell' A ; quindi faranno le FC ED quattro angoli al segmento, cioè i due angoli CAD EAF opposti al vertice, e gli altri due EAC FAD pure opposti al vertice. Ma la direzione BK passa pel punto A ed è nello stesso piano costituita colle due direzioni FC ED . Segherà adunque la retta BK o i due primi angoli al vertice, o gli altri due. Seghi gli angoli CAD EAF . E poichè la retta BK sega gli angoli CAD EAF , cadrà il

punto B (a cui dal punto A tende nella propria direzione BK la forza R) o dalla parte in cui sono i punti $E F$, o da quella in cui sono i punti $C D$. Cada dalla stessa parte in cui sono i punti $E F$, e da parte contraria a quella in cui sono i punti $C D$. Ora in una delle direzioni $BK FC ED$, per esempio nella direzione ED , prendasi qualsivoglia punto I , e dall' I parallele all' altre due direzioni $BK FC$ tirinsi le rette $IH IG$ per compiere il parallelogrammo $AGIH$. La diagonale AI dello stesso parallelogrammo $AGIH$ giacerà sulla direzione ED , il lato AH sulla direzione FC , e il lato AG sulla direzione BK . Indi prendanti le forze $P Q$, tali che come la retta AH alla retta AG , così egli sia la forza P alla forza R ; e come la retta AI alla retta AG , così egli sia la forza Q alla forza R ; e applichinsi la forza P secondo la direzione FC e tendente dall' A verso il C , e la forza Q secondo la direzione ED e tendente dall' A verso il D . Tenderà adunque la forza R da parte contraria a quella cui tendono le forze $P Q$. Dico pertanto che le forze $P Q$ li equilibrano colla forza R .

Imperocchè poichè la direzione BK della forza R sega l'angolo CAD alla tendenza delle forze $P Q$, e la forza R tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze $P Q$; quindi tenderà ancora la forza P nella propria direzione FC da parte contraria a quella cui tendono le forze $Q R$, e ancora la forza Q tenderà nella propria direzione ED da parte contraria a quella cui tendono le forze $R P$. Di nuovo perchè egli è come la forza P alla forza R , così la retta AH alla retta AG ; ed ancora come la forza Q alla forza R , così la retta AI alla retta AG ; quindi sono le tre forze $P Q R$ in proporzionalità ordinata colle rette $AH AI AG$. Sonovi adunque tre forze $P Q R$ applicate secondo le direzioni $FC ED BG$ segantisi nell' A e costituite nel piano medesimo; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; e da un punto I preso nella direzione ED tirate parallele all' altre due direzioni $FC BK$ le linee rette $IH IG$ per compiere il parallelogrammo $AHGI$, sonosi dimostrate le forze $P Q R$ in proporzionalità ordinata colle rette $AH AI AG$, e ciascuna forza omologa

omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Elleno sono dunque le forze P Q in equilibrio colla forza R .

Se poi applichinsi secondo le direzioni FC ED altre due forze N M , la forza N uguale e contraria direttamente alla forza P , e la forza M uguale e contraria direttamente alla forza Q , sicchè esse forze N M tendano dal punto A verso i punti F E situati dalla stessa parte in cui è il punto B , dimostrerassi similmente che alle forze applicate N M farà equivalente la forza R .

Date dunque di posizione le tre direzioni FC BK ED segantisi nell' A e costituite nel medesimo piano, e data la forza R applicata secondo la direzione BK e la sua tendenza dall' A verso il B ; sonosi ritrovate le due forze P Q che applicate secondo l'altre due direzioni FC ED si equilibrano colla forza R , e le loro tendenze, quella della forza P dall' A verso il C e quella della forza Q dall' A verso il D ; e si sono trovate ancora le forze N M che applicate secondo le direzioni FC ED alla forza medesima N equivalgono, e le loro tendenze, quella della forza N dall' A verso l' F , e quella della forza M dall' A verso l' E ; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 20.

Date di posizione due direzioni segantisi in un punto, e date due forze applicate secondo esse direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza che colle prime due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza che sia equivalente alle due prime forze, la sua direzione, e la sua tendenza.

Sieno date di posizione le direzioni FC ED , segantisi nell' A , e sieno date le forze P Q applicate secondo le direzioni FC ED , e le loro tendenze, cioè presi nelle direzioni FC ED da una parte e dall'altra del punto A i punti F C E D , tendano, la forza P dall' A verso il C , e la forza Q dall' A verso il D . Bisogna ritrovare una forza che colle forze P Q si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza che alle forze P Q sia equivalente, la sua direzione, e la sua tendenza.

Tom. V.

Nnn

Fig. 25

Dal punto A sopra le direzioni FC ED prendansi comunque le rette AH AI alle forze P Q proporzionali, e sia come la forza P alla forza Q , così la retta AH giacente sulla direzione FC alla retta AI giacente sulla direzione ED . Pertanto o l'una e l'altra delle rette AH AI cadono dal punto A verso le parti CD , ovvero EF , o una cade dalla parte CD e l'altra dalla parte EF . Nel primo caso si conducano, dal punto H parallela alla ED la HG , e dal punto I parallela alla FC la IG ; e dal punto A al punto G , ove s'incontrano le rette HG IG , si tiri la AG . Ma nel secondo caso giunta la retta IH , si conduca dal punto A parallela alla IH la BK ; poi da uno qualsivoglia de' punti I H si conduca altra retta, cioè o dall' I la IG parallela alla direzione FC , ovvero dall' H la HG parallela alla direzione ED . In amendue i casi però si farà costruito un parallelogrammo $AHGI$, e la retta AG segnerà l'angolo CAD alla tendenza delle forze P Q . Prolunghisi ora la AG , se occorre; e si prendano in ella da una parte e dall'altra dell' A i punti B K , de' quali cada il K dalla parte CD , e il B dalla parte opposta EF . Indi si esponga una forza R tale, che alla forza Q abbia la stessa proporzione che ha la retta AG alla retta AI , e applichisi la forza R secondo la direzione BK , sì che tenda dall' A verso il B . Dimostrerassi come nell' antecedente proposizione essere la forza R in equilibrio colle forze P Q .

E applicando di nuovo secondo la direzione BK una forza T uguale e direttamente contraria alla forza R , cioè tendente dall' A verso il K ; farà la forza T equivalente alle forze P Q .

Date dunque di posizione le direzioni FC ED segantisi nell' A , e date le forze P Q applicate secondo esse direzioni e le loro tendenze, cioè quella della forza P dall' A verso il C , e quella della forza Q dall' A verso il D ; si è ritrovata la forza R che colle forze P Q si equilibra, la sua direzione BK e la sua tendenza dall' A verso il B ; e si è ritrovata ancora la forza T equivalente alle forze P Q , la sua direzione BK , e la sua tendenza dall' A verso il G ; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 21.

Date tre forze due delle quali comunque prese sieno maggiori della forza rimanente; ritrovare le direzioni, a cui debbono le stesse applicarsi, e le loro tendenze affinchè sieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarsi e le loro tendenze affinchè una qualsivoglia di esse sia equivalente alle due forze rimanenti.

Sieno date le forze P Q R , due delle quali comunque Fig. 47
prese sieno maggiori della forza rimanente. Bisogna ritrovare le direzioni a cui debbono applicarsi le forze P Q R , e le loro tendenze, affinchè sieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarsi le forze P Q R e le loro tendenze affinchè una qualsivoglia di esse, per esempio la forza R , sia equivalente alle due forze rimanenti P Q .

Si espungano tre rette AH HG AG in proporzionalità ordinata colle forze P Q R , e sia omologa la retta AH alla forza P , la retta HG alla forza Q , e la retta AG alla forza R . Saranno adunque due delle rette AH HG AG , comunque prese, maggiori della rimanente. Dalle rette AH HG AG costruiscasi il triangolo AHG , e si compia il parallelogrammo $AHGI$, di cui una qualsivoglia delle rette suddette, per esempio la AG , ne sia la diagonale. Avranno certamente i due lati AH AI del parallelogrammo $AHGI$ lo stesso termine A colla diagonale AG , e i lati opposti HG GI avranno parimenti lo stesso termine G colla diagonale AG . Ora prolunghinsi due lati aventi lo stesso termine colla diagonale, e la diagonale stessa da una parte e dall' altra del termine comune; come i lati AH AI e la diagonale AG aventi lo stesso termine A , ne' punti F C E D B K . E poichè uguale al lato HG è il lato opposto AI , quindi ancora i lati AH AI e la diagonale AG saranno in proporzionalità ordinata colle forze P Q R . Di nuovo applichisi secondo la direzione FC , su cui giace il lato AH , la forza P omologa al lato AH ; poi secondo la direzione ED , su cui giace il lato AI , applichisi la forza Q

omologa al lato AI ; ma volganfi in modo le tendenze delle forze P Q , che l'angolo HAI compreso dai lati AH AI che si sono prolungati, o il suo opposto al vertice, sia l'angolo alla tendenza delle forze P Q . Siasi pertanto fatta tendere la forza P nella direzione FC dall' A verso il C , e la forza Q nella direzione ED dall' A verso il D , sicchè l' HAI sia l'angolo alla tendenza delle forze P Q . Oltre a ciò applichisi secondo la direzione BK , sulla quale giace la diagonale AG , la forza R omologa alla diagonale AG , e facciali tendere la forza R dalla parte EF opposta alla parte CD , verso cui tendono le forze P Q , cioè dall' A verso il B . Dimostrerassi, come nella proposizione che abbiamo detto diciannovesima, essere fra loro in equilibrio le tre forze P Q R . Date dunque le forze P Q R , sonosi ritrovate le direzioni FC ED BK alle quali debbonfi applicare le stesse forze, perchè tieno fra loro in equilibrio, non meno che le tendenze delle forze, quella della forza P dall' A verso il C , quella della forza Q dall' A verso il D , e quella della forza R dall' A verso il B ; il che convenia fare in primo luogo.

E se, dopo tutta la superior costruzione, si adatti la forza R nella direzione BK sì che la sua tendenza sia volta da parte contraria di prima, dall' A verso il K ; si faranno ritrovate le direzioni FC ED BK alle quali debbonfi applicare le forze stesse, perchè la forza R sia equivalente alle forze P Q , non meno che le loro tendenze, quella della forza P dall' A verso il C , quella della forza Q dall' A verso il D , e quella della forza R dall' A verso il K ; il che dovevasi fare in secondo luogo.

P R O P O S I Z I O N E 22.

Se una forza sia contraria a due forze e uguale alle medesime; e la direzione di essa cada nel piano per le direzioni delle due forze, e fra loro, e condotta comunque una retta alle direzioni delle due forze, sia questa segata dalla direzione della forza contraria in modo che i segmenti si recipro-

chino colle due stesse forze ; faranno le tre forze fra loro in equilibrio (a).

La forza R sia contraria alle forze P Q e uguale alle me- Fig. 26
desime; e sieno applicate, la forza R secondo la direzione SN e tendente dall' S verso l' N , la forza P secondo la direzione BE e tendente dal B verso l' E , e la forza Q secondo la direzione CD e tendente dal C verso il Π . La direzione poi SN cada nel piano per le direzioni BE $C\Pi$, e fra loro; e condotta la retta BC alle direzioni BE CD , sia segata la BC nel punto S dalla direzione SN in modo che i segmenti CS SB si reciprocino colle forze P Q , cioè sia come il segmento CS al segmento SB , così la forza P alla forza Q . Dico che faranno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R .

Imperocchè essendo contraria la forza R alle due forze Defin. 4
 P Q , farà la direzione SN parallela all' una e all' altra delle direzioni BE $C\Pi$, e tenderà la forza R dalla parte TV della retta BC , mentre le forze P Q tenderanno dalla parte opposta $E\Pi$. Prolunghinsi per diritto alla BC da una e dall' altra parte le rette $B\Sigma$ CA ; e s'intendano applicate secondo la comune direzione ΣA le forze L M uguali e direttamente contrarie, e la forza L tenda dal B verso il Σ e la forza M dal C verso il A . Di nuovo date la due forze L P , e date di posizione le loro direzioni $B\Sigma$ BE segantisi nel B , Prop. 20
e date le loro tendenze, trovifi la forza Y equivalente alle forze L P , la sua direzione TO e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione TO pel punto B , segnerà l'angolo ΣBE alla tendenza delle forze L P , e tutte e tre le forze L Y P Coroll.
tenderanno dalla parte medesima; e però la forza Y tenderà Prop. 9
nella propria direzione dalla parte $E\Pi$ della retta BC . Si Coroll. 3
Prop. 10

(a) Gli statici solevano dedurre la teoria delle forze applicate a direzioni parallele da quella delle forze le cui direzioni si rincontrano in un punto, mediante l'ipotesi di rimuovere ad infinita distanza il punto del loro concorso. Il Cel. P. Gregorio Fontana fu il primo ad accorgersi, che si poteva prescindere da questa, ch'ei

giustamente chiama dura ipotesi (Memorie de la Società Italiana Tom. IV. pag. 319) riducendo le prime forze alle seconde coll'aggiungere solo due forze uguali e contrarie direttamente. Io ho adottato questa quanto elegante, altrettanto semplice riduzione, e non ho avuto altro che vestirla alla miaoggia.

milmente date le due forze $M \mathcal{Q}$, e date di posizione le loro direzioni $C\Pi$ CA segantili nel C , e date le loro tendenze, trovisi la forza Z equivalente alle forze $M \mathcal{Q}$, la sua direzione VG , e la sua tendenza dall' V verso il G . Passerà adunque la direzione VG pel punto C , segnerà l'angolo $\Delta C\Pi$ alla tendenza delle forze $M \mathcal{Q}$; e tutte tre le forze $M Z \mathcal{Q}$ tenderanno dalla parte medesima; e però la forza Z tenderà nella propria direzione VG dalla parte $E\Pi$ della retta BC . Ora nella direzione $B\Sigma$ preso qualsivoglia punto K , dal K parallele alle due direzioni BE BO tiranti le rette KO KI per compiere il parallelogrammo $KIBO$; e nella direzione CA presa dal C la CH uguale alla BK , dall' H parallele alle due direzioni $C\Pi$ CG tiranti le rette HG $H\Delta$ per compiere il parallelogrammo $H\Delta CG$. Sono adunque in proporzione ordinata le tre forze $P \gamma L$ colle tre rette BI BO BK ; e le tre forze $M Z \mathcal{Q}$ colle tre rette CH CG $C\Delta$. Ma egli è come la forza L alla forza M , così la retta BK alla retta CH , perocchè sono uguali fra loro sì le forze che le rette. Dunque sono in proporzione ordinata le sei forze $P \gamma L M Z \mathcal{Q}$ colle sei rette BI BO BK CH CG $C\Delta$; e ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Prolunghiti la TO finchè incontri la retta SN nel punto A . E poichè ti pone come la retta CS alla retta SB , così la forza P alla forza $\mathcal{Q}$; e come la forza P alla forza $\mathcal{Q}$, così è la retta BI alla retta $C\Delta$; quindi egli è come le BI alla $C\Delta$, così la CS alla SB . Il contenuto dunque sotto le IB BS è uguale al contenuto sotto le ΔC CS . Oltre a ciò simile essendo il triangolo KBI al triangolo BSA , farà come la KB alla BI , così la BS alla SA . Dunque il contenuto sotto le KB SA è uguale al contenuto sotto le IB BS . Ma il contenuto sotto le KB SA è uguale al contenuto sotto le HC SA , perocchè uguale è la HC alla KB ; ed il contenuto sotto le IB BS si è dimostrato uguale al contenuto sotto le ΔC CS . Uguale egli è dunque il contenuto sotto le HC SA al contenuto sotto le ΔC CS ; laonde egli è come l' HC alla $C\Delta$, così la CS alla SA . Per il che giunta la CA , faranno li HCA CSA due triangoli, che hanno l'angolo HCA uguale all'angolo CSA , e d'intorno agli angoli uguali i lati proporzionali. Simile egli è dunque il trian-

Prop. 15

golo HCA al triangolo CSA ; e però l'angolo ΔHC , ovvero il suo alterno HCG , è uguale all'angolo ACS . Per diritto ella è dunque la retta CA alla retta CG . E poichè YRZ sono tre forze applicate secondo le direzioni AO AN AG segantisi nell' A ; e si è dimostrato che la forza R tende nella propria direzione SN dalla parte TV contraria alla parte EP , cui tendono le altre due forze YZ ; quindi ancora la forza Y tenderà nella propria direzione AO da parte contraria a quella cui tendono le forze RZ ; e così ancora la forza Z tenderà nella propria direzione AG da parte contraria a quella, cui tendono le forze YR . Compianfi i parallelogrammi $GHCF$ $GATD$ $ATXV$. E poichè paralleli sono i lati del triangolo GDF a' lati del triangolo KIB ed uguale è il lato FG al lato KB , perocchè amendue sono uguali alla retta medesima CH ; quindi uguale sarà ancora la FD alla BI , e la GD alla KI . Ma uguale è la GD alla AT , e la KI alla BO ; dunque ancora l' AT è uguale alla BO . Di nuovo essendo uguali le due CD DG alle due AX XV , e l'angolo CDG uguale all'angolo AXV , farà ancora la base CG uguale alla base AV . Pertanto poichè sono in proporzionalità ordinata le forze $YP \propto Z$ colle rette BO BI $C\Delta$ CG ; ed uguale è la BO alla AT , la BI alla FD , la $C\Delta$ alla GH , ovvero alla CF , e la CG alla AV ; quindi le forze $YP \propto Z$ sono in proporzionalità ordinata colle rette AT FD CF AV . Ma si pone la forza R uguale alle forze $P \propto$, e le rette FD CF sono uguali alla retta CD , ovvero alla AX . Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze YRZ colle rette AT AX AV , ed ogni forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Sono vi dunque tre forze $PR \propto$ applicate secondo le direzioni AO AN AG segantisi nel punto A , e costituite nello stesso piano; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; ed in oltre dal punto X preso nella direzione SN della forza R tirate le rette XV XT parallele alle direzioni AO AG dell' altre due forze YZ e costituito il parallelogrammo $ATXV$, si è dimostrato essere le forze suddette YRZ in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo $ATXV$, e ciascuna forza omologa alla retta che

Prop. 16

giace sulla propria direzione. Elleno sono dunque fra loro in equilibrio le tre forze $Y R Z$. Ma equivalenti sono, la forza Y alle forze $P L$, e la forza Z alle forze $M Q$. Adunque sono fra loro in equilibrio le cinque forze $P L R M Q$. Ma la forza L è in equilibrio colla forza M , essendo esse uguali e direttamente contrarie. Elleno dunque sono fra loro in equilibrio le forze rimanenti $P R Q$. Il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se una forza sia parziale a due forze ed uguale alle medesime; e la direzione di quella cada nel piano di queste, e fra loro; e, condotta una retta comunque alle direzioni delle due forze, sia essa segata dalla direzione dell'altra forza in modo che i segmenti si reciprocino colle due forze; equivalente sarà la prima forza alle altre due. Imperocchè applicata nella direzione della prima forza una forza ad essa uguale e contraria direttamente, farà questa contraria all'altre due; e si dimostrerà come nella proposizione che la forza applicata s'equilibra colle altre due forze; e però la forza a quella uguale e direttamente contraria, cioè la prima forza, farà all'altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 23.

Se due forze parziali sieno in equilibrio con un'altra forza; la direzione di questa cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra esse; la forza sarà contraria alle forze parziali ed uguale alle medesime; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze parziali, sarà questa segata dalla direzione della forza contraria in modo che i segmenti si reciprocheranno colle forze parziali medesime.

Fig. 26

Le due forze parziali $P Q$ sieno in equilibrio colla forza R ; e sieno applicate la forza P secondo la direzione BE e tendente dal B verso l' E , e la forza Q secondo la direzione CP e tendente dal C verso il P ; e la forza R sia applicata secondo la direzione XN . Conducasi poi comunque alle direzioni BE CD la retta BC . Dico, che la direzione

XN

XN cade nel piano per le direzioni BE $C\Pi$, e fra esse; che la forza R è contraria alle forze P Q ed alle medesime uguale, e che la direzione XN sega la retta BC in modo che i segmenti della BC si reciprocheranno colle forze parziali P Q .

Imperocchè poichè parziale è la forza P alla forza Q , farà la direzione BE parallela alla direzione $C\Pi$, e tenderanno le forze P Q dalla stessa parte $E\Pi$ della retta BC . Adunque i punti E Π cadono dalla stessa parte $E\Pi$ della retta BC . Protragganti le rette $B\Sigma$ CA per diritto alla retta BC , e secondo la direzione ΣA applichinsi le due forze uguali e contrarie L M , la L che tenda dal B verso il Σ , e la M dal C verso il A . Poi date le due forze L P applicate secondo le direzioni $B\Sigma$ BE date di posizione e seganti nel B , e date le tendenze delle due forze; si trovi la forza Y Defin. 6

equivalente alle forze L P , la sua direzione TO , e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione TO pel punto B , segherà l'angolo alla tendenza ΣBE delle forze L P , e tenderanno tutte e tre le forze L Y P dalla parte medesima; e Prop. 29.

però la forza Y tenderà nella propria direzione dalla parte $E\Pi$ della retta BC . Similmente date le due forze M Q applicate secondo le direzioni CA $C\Pi$ date di posizione e seganti nel C , e date le tendenze delle due forze, ritrovisi la forza Z equivalente alle forze M Q , la sua direzione VG , e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione VG pel punto C , segherà l'angolo $A\Pi$ alla tendenza delle forze M Q ; e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima; laonde la forza Z tenderà ancora essa dalla parte $E\Pi$ della retta BC . Si prendano in oltre nella direzione ΣA le uguali rette linee BK CH e compiansi i parallelogrammi KI BO $H\Delta$ CG . Si dimostrerà come nell'antecedente proposizione, che le sei forze L Y P Q Z M sono fra loro in proporzionalità ordinata colle sei rette BK BO BI $C\Delta$ CG CH ; e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. E poichè si pongono fra loro in equilibrio le tre forze P Q R , e sono ancora fra loro in equilibrio le forze L M ; perocchè sono uguali e direttamente contrarie; quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le cinque forze L P Q M R . Ma equivalente è la forza Y al-

Coroll. del-
le Prop. 9 10

Comun.
Conc. 1

le forze $L P$, e la forza Z alle forze $Q M$. Adunque sono ancora fra loro in equilibrio le tre forze $Y Z R$. Oltre a ciò poichè uguali a due retti sono gli angoli $EBC BC\Pi$, faranno maggiori di due retti gli angoli $OBC BCG$. Ma sono uguali a quattro retti tutti e quattro gli angoli $OBC CBT BCG BCV$. Eglino sono dunque minori di due retti gli angoli rimanenti $CBT BCV$; laonde le rette $OT VG$ rincontreranno in qualche punto. Si rincontrino nell' A . Sarà dunque il BAC l'angolo alla tendenza delle forze $Y Z$, essendosi dimostrato tendere amendue dalla parte medesima $E\Pi$ della retta BC . E perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze $Y Z R$ applicate secondo le direzioni $AO AG XN$, due delle quali, le $AO AG$, si segano nell' A ; quindi ancora la direzione XN passerà pel punto A , e cadrà nel piano per le $AO AG$, che è il piano stesso per le direzioni $BE CD$; segnerà ella XN l'angolo BAC alla tendenza delle forze $Y Z$, e la forza R tenderà nella propria direzione XN da parte contraria a quella cui tendono le forze $Y Z$. Compiani i parallelogrammi $CHGF AGDT ATXV$. E perchè uguale è la CH all'una e all'altra delle $BK FG$, farà ancora la BK uguale alla FG ; ed è simile il triangolo KBI al triangolo GFD , perocchè hanno i lati paralleli a' lati l'uno all'altro. Adunque uguale sarà ancora il lato BI al lato FD , ed il lato KI al lato GD . Ma uguale è la KI alla BO , e la GD alla AT ; laonde uguale è ancora la BO alla AT . Di nuovo poichè egli è come la forza Y alla forza Z , così il lato AT del parallelogrammo $ATXV$ al lato AV ; ma egli è ancora come la forza Y alla forza Z , così la retta BO alla retta CG ; quindi sarà proporzionalmente come la AT alla AV , così la BO alla CG . Si è poi dimostrata la AT uguale alla BO ; laonde uguale farà ancora la AV alla CG . E perchè uguale è la AV alla CG , e la VX alla GD ; perciò le due $AV VX$ sono uguali alle due $CG GD$; e contengono angoli uguali. Adunque la base AX è uguale alla base CD ; e l'angolo VAX è uguale all'angolo GCD . Parallela ella è adunque la direzione AX della forza R alla direzione $C\Pi$ della forza Q , e però ancora alla direzione BE della forza P . Egli è poi manifesto che la direzione XN cade fra le direzioni $C\Pi BE$; perocchè il punto A per cui passa la retta XN cade fra le dire-

Prop. 9 10

zioni medesime . Adunque la retta XN segnerà la retta che giugne i punti $B C$ in qualche punto . La segni nell' S . E perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze $Y Z R$ applicate secondo le direzioni $AB AC SN$ che ti seghino nell' A ; quindi tenderà la forza R da parte contraria a quella cui tendono le forze $Y Z$. Ma le forze $Y Z$ tendono dalla parte $E\Pi$ della retta BC . Adunque la forza R tende dalla parte contraria TV della retta medesima BC . Contraria ella è dunque la forza R all'una e all' altra delle forze $P Q$. E poichè egli è come la forza R alla forza Y , così la AX alla AT , ovvero alla BO ; e come la forza Y alla forza P , così la BO alla BI ; quindi egli farà come la forza R alla forza P , così la retta AX alla retta BI . In simil guisa ti dimostrerà che come la forza R alla forza Q , così è la retta AX alla retta CF . Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze $R P Q$ colle rette $AX BI CF$. Ma uguale è la AX alle $BI CF$, perocchè la AX è uguale alla CD , ovvero alle $CF FD$, delle quali uguale è la FD alla BI ; laonde ancora la forza R è uguale alle forze $P Q$. Di nuovo essendo simile il triangolo KIB al triangolo BAS ; egli farà come la KB alla BI , così la BS alla SA . Adunque il contenuto sotto le $KB SA$ è uguale al contenuto sotto le $IB BS$. Per la stessa ragione uguale è il contenuto sotto le $CH SA$ al contenuto sotto le $C\Delta CS$. Ma uguale è il contenuto sotto le $KB SA$ al contenuto sotto le $CH SA$, perocchè uguale è la KB alla CH . Adunque ancora il contenuto sotto le $IB BS$ è uguale al contenuto sotto le $C\Delta CS$; e però egli è come la BI alla $C\Delta$, così la CS alla SB . Ma come la retta BI alla retta $C\Delta$, così è la forza P alla forza Q . Egli è adunque proporzionalmente come la retta CS alla retta SB , così la forza P alla forza Q ; e però ti reciprocano i segmenti $CS SB$ della retta BC colle forze $P Q$.

Si è dunque provato che la direzione XN della forza R cade nel piano per le direzioni $BE C\Pi$ delle forze parziali $P Q$, e fra esse; che la forza R è contraria alle forze $P Q$, e alle medesime uguale; e che la retta BC è segata nell' S dalla direzione XN , in modo che ti reciprocano i segmenti $CS SB$ di essa colle forze parziali $P Q$.

C O R O L L A R I O .

Ed è manifesto che se a due forze parziali sia equivalente una forza; la direzione di questa cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra esse; tutte e tre le forze saranno parziali, e la forza equivalente uguale all'altre due; e, condotta comunque una retta alle direzioni delle due prime forze parziali, sarà questa segata dalla direzione della forza contraria, in modo che i segmenti si reciproccheranno colle due forze parziali medesime. Imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa si equilibrerà colle due forze parziali.

P R O P O S I Z I O N E 24.

Se due forze contrarie e disuguali sieno in equilibrio con un' altra forza; la direzione dell' altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie disuguali. oltre la direzione della forza maggiore; l' altra forza sarà parziale alla forza minore ed uguale all' eccello in cui la maggiore supera la minore; e condotta comunque alle direzioni delle forze contrarie una retta, e prolungata fino alla direzione dell' altra forza, sarà proporzionalmente come l' eccello suddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento (a).

Fig. 27

Le forze P Q contrarie e disuguali sieno in equilibrio colla forza R . Sia poi maggiore la forza Q della forza P ; e sieno applicate, la forza P secondo la direzione BE , tendente dal B verso l' E , la forza Q secondo la direzione $C\Pi$, tendente dal C verso il Π , e la forza R secondo la direzione XN . Dico che la direzione XN cade nel piano per le direzioni BE $C\Pi$, ed oltre la direzione $C\Pi$; che la forza R è parziale alla forza minore P , ed uguale all' eccello in cui la forza Q supera la forza P ; e che, condotta co-

(a) L'uso mi ha fatto vedere la necessità d'introdurre nel primo Elemento di statica ancora questa propo-

sizione, ch'è bensì affatto simile all' antecedente, non però la stessa.

munque la retta BC alle direzioni BE CP e prolungata fino alla direzione XN , egli è come l'eccesso suddetto alla forza P , così la retta BC al prolungamento.

Imperocchè poichè contraria è la forza P alla forza Q , farà la direzione BE parallela alla direzione CP , e la forza P tenderà dalla parte EO della retta BC , mentre la forza Q tenderà dalla parte opposta PV . Prolunghinsi per diritto alla BC , come nella proposizione, che abbiamo detto ventiduesima, dall'una parte e dall'altra le rette $B\Sigma$ CA , e applichinsi secondo la comune direzione ΣA le forze L M uguali e direttamente contrarie, la forza L che tenda dal B verso il Σ , e la forza M che tenda dal C verso il A . Di nuovo date le due forze L P , e date di posizione le loro direzioni $B\Sigma$ BE segantisi nel B , e le loro tendenze, ti trovi la forza T equivalente alle forze L P , la sua direzione TO , e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione TO pel punto B , segnerà l'angolo ΣBE alla tendenza delle forze LP , e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima, e però tenderà la forza T dalla parte EO della retta BC , dal B verso l' O . Similmente date le due forze M Q , e date di posizione le loro direzioni CA CP segantisi nel C , e le loro tendenze, ti trovi la forza Z alle forze M Q equivalente, la sua direzione CV , e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione CV pel punto C , segnerà l'angolo ACP alla tendenza delle forze M Q , e tutte e tre le forze M Z Q tenderanno dalla parte medesima; e però la forza Z tenderà dalla parte PV della retta BC dal C verso l' V . Ora prendanti nella direzione ΣA le uguali linee rette BK CH e compianti i parallelogrammi KOB HGC , e dimostrerassi come nella sopraddeita proposizione, che le sei forze L T P M Z Q sono in proporzionalità ordinata colle sei rette BK BO BI CH CG $C\Delta$. E poichè egli è come la forza Q alla forza P , così la retta $C\Delta$, ovvero la GH , alla BI ; e maggiore si pone la forza Q della forza P ; quindi maggiore sarà ancora la GH della BI . Toglasi dalla retta maggiore GH dall' H verso il G la retta $H\Phi$ uguale alla retta minore BI , e giungasi la $C\Phi$. E perchè l'una e l'altra delle $H\Phi$ BI è parallela alla medesima retta CP , parallela sarà ancora l' $H\Phi$ alla BI ; e però uguale sarà l'angolo

Prop. 20

CHP all'angolo KBI . Per il che uguali essendo le due CH HP alle due KB BI , e comprendendo angoli uguali, farà ancora l'angolo ΦCH uguale all'angolo IKB . Maggiore egli è dunque l'angolo GCH dell'angolo IKB , e ancora dell'angolo TBC . Pongali comune l'angolo GCB . I due angoli adunque GCH GCB sono maggiori dei due angoli TBC GCB ; laonde sono minori di due retti gli angoli TBC GCB ; quindi le rette TB GC (prolungate se occorre) si rincontreranno insieme. Rincontrinti nell' A . Sarà pertanto l'angolo BAV , ch'è accanto all'angolo BAC , l'angolo alla tendenza delle forze Y Z ; perocchè si è dimostrato tendere la forza Y dalla parte EO della retta BC , e la forza Z dalla parte opposta IV . E poichè sono fra loro in equilibrio le forze P $\mathcal{Q}$ R , e sono ancora fra loro in equilibrio le forze L M ; quindi faranno ancora fra loro in equilibrio le cinque forze P L $\mathcal{Q}$ M R . Ma equivalente è la forza Y alle forze P L , e la forza Z alle forze $\mathcal{Q}$ M . Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze Y Z R , applicate secondo le direzioni TO CV XN , delle quali le due TO CV

Prop. 9. 10 si segano nell' A . E però ancora la direzione XN passerà pel punto A , e farà nello stesso piano coll'altre due direzioni TO CV , cioè nel piano per le direzioni parallele BE CII ; e segnerà in oltre la direzione XN l'angolo BAV alla tendenza delle forze Y Z . Compianli i parallelogrammi $CHGF$ $AGDT$ $ATXV$. E perchè uguale è l'una e l'altra delle BK GF alla CH , farà la BK uguale alla GF ; ed è simile il triangolo KBI al triangolo GFD , perocchè hanno i lati paralleli a' lati, l'uno all'altro. Adunque uguale farà il lato BI al lato FD , ed il lato KI al lato GD . Ma uguale è la KI alla BO , e la GD alla AT ; laonde uguale è ancora la BO alla AT . Si dimostrerà poi come nell'antecedente proposizione che ancora la CG è uguale alla AV , e la AX alla CD ; e che in oltre la direzione XN della forza R è parallela alla direzione CII della forza $\mathcal{Q}$ e alla direzione BE della forza P . Egli è poi manifesto che la direzione XN cade oltre la direzione CII della forza maggiore $\mathcal{Q}$; perocchè il punto A per cui passa la retta XN cade oltre la direzione medesima CII . Adunque la retta BC prolungata segnerà la retta XN . La segni nell' S . E perchè dal vertice A del triangolo BAS al punto C nella base BS si

condotta la retta AC , o dicasi CV ; quindi segnerà la retta CV l'angolo BAS , e però anche il suo opposto al vertice XAI . Ora essendo fra loro in equilibrio le tre forze $Y Z R$ applicate secondo le direzioni $AB AS CV$ seganti nell' A , la direzione di ciascuna forza segnerà l'angolo alla tendenza dell' altre due, e però anche l'angolo ad esso opposto al vertice. Ma la direzione CV della forza Z sega l'angolo BAS compreso dalle direzioni $AB AS$ dell' altre due forze $Y R$, e ancora il suo opposto al vertice XAI ; laonde delli $BAS XAI$ uno è l'angolo alla tendenza delle forze stesse $Y R$, l'altro l'angolo ad esso opposto al vertice. Tendono adunque le forze $Y R$ dalla stessa parte della base BS . Ma da quella parte verso cui tende la forza Y , dalla medesima si è dimostrato tendere ancora la forza P . Adunque le forze $P R$ tendono dalla stessa parte della retta BC . Ed è ancora parallela la direzione CI alla direzione XN . Parziale ella è dunque la forza R alla forza P . Di nuovo in modo simile alla proposizione antecedente si proverà essere le tre forze $R P Q$ in proporzionalità ordinata colle rette $AX BI CF$. Ma uguale è la AX all'eccesso in cui la CF supera la BI ; perocchè uguale è la AX alla CD e la BI all' FD . Adunque ancora la forza R è uguale all'eccesso, in cui la forza Q supera la forza P . Finalmente come nella citata proposizione dimostrerassi avere la forza Q alla forza P la stessa proporzione che ha la retta SB alla retta CS ; e però dividendo farà come l'eccesso in cui la forza Q supera la forza P alla forza P , così la retta BC alla retta CS . Prop. 10

Si è dunque dimostrato che la direzione XN della forza R cade nel piano per le direzioni $BE CI$ delle forze contrarie $P Q$, ed oltre la direzione CI ; che la forza R è parziale alla forza minore P , ed uguale all'eccesso in cui la forza Q supera la forza P ; e che prolungata la retta BC fino alla direzione XN nell' S , egli è come l'eccesso suddetto alla forza P , così la retta BC al prolungamento CS ; il che convenia dimostrare. Defin. 6

C O R O L L A R I O .

Quindi se due forze contrarie e disuguali sieno equivalenti

ad un'altra forza; la direzione dell'altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie oltre la direzione della forza maggiore; questa forza sarà parziale alla forza maggiore ed uguale all'eccesso in cui la maggiore supera la minore; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze contrarie, e prolungata fino alla direzione della forza equivalente, egli sarà proporzionalmente come l'eccesso suddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e contraria direttamente, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 25.

Date due forze parziali, le loro direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza, che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione e la sua tendenza.

Fig. 28

Sieno date le forze parziali P Q , e sieno date di posizione le loro direzioni BA CD , e date le loro tendenze, quella della forza P dal B verso l' A , e quella della forza Q dal C verso il D . Bisogna ritrovare una forza che s'equilibri colle forze P Q , la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze P Q , la sua direzione e la sua tendenza.

Defin. 6

Tirisi la retta BC . E poichè sono parziali le forze P Q , sarà la direzione BA parallela alla direzione CD , e le forze P Q tenderanno amendue dalla stessa parte AD della retta BC . Seghisi la BC nell' E in modo che le forze P Q si reciprocino co' segmenti CE EB , e sia come la forza P alla forza Q , così la CE alla EB ; e pel punto E parallela ad una delle BA CD tirisi la FG ; e secondo la direzione FG applichisi la forza R uguale alle forze P Q , la quale tenda nella propria direzione dalla parte MN contraria alla parte AD , cioè dall' E verso l' F .

E poichè la forza R e le forze P Q sono applicate secondo le direzioni parallele FG BA CD , e la tendenza della forza R si volge dalla parte MN della retta BC mentre le tendenze

tendenze delle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$ si volgono dalla parte contraria AD ; quindi contraria è la forza R all'una e all'altra delle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$. Vi è dunque una forza R contraria alle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$ ed uguale alle medesime; e la direzione FG della forza R cade nel piano per le direzioni $BA \text{ } CD$ delle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$, e fra esse; e condotta la retta BC alle direzioni $BA \text{ } CD$ è la BC segata dalla direzione FG in modo, che i segmenti $CE \text{ } EB$ si reciprocano colle due forze medesime $P \text{ } \mathcal{Q}$. In equilibrio ella è dunque la forza R colle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$. E se secondo la direzione FG applichiamo la forza S uguale e direttamente contraria alla forza R , cosicchè tenda la forza S dalla parte AD , dall' E verso il G ; si dimostrerà che equivalente è la forza S alle forze $P \text{ } \mathcal{Q}$. Defin. 4

Date dunque due forze parziali $P \text{ } \mathcal{Q}$, e date di posizione le loro direzioni $BA \text{ } CD$, e date le loro tendenze dal B verso l' A , e dal C verso il D ; si è ritrovata la forza R che colle due forze $P \text{ } \mathcal{Q}$ si equilibra, la sua direzione FG , e la sua tendenza dall' E verso l' F , e si è ritrovata ancora la forza S equivalente alle due forze medesime $P \text{ } \mathcal{Q}$, la sua direzione FG , e la sua tendenza dall' E verso il G ; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 26.

Date due forze contrarie e disuguali, le loro direzioni, e le loro tendenze; ritrovare una forza che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione, e la sua tendenza.

Sieno date le due forze contrarie e disuguali $R \text{ } P$, delle quali sia maggiore la R , e sieno date di posizione le loro direzioni $EF \text{ } BA$, e date le loro tendenze, quella della forza R dall' E verso l' F , e quella della forza P dal B verso l' A . Bisogna ritrovare una forza, che si equilibri colle forze $R \text{ } P$, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze $R \text{ } P$, la sua direzione e la sua tendenza.

Tirisi la retta BE . E poichè sono contrarie le forze $R \text{ } P$, sarà la direzione EF parallela alla direzione BA , e le forze

R P tenderanno da parti contrarie della retta BE , la forza R dalla parte FM , e la forza P dalla parte AN . Prolunglisi ora oltre la direzione EF la EC per diritto alla BE in modo che egli sia proporzionalmente come l'eccesso in cui la forza R supera la forza P alla forza P , così la retta BE al prolungamento EC . Indi dal C parallela all'una e all'altra delle EF BA tirisi la retta HD ; e secondo la direzione HD applichisi la forza Q uguale all'eccesso suddetto, e tenda la forza Q dalla stessa parte AN della BC , verso cui tende la forza minore P , cioè dal C verso il D .

E poichè le forze R Q sono applicate secondo le direzioni parallele EF HD , e le loro tendenze si volgono da parti contrarie della retta BC ; quindi contraria farà la forza R alla forza Q . Ella è poi contraria ancora alla forza P . Adunque la forza R è contraria alle due forze P Q . Di nuovo perchè la forza Q è uguale all'eccesso in cui la forza R supera la forza P , farà la forza R uguale alle due forze P Q . Oltre a ciò essendo come l'eccesso in cui la forza R supera la forza P alla forza P , così la retta BE alla retta EC ; ed uguale è la forza R all'eccesso suddetto; quindi farà come la forza Q alla forza P , così la BE alla EC . Vi è dunque una forza R contraria alle due forze P Q ed uguale alle medesime; e la direzione EF della forza R cade nel piano per le direzioni BA HD delle forze P Q , e fra esse; e condotta la retta BC alle direzioni delle forze P Q , è la retta BC segata dalla direzione EF in modo che i segmenti BE EC si reciprocano colle due forze medesime P Q ; e però la forza Q è in equilibrio colle forze R P . E se secondo la direzione HD applichisi la forza T uguale e direttamente contraria alla forza Q , coticchè essa tenda dalla parte FM , dal C verso l' H , e sia parziale alla forza maggiore R , si dimostrerà che equivalente è la forza T alle forze R P .

Date dunque le forze contrarie e disuguali R P , e date di posizione le loro direzioni EF BA , e date le loro tendenze dall' E verso l' F , e dal B verso l' A ; si è ritrovata la forza Q che colle due forze R P s'equilibra, la sua direzione HD , e la sua tendenza dal C verso il D ; e si è ritrovata ancora la forza T equivalente alle forze medesime R P , la sua direzione HD , e la sua tendenza dal C verso l' H ; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 27.

Non possono essere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali sieno uguali e contrarie (a).

Imperocchè se sia possibile sieno fra loro in equilibrio le tre forze R P Q applicate secondo le direzioni SN BE CD , delle quali le forze R P sieno uguali e contrarie. Tendano poi la forza R dall' S verso l' N , la forza P dal B verso l' E , e la forza Q dal C verso il D . Fig. 30

E poichè contraria è la forza R alla forza P , parallela farà la direzione SN alla direzione BE . Pertanto la direzione CD della forza Q o è parallela all'una e all'altra delle direzioni SN BE , o no. Sia in prima parallela. E perchè la forza Q è applicata secondo la direzione CD parallela alle direzioni SN BE , a cui sono applicate le due forze contrarie R P ; quindi farà la forza Q parziale all'una o all'altra delle forze stesse R P . Sia parziale alla forza P . E poichè le forze parziali P Q sono in equilibrio colla forza R , quindi uguale farà la forza R alle forze P Q . Ma uguale si pone ancora la forza R alla forza P . Uguale ella è dunque la forza P alle forze P Q ; il che è un assurdo. Non sono adunque in equilibrio le tre forze R P Q delle quali le R P sono uguali e contrarie, se la direzione della terza forza Q sia parallela alle direzioni dell'altre due. Prop. 23

Ma non sia la direzione CD parallela alle direzioni SN BE ; e dal C parallela ad una delle SN BE tirisi la retta CA , e la CG comunque si voglia, nel piano però per le CA CD . Indi date di posizione le tre direzioni CA CD CG segantisi nel C , e situate nello stesso piano, e data la forza Q applicata secondo la direzione CD ; si ritrovino le forze che deb- Fig. 31
Prop. 16

P p ij

(a) Questa è una proposizione che se non è nuova per la cosa che dimostra, è però tale pel modo di esporla e di dimostrarla. D' *Alembert* fece vedere, che se due forze contrarie sieno uguali, conviene mettere ad un' infinita distanza una forza infinitamente

piccola parziale ad una di esse per ottenere l'equilibrio. E perchè non dire che non vi può essere equilibrio fra tre forze, se due di esse sieno uguali e contrarie? Pare che così la proposizione sarebbe stata meglio enunciata.

Prop. 23

bontà applicare secondo l'altre due direzioni CA CG , e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la forza Q . Sia la V la forza d'applicarli secondo la direzione CA , e la sua tendenza sia dal C verso l' A ; e sia la X la forza d'applicarli secondo la direzione CG e la sua tendenza sia dal C verso il G . E poichè la forza V è applicata secondo la direzione CA parallela alle direzioni SN BE , a cui sono applicate le forze contrarie R P ; quindi parziale sarà la forza V all'una o all'altra delle forze stesse R P . Sia parziale alla forza P ; e date le forze parziali P V , le loro direzioni e le loro tendenze, ritrovili una forza ad esse equivalente, la sua direzione e la sua tendenza. Sia questa la forza T applicata secondo la direzione HI e tendente dall' H verso l' I . Parziale ella è dunque la forza T alle forze P V , e ad esse uguale. Ma la forza P è uguale e contraria alla forza R ; laonde la forza T è disuguale e contraria alla forza R . Di nuovo essendo fra loro in equilibrio le forze P Q R , e la Q equivalente alle forze V X ; quindi faranno fra loro in equilibrio ancora le forze P V X R . Ma equivalente è la forza T alle forze P V . Elleno sono adunque fra loro in equilibrio ancora le tre forze T X R . Per il che essendo fra loro in equilibrio le tre forze T X R , delle quali disuguale e contraria è la forza T alla forza R ; quindi la terza forza X farà parziale alla forza minore R . Parallela ella è adunque la direzione CG alla direzione SN . Ma ancora la CA è parallela alla SN . Parallele elleno sono adunque le rette CA CG , che si rincontrano nel C , il che è un assurdo. Non sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze R P Q , delle quali le R P sono uguali e contrarie, se la direzione della terza forza Q non sia parallela alle direzioni dell'altre due. Si è poi dimostrato che non possono essere in equilibrio neppure quando la direzione della forza Q sia parallela alle direzioni dell'altre due. Non possono dunque essere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali sieno uguali e contrarie; il che convenia dimostrare.

Prop. 24

PROPOSIZIONE 28.

Se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni saranno tutte e tre in un piano (a).

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R applicate secondo le tre direzioni BE CD SN , e tendenti, la forza P dal B verso l' E , la forza Q dal C verso il D , e la forza R dall' S verso l' N . Dico che le direzioni BE CD SN sono in un piano.

Imperocchè se due delle direzioni BE CD SN , come per esempio le due BE SN , sono in un piano, è manifesto che ancora la terza direzione CD farà nel piano che passa per quelle. Poichè le BE SN o si segheranno insieme, ovvero saranno fra loro parallele. Se seghinu; ancora la direzione CD dee passare pel punto del segamento, ed essere nel piano per le BE SN . Se poi sono parallele le BE SN , allora le P R divengono o forze parziali, o forze contrarie e disuguali (disuguali, perchè altrimenti non sarebbero in equilibrio le tre forze P Q R , il che è contro la posizione). Sieno poi le P R o forze parziali, o forze contrarie e disuguali, la direzione CD della forza Q dee sempre cadere nel piano per le BE SN . Quindi se due delle direzioni BE CD SN sono in un piano, ancora la terza farà nel piano medesimo.

Ora, se sia possibile, due delle direzioni BE CD SN comunque prese, non sieno in un piano. E prendasi nella direzione SN il punto A , da cui parallele all' altre due direzioni BE CD tirinsi le rette AG AF . Saranno adunque le AG BE in un piano, e le AF CD in un altro. E perchè si pone che la SN non è nello stesso piano colla BE ;

(a) Non è stata mai da alcuno dimostrata in tutte le sue parti questa interessantissima proposizione; e pure ella è di un uso quasi continuo negli elementi di statica. Dico che niuno l'ha interamente dimostrata, perchè si è bensì cercato di provare che se

due direzioni sieno in un piano, anche la terza farà nel piano per quelle; ma questo non è tutto, e restava da provarsi che due direzioni debbano essere necessariamente in un piano.

quindi non farà la SN nel piano per le $AG\ BE$. Allo stesso modo si proverà che la SN non è nel piano per le $AF\ CD$. Non è adunque la SN la comune sezione de' piani $AGBE\ AFCD$. Sia questa la retta AB , che passerà pel punto A comune all'uno e all'altro piano. Prolunghintì, se occorre, le direzioni $BE\ CD$ finchè seghino l' AB . E' manifesto che esse la segheranno ad uno e ad altro punto $B\ C$, perocchè se la segassero nello stesso punto, le rette $BE\ CD$ farebbero nello stesso piano, il che non si pone. Prendasi nella direzione SN qualsivoglia altro punto S , e tirintì le $SC\ SB$, e protraggantì da una e dall'altra parte. Saranno dunque le tre rette $SN\ SC\ SB$ nel piano del triangolo ABS . E perchè il punto S non è nel piano $AGBE$, e in esso piano sonovi i punti $B\ C$, quindi le rette $SC\ SB$ non cadranno nel piano $AGBE$. Di nuovo date di posizione le tre direzioni $SN\ SC\ SB$ situate in un piano e segantisi nell' S , e data la forza R applicata secondo la direzione SN , e la sua tendenza dall' S verso l' N , ritrovintì le forze che debbonfi applicare all'altre due direzioni $SC\ SB$, e le loro tendenze perchè ad esse sia equivalente la forza R . Sieno queste, la forza X applicata secondo la direzione SC , e tendente dal C verso l' I , e la forza V applicata secondo la direzione SB , e tendente dal B verso l' L . Di nuovo date le due forze $X\ V$ applicate secondo le direzioni $SC\ CD$ segantisi nel C , e date le loro tendenze, si trovi la forza M equivalente alle forze $X\ V$, la sua direzione CZ , e la sua tendenza dal C verso il Z . E in simil guisa date le due forze $P\ V$ applicate secondo le direzioni $BE\ SB$ segantisi nel B , e date le loro tendenze, si trovi la forza N equivalente alle forze $P\ V$, la sua direzione BO , e la sua tendenza dal B verso l' O . E poichè sono fra loro in equilibrio le forze $R\ P\ Q$ ed equivalente è la forza R alle forze $X\ V$, quindi faranno fra loro in equilibrio ancora le forze $X\ Q\ V\ P$. Ma equivalenti sono la forza M alle forze $X\ Q$, e la forza N alle forze $V\ P$. Elleno sono adunque fra loro in equilibrio le due forze $M\ N$; laonde faranno esse uguali e direttamente contrarie, e però applicate ad una comune direzione. Retta è dunque la linea $ZCBO$. Adunque la BO è nel piano $AGBE$; ma la BE è nello stesso piano $AGBE$; e la SB

Prop. 19.

Prop. 20

Com.
Conc. 1

$\frac{3}{4}$
 $\frac{1}{1}$
 $\frac{1}{2}$

Fig. 4.

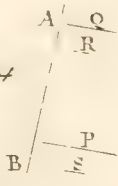


Fig. 5.

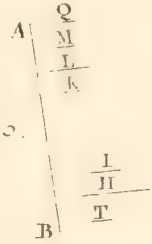


Fig. 6.

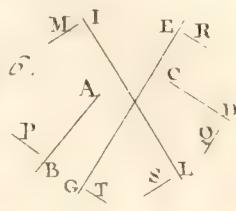


Fig. 9.

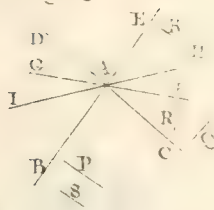


Fig. 10.

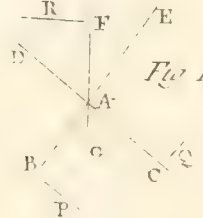


Fig. 11.

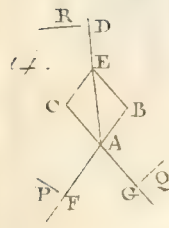
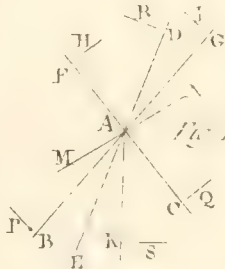


Fig. 17.

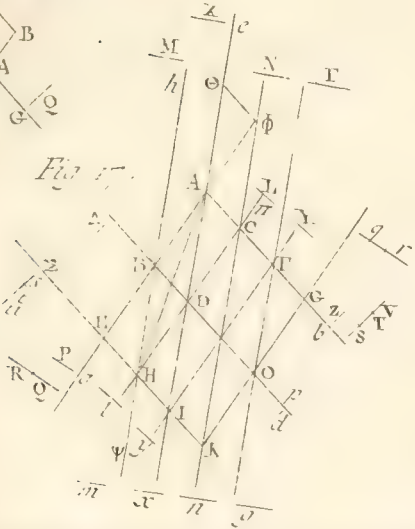
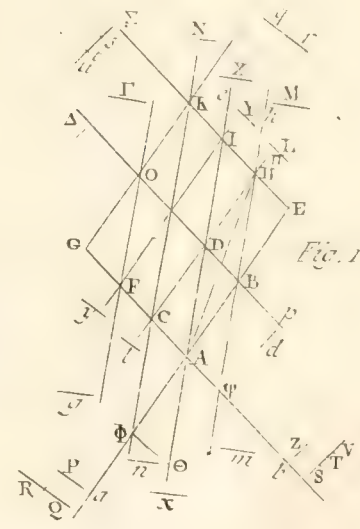


Fig. 18.



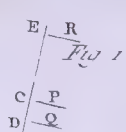


Fig. 1

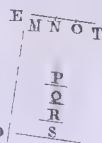


Fig. 2

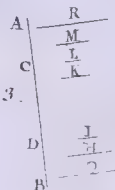


Fig. 3

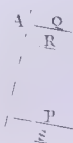


Fig. 4

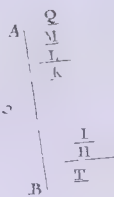
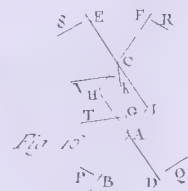
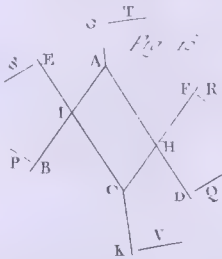
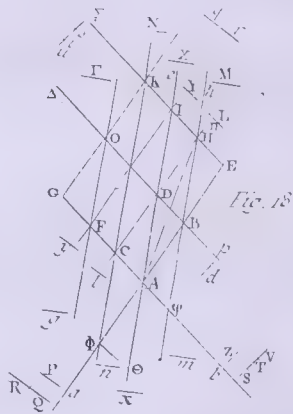
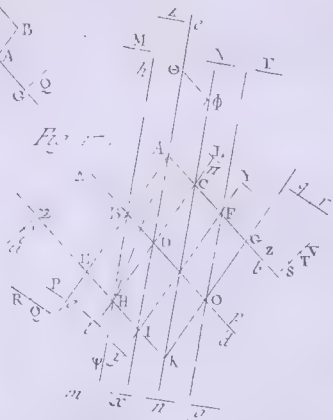
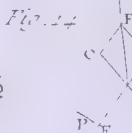
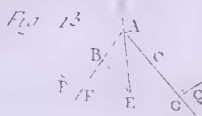
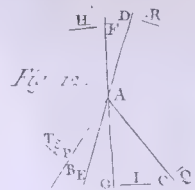
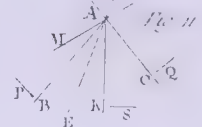
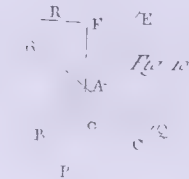
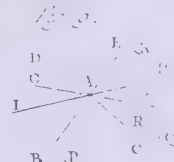
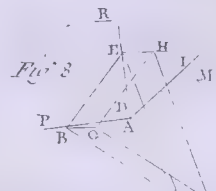
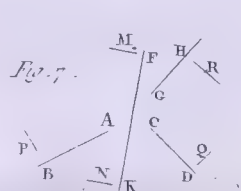
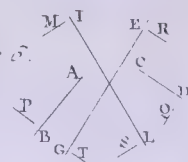
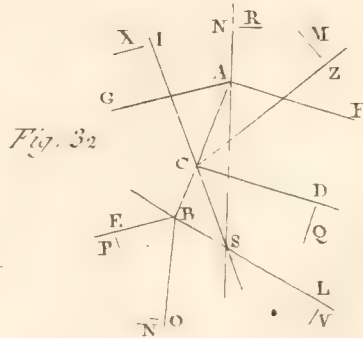
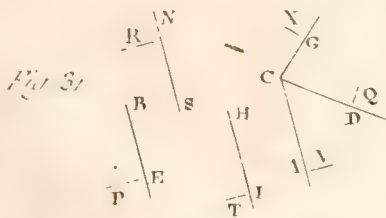
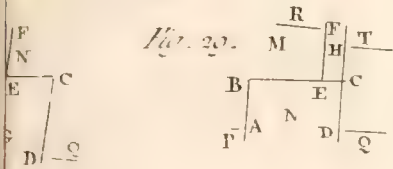
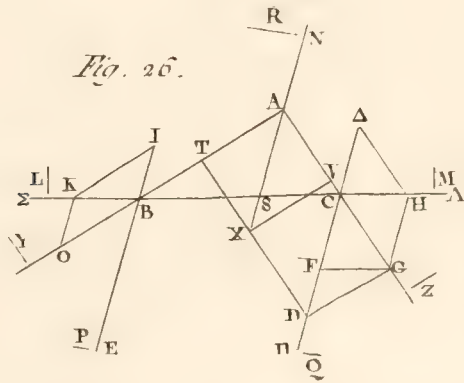
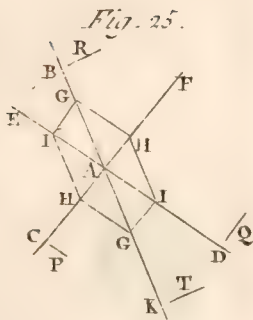
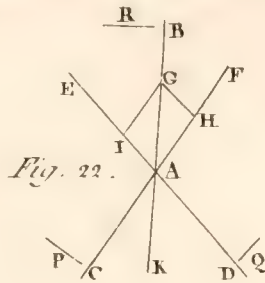
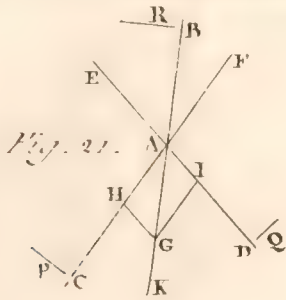
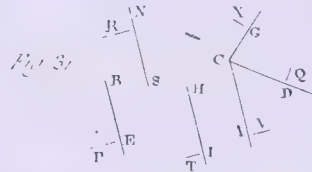
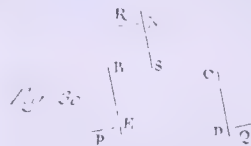
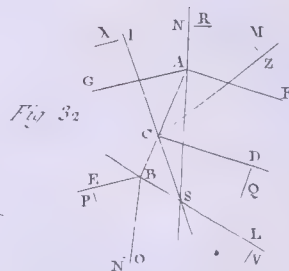
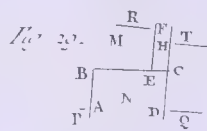
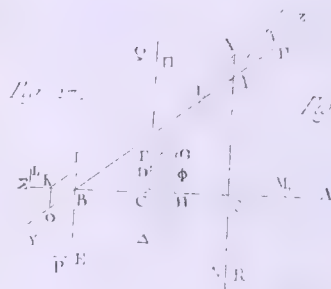
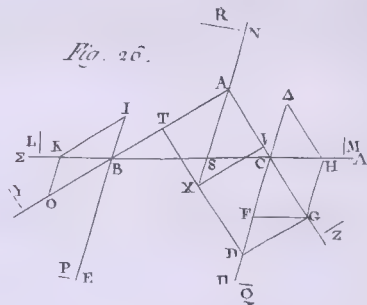
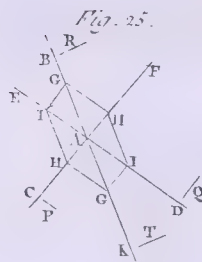
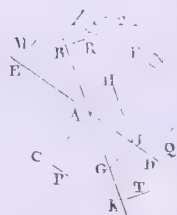
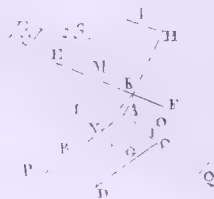
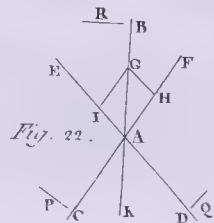
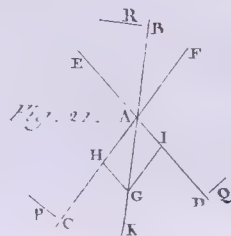
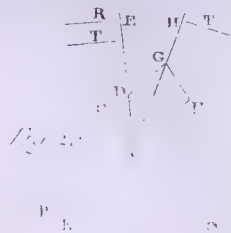
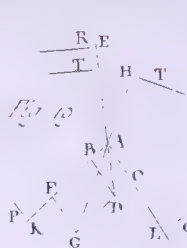


Fig. 5







non lo è. Ella è adunque la forza N applicata secondo la direzione BO equivalente alle forze $P V$ applicate secondo le direzioni $BE SB$; e le tre direzioni si segano in un punto e non sono nello stesso piano costituite; il che è un assurdo. Adunque due delle direzioni $BE CD SN$, comunque prese, non possono non essere in un piano. Si è poi di sopra dimostrato, che se due sono in un piano ancora la terza è nel piano medesimo; laonde se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni faranno tutte e tre in un piano; il che conveniva dimostrare.

Fine del Primo Elemento di Statica.



LETTERA DISSERTATORIA

RELATIVA A DUE ROSE PROLIFICHE

SCRITTA

Dal Sig. Abate PAOLO SPADONI

Al Sig. Abate LAZARO SPALLANZANI

PRESENTATA DAL MEDESIMO

Sono oggimai venti giorni, celeberrimo Signore, da che un mio riverito e caro amico Bolognese mi favori gentilmente di una rosa, che al colore un poeta la direbbe tinta nel sangue della stessa madre d'amore, e che pel numero delle foglie i Botanici chiamano *centifolia*, acciocchè non tanto ne osservassi la di lei esterna figura, quanto perchè la prendessi a soggetto di mie ricerche, e di mie specolazioni. Già ella ben si accorge, che quel leggiadriissimo fior di Venere non sarebbe stato de' consueti e comunali; e ciò che torna lo stesso, che aver almanco dovea alcuna cosa di stravagante e singolare. Non altrimenti di fatto egli era quel vago prodotto della scherzosa natura, dir potendole, che io a prima giunta riconobbi qual rosa da' Naturalisti nomata *prolifca*, ovvero mostruosa. Adunque volendo discendere, come portava il dovere, alle dolci inchieste dell' amico, e render unitamente appagata la mia filosofica curiosità, detto fatto, sovvenendomi che

Quam longa una dies, etas tam longa rosarum,
presi ad abbozzarne, il men male che io potei, la figura, e appresso ad instituirvi sopra varie osservazioni. Le quali osservazioni, ora che mi trovo un po' di ozio, mi permetta che a Lei io le offra in dono, e che glie le mandi unite

te insieme al disegno, che ne ricavai dalla stessa rosa. Se queste avranno, come mi auguro, la sorte di piacerle in qualche cosa, sarà stata mia gran fortuna l'avergliela inviata; quando che no, ella con la libertà maggiore del mondo le condanni tosto, e senza pietà alle fiamme, oppure faccia che, quali enigmatiche foglie della Cumana Sibilla, vadan per l'aria a volo. Tali per l'appunto sono i miei più sinceri desiderj; e in conseguenza la di lei giustissima ed imparziale decisione farà sì che mi determini, o a renderle pubbliche colle stampe ad oggetto di giovare alla società, e di contribuire in alcun modo ai progressi dell'umano sapere, o veramente a non prendermi

Più di ricorle, e d'accozzarle affanno.

Frattanto qualunque e' siasi per essere il loro destino, io entro nella materia, la quale essendo analoga a quegli studi ne quali ella è maestro, e maestro

Pien di filosofia la lingua, e il petto

mi lusingo che non le sarà grave l'ascoltarmi, non ostante che io tema che le debba esser di molto peso il prepararsi a soffrire i miei difetti per la poca pratica, che io ho nel trattare così fatti argomenti; i quali a bella posta tratto e sottometto ben volentieri al savio giudizio de' suoi pari, per togliermi una volta, se sia possibile, da quella mediocrità, a cui mi tiene obbligato la gioventù, e l'inesperienza; e dalla quale niun' altra cosa mi libererà più facilmente, che l'esercizio appunto, e molto più le di lei correzioni, a cui con la più sincera volontà rassegnata rimetto quanto prendo a dirle.

Era il gambo di questa rosa grosso poco meno del canonicino d' un' occhiuta penna di pavone, lungo da dieci pollici, e di color verde pallido minutamente punteggiato di finissima ruggine. Da cima a piè trovavasi d'ogni intorno gremito di rigidi pungiglioni, ed a luogo a luogo aveva de' picciuoli portanti le solite foglie *pinnate*. Al di sopra, ossia in prossimità del fiore, bellamente ingrossando veniva a formare come un cono allungato, pieno zeppo di pungoli assai più forti degli altri ed appuntati. Sul vertice poi, ove suol esser il calice, rompevano cinque foglie di un verde carico, corrispondente a quello delle foglie del gambo,

ma di figure affatto nuove e stravaganti. Oltre all' avere in generale le loro parti assembrate in guisa da non poter fra esse rinvenire alcuna somiglianza, variavano anche a una per una nelle grandezze, ne' margini, nelle punte, e quasi che difsi nell' intera struttura. In effetto due, o sieno le maggiori, avevano il contorno prossimamente ellittico, i margini laterali ferrati, e le estremità acute, quali appaiono nella figura sotto le lettere BB. Di più comparivano *aurite* portando nella base due fogliuzze laterali, come vedesi apertamente nella *Salvia officinalis* Lin. v. B. nella *Scrophularia auriculata*, nel *Salix aurita*, ed in altre non poche. Queste fogliuzze, che per segnarle con qualche nome chiamerò in seguito *appendici*, o pur *orecchiette*, non convenivano punto nella forma colle due foglie principali, essendo quali rotonde, ed altresì appena dentate. La terza e la quarta CC mancanti appieno delle appendici, le trovai di figura *spatolata*, e con denti sottilissimi agli orli; onde se non aveller peccato anzi che no in picciolezza, sarebbero facilmente scambiate colle foglie della *Calendula officinalis*, della *Bellis perennis*, della *Silene gigantea* ecc. La quinta da ultimo D, sebbene della prima e seconda alcun poco più angusta, uniformavasi però loro in tutto il resto, fuorchè nelle orecchiette, per averne una sola, e dessa ovale di figura, e a foggia di sega dentata. E qui veda ella stravaganza singolare! Io al certo non saprei dire in genere di foglie di aver mai veduto, così in picciolo, oggetto più variato, e più istruttivo di questo. Vero è che fra l' immensa famiglia de' vegetabili non mancano piante, che metton foglie di varie maniere: ma o questo succede in tempi diversi, come per cagion d' esempio si osserva nell' *Euphorbia cyatophora* del Murray, le cui foglie da prima son ovate, e in seguito *panduriformi*; oppur si vede solamente accadere in rami diversi, secondo che può da chicchessia riscontrarli nel *Morus papyrifera*; albero che nel Giappone s' impiega a molti uti domestici, e segnatamente in fabbricare certa carta di varie qualità, a detta del Kaempfero, del Tunberg, e d' altri fededegni e rinomati viaggiatori,

Ma torniamo pure di bel nuovo alle grottesche nostre foglie, d'onde una breve intromessa ci aveva alquanto disvia-

ti. E primieramente mi sovviene poterli loro attribuire, ciò che fu scritto di ciascun *segmento* del calice regolare delle rose centifolie: voglio dire che due hanno la barba da ambo i lati, due altri ne sono affatto senza, e l'ultimo non ne va che da un sol canto fornito. La cui particolare configurazione di calice venne conosciuta e descritta, se non con purità di stile, con verità almeno di sentimenti da non so qual Poeta, barbuto però senz' altro al paro del arcichebarbutissimo *Aronne*, là dove cantò

Sunt quinque fratres.... uno tempore nati,

Sunt duo barbati, duo sine barba creati,

Unus ex quinque non est barbatus utrinque.

Prendendo di fatto a parte a parte ciascuna delle sopra divise foglie come un pezzo del calice, e le orecchiette sue laterali per le di lui barbe, sembrami ravvisar fra d'esse una comune somigliantissima qualità, quale si è quella dell' uniforme esterna struttura. E perciò, io diceva, crederei d'aver tutto il diritto d' asserire, che i testè riportati versi leonini ponno benissimo alle medesime foglie eziandio appropriarli. Tanto più che ad esaminar intimamente la cosa, elleno null' altro sono che gli stessissimi segmenti in così strana guisa trasformati, senz' aver per altro dimezza la vera primitiva figura. Questa metamorfosi potrebbe per avventura sembrarle inverisimile, e forse anche paradossia: pure le dirò, che io son ben lungi dal crederla tale avendo in esse foglie (anatomizzate col ministero di sottili ferruzzi) ritrovato quel sufficiente cumulo di qualità, che per le cose esposte si giudicano stabilire il carattere dei cinque pezzi componenti d'ordinario il calice regolare di consimili rose.

A proseguir poi l'incominciata narrazione, la parte colorita alle finora menzionate foglie soprastante *E*, la rinvenni naturalissima; avendo perfetta convenienza, sia nella forma, sia nel colore, sia nell' oleggare con le altre rose naturali della medesima specie. Nel suo bel mezzo però ergevali in cambio de' consueti numerosi *pistilli* un corpicciuolo lungo piuttosto e sottile *G*, il qual non può esser meglio denotato, che per la rappresentazione di picciolissima coloncina. Costei di una tinta, che nel giallo tira al bianchiccio, aveva una buona linea di diametro, e quattordici effettive di altezza. Oder-

vandola con lente da mano al di fuori mi si mostrò d'ogni intorno scolpita a minuti longitudinali e paralleli solchetti, terminati da due risalti, tali quali si vedono nelle grandi colonne scannellate. Passando poi a guardarla interiormente mi venne fatto di scoprire esser ella di una sostanza consistente, e di durezza quasi legnosa. A far quest' esame fu d'uopo tagliar a traverso in più pezzetti la coloncina; e con tal mezzo e col favor di un microscopio composto (che mi lavorai per diporto nelle scorse autunnali vacanze) vidi altresì chiaro, che eranvi sulla periferia de' forellini ellissimi, i quali oltra allo scender da cima al fondo, venivano occupati da certo umore d' un lucido argentino. E quest' umore io vedeva patentissimo ogni qual volta comprimeva delicatamente fra le punte delle mollette alcuno di que' pezzettini. Però nominerem noi cotai fori d' esterna sottigliezza *trachee* col *Malpighi*, *vasi umorali*, *fibre legnose*, ovvero canali di diverso genere? Così il contenutovi umore avrassi a giudicare acqua semplice, succo nutritivo, oppur un fluido di tutt' altra natura?..... Ma quanto alla dianzi detta coloncina essa trovavasi nella parte inferiore, ossia nella base circondata da folta lanuggine di color perlato, e dell' altezza quasi de' *filamenti F*, che rettavangli d' intorno distribuiti a guisa di circolo. I quali filamenti adorni di *antere* fatte a ellissi, venivano similmente dal medesimo sito; se non che da un' origine alcun poco più bassa, ed in conseguenza vie più prossima ed immediata alla *corolla*.

Non può non essere a di lei notizia, che tutti i migliori maestri d'architettura, purchè camminino con le dovute regole di quell'arte divina, dopo aver trattato del basamento, e della colonna, entrano tosto a far parola del capitello; e ciò a motivo d'esser parte immediata della medesima. Diretto adunque da tal riflessione ella mi permetterà ch'io pure sulle traccie di sì regulate scorte scenda presentemente a favellarle del capitello (piacemi così chiamarlo) ch'alla sopra divisata colonnetta appartiene. Era egli pertanto nato fatto d'altra rosa *R* minore la metà della prima, ossia di due pollici circa di perimetro, ma di tinta assai più viva ed allegra. Qui io rinvenni il calice, il qual però, messo all' esame, non riservossi dal comparire in gran parte mo-

struoso. In primo luogo constava solo di tre segmenti *S* a proporzione della corolla stragrandi, e di figure irregolari. Secondariamente il lor color naturale erasi nel centro trasmutato in quello di uliva, e verso la circonferenza tirava all'albiccio, in grazia d'un sottil velo di bianca peluria, che vi rimaneva al di sopra. Al fondo poi di siffatto calice vi trovai un bel gruppo di scompigliatissime fila, le quali, per tenermi all'apparenza, somigliavano a meraviglia bene colle da me altrove notate, toltone l'essere un po più ruvide, luccicanti, e giallette. Restavano assiepati da simili fila ossia fitta lanuggine quattordici *pistilli P*, che ad onta di ciò emerger vollero dalla medesima tre linee, e di vantaggio. Era da non trascurarsi il cercare, se queste parti femminili fosser foggiate alla maniera della colonnetta esistente in lor vece nella rosa primaria: ed ho trovato che no, altro mai non avendo esternamente, che gran quantità di minutissimi villi bianchi, i quali, guardandoli con lente dolce, faceansi distinguere per altrettanti ramettini o vettucchie, le quali tutte insieme coi pistilli rappresentavano quattordici arbuscelli in miniatura. Di sì spaziosi arbuscelli ella non istenterà punto a formarne un'idea, ogni qual volta si farà ad osservare ne' suoi eccellenti e preziosi *Opuscoli di fisica animale e vegetabile* la figura di quelle mure ramose, che vanno sulle cime de' globetti destitute. Sebbene quanto ai globetti, vo qui notare in passando, che alla sommità dello stelo maestro degli accennati arbuscelli vedevasi una testina fungiforme assai sull'andar di quelle delle muffe: ma che spiandola con attenzione non si penava gran cosa a riconoscerla per lo *stigma* degli stessi pistilli. Debbo altresì aggiungere di aver conosciuti questi stigmi con una picciolissima boccuccia o apertura, la quale estendevasi fino all'ovaja: osservazione che secondo me pare che si accordi poco o nulla con quanto scrive il Sig. *Adanson*, vale a dire, che i pistilli della massima parte de' fiori si rinvencono pienamente ferrati. Eppure io mi vado persuadendo in parte vero il pensiero dell'illustre Botanico Inglese, relativo alla fecondazione delle piante: cioè che i granellini, o vescichette del polviscolo non entrino per lo stigma giù nello stilo, e così vadano a fecondar le semenze nelle ovaja. Imperciocchè

per quante volte io mi abbia troncato a traverso in vari siti i pistilli di moltissimi fiori (cosa di cui altra non ne ho fatta nè più spesso, nè in più svariati tempi) e segnatamente de' papaveri, d'ordinario assai grossi e *permanenti*, non mi è succeduto giammai di rinvenirne uno solo, che albergasse internamente verun granello di polvere, ovvero tinto fosse del suo colore. La qual tintura non potrebbe a meno di accadere, se i minutissimi globettini del polline s'insinuassero effettivamente nei condotti de' pistilli. Adunque un' *aura femminile* è quella, a mio avviso, che penetrando lo *stigma*, indi lo *stilo*, giunge da ultimo al germe, e lo feconda. Ma in altra lettera io forse le parlerò a lungo d'altre mie osservazioni e sperienze risguardanti la fecondazione delle piante; e valevoli, se l'amor proprio non m'inganna, a confermare la mia ipotesi; le quali sono state, da me ora taciute, null'altro essendomi divisato, nel ragionare della presente Rosa prolifica, che il far le parti di semplicissimo storico.

Del resto, rifacendomi sul medesimo capitello, o a meglio dire sulla seconda bizzarra rosetta, è degno d'esser considerato come da essa ne sbucava fuori una terza sempre più picciola e stravagante. Vedemmo in addietro che quella veniva sostenuta in alto da una coloncina destinata come a far le veci di *peduncolo*, posto perpendicolare all'orizzonte. Quest'ultima viceversa spuntava immediatamente da un suo fianco, secondo che si rappresenta in *I*, ed in cambio di dirizzarsi all'alto, piegava all'ingiù, senza tendenza alcuna alla perpendicolarità. Inoltre era raffazzonata in certa maniera, e le di lei parti trovavansi sfigurate sì, che davvero non saprei come potergliela adombrare, non che descrivere. Tuttavolta posso dirle, che mostravasi esteriormente lacera in più luoghi, e fuor di modo scolorita; di maniera che non vi volle poco a distinguere il calice; essendo da prima, ossia in vicinanza della base tinto appena d'un verde tenero, che appresso facevasi bianchiccio, e da ultimo prendeva su il medesimo color de' petali. Anzi a dirla più filosoficamente in tal luogo ogni segmento era vero verissimo petalo. Parlando poi dell'interno, la corolla rimane del tutto fuori d'ordine, ed i pezzi componenti la stessa sono in cento guise aggrovi-

gliati. Quivi stentai a ripescare gli organi della generazione, ed in ispecie i femminili, a motivo della picciolezza; tal che l'occhio disarmato non arrivava certo a discernarli. Ed il simile vuol dirsi de' maschili essendo eglino pure nascosti fra' petali, e disseminati senza legge ove che sia: tranne tre soli che in cambio dell'antera sostenevano una sottil fogliuzza di color castagno *LLL*. Per la qual cosa se a tutto ciò vorremo aggiungere ancora il ravviluppamento, la varia lunghezza, e la general confusione di tutte le parti, ella scorderà sempre meglio, che quanto riesce facile e curiosa a vedersi questa singolarissima rosellina, altrettanto è malagevole il descriverla aggiustatamente.

Fu spiccato dal rosajo questo fiore mostruoso sul decader di Maggio nel ben accivito ed elegante giardinetto del Sig. *Agostino Persiani*, il quale, come dal principio le diceva, in attestato della sincera amicizia sua verso di me volle graziosamente regalarmelo. Ma siccome a tanto per me caro e prezioso dono, di lì a pochi giorni ne fe succedere un altro del medesimo genere, così avendola io, stimatissimo Sig., già messa a parte del primo, non so risolvermi ora a goder da solo a solo il secondo. Piacemi d'esser seco lei liberale. L'onde eccogliene un picciol saggio dentro poche righe ristretto, col significarle cioè che dopo una settimana o in quel torno fu colta sulla stessa pianta, e dal medesimo Sig. *Persiani* altra rosa parimenti prolifica, e niente meno della già descrittale in varie parti sformata, e mostruosa. In effetto facendola passare in rivista sotto le dita, trovai che in cambio del calice aveva cinque foglie di color verde bruno, la cui figura grossolanamente accostavasi a quella delle cinque foglie nella prima rosa osservate. Che nella corolla, oltre la totale irregolarità, vi eran de' petali scoloriti a segno, che in su la lamina, e verso l'unghia onninamente sbiancavano. Che le stamigne, ed i pistilli, giudicar volendo da quanto annunziano i sensi, mancavano affatto; inalzandosi in vece, e dove appunto sono d'ordinario impiantati, un corpicciuolo massiccio, di color gialletto, lungo sei linee, e grosso a proporzione. Questo spiandolo col vetro mi si trasmutò in un fascetto di fili, i quali coll'intrometter fra d'essi superficialmente tanti esilissimi spazj longitudinali, venivano a for-

mare altrettanti solchetti, che avevan de' già notati sulla coloncina il parallelo nella figura. Non per tanto coteffi fili io piegherei a crederli *filamenti* allungati, e convertiti nell'annunziato fascettino: indottovi a preferenza dall'analogia grande da me rilevata fra il medesimo ed il corpicello cilindrico, che formano gli stami del *Solatro scandente*, o *Dulcamara* del *Linneo*. Una circostanza però accompagnante simile metamorfosi vuol esser rammemorata: ed è che alla di lui sommità aggiravansi tre petali meschinissimi della tinta, e dell'odore quali de' naturali, ma però talmente aggruppati insieme, che non fu possibile distrigarli senza qualche rottura. Inoltre è da notarsi, come di mezzo a tali petaluzzi si elevava una *gemma fogliifera* già già sviluppata, e di color giallo verde, dal cui centro ne sortiva un'altra minore, e da questa una terza minore ancora, le quali tutte cominciavano a prendere una sfumatura rossigna: ciascuna peraltro riguardo alla figura sull'andar di quelle, che metton fuori i rosaj al comparire della deliziosa e gradita primavera.

Non farebbe fuor di proposito il sentirla qui chiedere, se di quest'ultima rosa ne abbia fatto il disegno, come le parrà probabilmente che avesse addimandato la bisogna. Ed io con ingenuità le rispondo, che alcune mie occupazioni di maggior importanza non mi permisero in quel mentre di soddisfare il mio desiderio, siccome ebbi l'agio di appagarlo quando fummi recata la prima. Ma sebbene non vada fornito della figura copiata dal naturale, so tuttavia dove trovasene una sufficiente a richiamare la sua idea: voglio dire nelle Memorie del 1707. della Reale Accademia di Parigi. Avvi pertanto nel volume di quell'anno una Dissertazion-cella di Mr. *Marchant* sopra una rosa mostruosa da lui ritrovata il dì 13. Luglio, le cui mostruosità consistono, valendomi delle sue proprie parole, I. *En ce que, au lieu du bouton ou pericarpe, qui ordinairement termine le pedicule de la rose, & ou les graines sont contenües, il y avoit cinq feuilles en côte, qui soutenoient la fleur, & qui en cet endroit tenoient lieu de calice.* 2. *Qu'à la place des filets, des sommets, & des autres petits corps charnus, qui dans l'état naturel occupent le milieu de la rose, on remarquoit un bourgeon qui*

qui s'élevoit, & commençoit à former une branche, qui vraisemblablement seroit devenue par la suite une branche ligneuse, à une grosseur, & d'une longueur considerable ecc.. Il disegno adunque di questo fiore toccante, com'ella vede, alcuna mostruosità analoghe in parte alle da me antecedentemente rilevate, può, a mio giudizio, supplire per quello, che avrei dovuto io stesso formare; ed in conseguenza facendosi ad osservarlo renderle più sensibili i miei estremi racconti.

Darò compimento a questa lunga mia lettera col dir qualche cosa in compendio relativamente all'origine delle medesime rose. *La génération des végétaux*, scrive il sublime Contemplatore della Natura (a), *n'a pas une régularité constante: les loix, suivant les quelles elle s'opere, sont quelquefois troublées ou modifiées par divers accidens. De là naissent différents especes des monstres, & des mulets.* Ciò presupposto quali adunque saranno stati gli accidenti, quante le cause producenti la trasformazione de' nostri fiori? D'onde, in una parola, cotai mostri per eccesso? *Je n'entreprendrai point de l'expliquer*, ripiglierebbe qui forse colla consueta di lui grande ingenuità lo stesso Naturalista di Ginevra. Almeno io così la penso, non tanto per aver veduto che queste sono le parole, con cui chiude un paragrafo sopra una foglia di *cavol* fiore mostruosa nella IV. Memoria delle sue *Recherches sur l'usage des feuilles*, quanto per aver trovato eziandio che sebbene entri poi nella medesima dissertazione a parlare d'altra maniera di mostro, vuol dire di una rosa dal di cui centro si estolle un fusto quadrato, che porta alla sommità due bottoni *floriferi* diametralmente opposti, e privi del calice, pure nè anche in questo luogo entra nella spiegazione della di lei origine, e non azzarda la menoma congettura.

Non però con tanta modestia si diporta il sopraccitato M. *Marchant* là dove si fa a ragionare delle cagioni, che possono aver dato origine alle mostruosità della rosa da lui

Tom. V.

R r r

(a) Contem. de la Nat. part. X. cap. XIV.

osservata. Anzi chiaro dimostra con le sue parole d'esser tutto disposto a credere ch'esse derivino dallo stravafo, e mescolamento de' succhi, accaduto ne' vasi del rosajo a motivo del taglio, a cui dovette alquanto prima soggiacere. Ma questa spiegazione, benchè appariscente, non farà mai ch'io m'induca ad adottarla per render ragione, o dirò meglio per ispiegare in qualche plausibil maniera l'origine delle nostre rose prolifiche. Imperciocchè primamente io considero ch' elleno sono d'un genere di mostri diverso da quello dell' Accademico Parigino: e quindi che al più al più è permesso il dire, che le cause secondarie o accidentali possono bensì alterare il colorito, e modificare la forma di un fiore, di un frutto, e finalmente anche di una pianta stessa, ma non giammai far nascere nuovi alberi, frutta novelle, e fiori non più veduti: quali appunto sembrano quelli che fino da bel principio mi studiai di porle distintamente sott'occhio.

Adunque che dovraffi pensare intorno alla formazione, ed ai principj, a' quali vanno debitori della stravagantissima loro figura? Come spiegare un fenomeno cotanto astruso, che ha diviso, e tutt'ora divide i più valenti Filici? In quanto a me, dottissimo Sig., non so veder che due semplici mezzi. O dir bisogna col famoso Conte di *Buffon*, che le due nostre rose sieno state formate dalle predilette sue *molecole organiche* riunite e disposte in sì bizzarra guisa dalla forza attiva e vegetatrice: ovvero che procedon da germi così originalmente creati. Non avvi fondamento d'abbracciare la bella ipotesi Buffoniana, stante che le molecole organiche, e le forze attive o sieno plastiche, *sono omai state*, a dirla colle di Lei parole, *per tali e tanti argomenti mortalmente sconfitte, che nulla più trovasi in esse di reale, che il nome* (a). Laonde non rimane, come mostrai apertamente, che ricorrere al propizio refugio della preeistenza de' germi mostruosi; la quale viene da' suoi fautori con prove sì numerose ed incontrastabili dimostrata, che pare non potersene d'avvantaggio dubitare. E di vero basta leggere i *Winslow*,

(a) Opuscolo fugli Anim. infus. part. II. cap. XI.

gli *Halleri*, i *Vallisnieri*, i *Reaumur*, i *Bonnet*, ed altri per restarne pienamente persuasi. Sebbene e chi non vede, che questa sentenza tanto più acquista di forza, e di persuasione, quanto viene di giorno in giorno vie maggiormente assistita dalle osservazioni, e dai fatti? Accresca il di loro numerosissimo stuolo un fatto novello da me osservato, e vaglia in grazia della brevità per que' molti, che potrei qui produrre. Saprà che si allegano, come la più concludente dimostrazione dell'esistenza de' germi mostruosi, *due cervelli in una sola testa* (*). Ora convienmi dirle d'avere, non è gran tempo, veduto con gli occhi miei proprj presso l'eruditissimo Sig. *Jacopo Biancani* Professore di Antiquaria in questo celebre Istituto delle Scienze (a) un uovo di gallina più grande dell'ordinario, il quale ne capiva un altro minore, ma corredato della naturale corteccia pienamente compita ed indurata. Nuotava egli nell'*albume duplicato*, ossia nella chiara del primo, che era poi circondata dalla terza e quarta membrana, le quali restavano in fine riparate e difese dal guscio esteriore. Io non saprei raccontarle cosa racchiudasi nell'uoviccino imprigionato, stante che fummi bellamente proibito d'aprirlo, e d'esaminarne in conseguenza le di lui parti interne, come avrei davvero bramato. Ad ogni modo stimo bene di non occultarle, che la madre gallina, la quale si sgravò felicemente di simil uovo, ne aveva prima partoriti diversi a due tuorli.

Partendo adunque da questo fatto, e da altri moltissimi registrati nelle opere de' celebri sopraccitati Fisiologi e Naturalisti, a me pare di poter con ogni ragione inferire, che la maggior parte de' mostri, sieno animali, sieno vegetabili, non procede da fortuite cagioni, come opinano alcuni, ovvero dalle speziose molecole organiche del *Buffon*, ma bensì da germi *originalmente* mostruosi. Ed in conseguenza io cre-

Rrr ij

(*) *Winslow* Mem. dell' Accad. an. 1742.

(a) Questo stimabile mio amico fu colpito da improvviso colpo d'apoplezia il dì 9 di Novembre 1789, onde

dovette chiudere le luci al giorno per non rivederlo più mai, con mio sommo dolore, ed universale rammarico di tutti i buoni.

do di poter ammettere per lo meno come probabilissimo che anche le nostre rose prolifiche traggono la loro origine da consimili germi. Ma ella non penti mica per questo, ch'io voglia affatto rimuovere l'azione delle cause secondarie dalla formazione d'essi fiori: mai no; anzi la veggio favorevolissima. Dico soltanto, che il Naturalista filosofo non può, e non deve per le addotte ragioni ripetere da essa interamente l'origine. Ed ecco, celebratissimo Sig., quali sarebbero in succinto i miei deboli pensamenti; tuttochè non ardisca di decidere, sapendo già quanto astrusa e difficil sia la spiegazione de' mostri. Per la qual cosa non ho da soggiungere, se non che attendo con sommo desiderio fu questo articolo il di lei pesato giudizio; il quale, o che vaglia a confermare la mia congettura, o che venga a distruggerla, io l'avrò sempre egualmente a sommo grado; poichè così a me avverrà ciò, che suole avvenire a quelli, i quali frequentando uomini grandi, non ne partono dalla loro pratica, che arricchiti di lumi nuovi, e di nuove cognizioni. Il che ottenendo io dalla di lei gentilezza, l'assicuro con le parole del suo grande amico *Bonnet*, che *mon coeur ne fera jamais réfractaire a la vérité*. Poichè al riflettere dell'amatissimo mio Maestro Sig. Abate *Giambatista Tondini*, nella Prefazione alle *Memorie della vita di Paolo Rolli*, „ troppo trista è la figura, „ che far si vede nella repubblica letteraria a quegli impostori, che stampano libri senza nominare neppur per gratitudine i nomi di chi e notizie, e più che notizie loro suggerisce. Al contrario sono troppo seducenti le lodi, che nella „ prefazione della sua storia naturale dà *Plinio* a coloro, che „ ingenuamente confessano gli ajuti, che hanno d'altronde „ ricevuti „. *Est benignum*, dic'egli, & *plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris*.

E qui offerendole di bel nuovo tutto me stesso, in grata riconoscenza del sì prezioso dono, ch'ella si è compiaciuta di farmi della sua benigna padronanza, e pregiatissima amicizia, la prego a continuarmi questa felicità, che mi bea tanto, e tanto mi onora, nell'atto che pieno della più riverente ed ossequiosa stima mi ratifico tutto suo

Bologna 14 Giugno 1789.





D E L L A

VELOCITA' DELL' ACQUA PER UN FORO NEL FONDO DI UN VASO, CHE ABBIA UNO, O PIU' DIAFRAMMI: E DELLA VELOCITA' PURE DELL' ACQUA PER UN TUBO VERTICALE CILINDRICO, O DIVERGENTE, ANNESSO A UN FORO NEL FONDO DI UN VASO SEMPLICE: E DEL SOFFIO CHE SI PROCURA NELLE FORNACI DI ALCUNE FERRIERE COL MEZZO DELL' ACQUA.

Del Sig. TEODORO BONATI.

1. **E**Mpito di acqua il vaso prismatico $ACDB$ si apra un piccolo foro M nella sponda verticale DB , e quant'acqua esce per M altrettanta ne venga aggiunta contemporaneamente in AB , colicchè nel vaso l'acqua abbia la sua superficie superiore costantemente in AB , e sia la linea orizzontale BG lo spazio da scorrersi in 1" colla velocità media dell'acqua pel foro M . In appresso la superficie dell'acqua nel vaso sia mantenuta costantemente più bassa, come in EF , e sia FH lo spazio da scorrersi in 1" colla nuova velocità media dell'acqua per M in questo secondo caso. Così le BG , FH , ecc. potranno esprimere le velocità per M essendo l'acqua mantenuta prima in AB , poi in EF , ecc.

2. Perchè le molte sperienze fatte danno, che le velocità medie per M sono in ragion sudduplicata delle altezze dell'acqua sopra il foro, avremo $BG : FH :: \sqrt{MB} : \sqrt{MF}$. Dunque le velocità BG , FH , ecc. terminano a una parabola MHG di un qualche parametro p . Dunque $BG = \sqrt{p \cdot MB}$, $FH = \sqrt{p \cdot MF}$, ecc. E dicendo M l'aja del foro, M farà $M \cdot BG = M \sqrt{p \cdot MB}$ l'acqua, ch' esce per M in 1" coll' altezza MB sopra il foro; ed $M \cdot FH = M \cdot \sqrt{p \cdot MF}$ farà l'acqua per M in 1" coll' altezza MF .

3. Se al foro M fatto per esempio in una lastra sottile ne sostituirò un altro o più grande, o più piccolo, però fatto esso pure in una lastra egualmente sottile, egualmente pulito ecc., giusta le sperienze fatte le velocità pel nuovo foro faranno le medesime BG , FH , ecc. di prima, e termineranno alla medesima parabola MHG dello stesso parametro p ; e le quantità d'acqua uscite pel foro in 1" faranno diverse dalle prime solamente in ragione dell'aja del foro accresciuta, o diminuita.

4. Ma se chiuso il foro M se ne apra un altro N dello stesso diametro, che il foro M , ma armato di un tubo addizionale esterno dello stesso diametro che il foro, e lungo un diametro del foro, la sperienza ha mostrato, che le velocità medie per N saranno bensì parimente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, ma tutte saranno maggiori delle BG , FH , ecc. come farebbero le Bg , Fh , ecc., che termineranno ad un'altra parabola di un parametro q maggiore del primo p .

5. Che se il foro sarà come m fatto nel fondo CD (f. 2), le velocità saranno pure in ragion induplicata delle altezze dell'acqua sopra il foro; e variandone il diametro termineranno tuttavia alla stessa parabola del parametro p se il foro sarà sempre in una lastra sottile, oppure termineranno alla parabola del parametro q se il foro sarà sempre armato di un tubo nella maniera accennata (4).

6. Il parametro riuscirà ancora diverso tanto pel foro m nel fondo, che pel foro M in una sponda (f. 1) se il foro sarà fatto in una lastra grossa, o verrà armato con un tubo esterno di diverse lunghezze, o con un tubo interno, o con un tubo conico convergente, o divergente, o con un imbuto di dentro, o se invece di essere nel mezzo del fondo sarà accanto a una sponda.

7. In tutti questi casi il parametro si può trovare con una sperienza. Essendo l'acqua dentro il vaso mantenuta come in AB si trovi quanta n' esce pel foro in un dato tempo, e quanta in conseguenza n' esce in 1"; e questa si dica $\mathcal{Q}$. Trattandosi del foro M , e della parabola MHG dev' essere

$$\mathcal{Q} = M \cdot BG = M \sqrt{(p \cdot MB)} \quad (2); \text{ onde } p = \frac{\mathcal{Q}^2}{M^2 \cdot MB}. \text{ Simili-}$$

mente si pratici in tutti gli altri casi accennati; cioè per avere il parametro in ognuno dei casi diversi si divida il quadrato della quantità dell'acqua uscita in 1" pel prodotto del quadrato dell'aja del foro nell'altezza dell'acqua sopra il foro. Il parametro, che risulta dallo sperimento fatto dal *Guglielmini* con un foro quadrato in una lastra sottile del lato di un quarto d'oncia del piede di Bologna, o sia di lin. $3\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, e coll'altezza dell'acqua sopra il centro del foro di pi. 4.9.0, è di pi. $15\frac{1}{4}$. Dalla esperienza del *Mariotte* (Discorso 2. parte III) con un foro del diametro di 3 linee in una lastra, della quale non si fa la grossezza, e coll'acqua alta 13 piedi, risulta un parametro di p. 29.5.9. Dalla esperienza del Sig. *Michelotti* con un foro del diametro di 3 pollici in una lastra sottile, e coll'altezza d'acqua di pi. 21.7.4 sopra il foro risulta il parametro di pi. $22.8\frac{4}{7}$. E dall'altra esperienza dello stesso Autore con un foro pure di 3 pollici, ma armato interiormente con un imbuto cicloidale risulta il parametro di pi. 59.9 (Volume primo pag. 36, 105) minore di poco del noto parametro di pi. 60.4 della parabola, le cui semiordinate sono lo spazio da scorrersi in 1" colla velocità del grave caduto dalla corrispondente ascissa.

8. Mentre l'acqua è mantenuta in *AB* (f. 2.) la velocità pel foro *m* disarmato non è già una velocità acquistata dall'acqua, che discenda coll'accelerazione dei gravi da *AB* fino in *m*, e che si muova per la sola *cataratta*, o pel solo spazio *AEmFB*, che si concepisca descritto colla rivoluzione di una iperbola, rimanendo il restante dell'acqua *AEmC*, *BFmD* affatto immobile, come hanno malamente fatto dire al *Newton* due grand'uomini (cosa sorprendente!) *Giovanni Bernoulli* prima, e poi d'*Alembert*, ed in seguito altri. Si veda a questo proposito il § *Sed foramen* della prop. 36 del lib. II. del *Newton*; la parte II. del t. IV. dell'*Idraulica* di *Gio. Bernoulli*, e l'*Enciclopedia* alle parole *Cataracte*, *Hydrodinamique*. Le direzioni vere delle particole acquee da *AB* fino al foro sono giusta le linee punteggiate della fig. 3; e la velocità di esse particole da principio è piccola, e per buona parte della discesa è uniforme. Solamente quando arrivano a una certa piccola distanza dal foro passano presto a

un moto sensibilmente maggiore, e con sempre nuove accelerazioni arrivano al foro m .

9. Questo mostra, che l'ultima velocità, che è al foro, è effetto di una pressione dell'acqua nelle vicinanze del foro, che incalza da tutte le bande l'acqua anteriore spremendola con una data velocità fuori del vaso in una guisa, son per dire, conimile a quella di un nocciolo di ciriegia, che vien cacciato con velocità dalle polpastrelle di due dita, che lo comprimano.

10. Codesta pressione, che sente l'acqua presso il foro dall'altr'acqua, che le sovrasta, e l'attornia, se il vaso fosse nel voto, deriverebbe unicamente dal peso dell'acqua dentro il vaso, e farebbe proporzionale all'altezza della medesima acqua sopra il foro. Ma essendo il vaso nell'aria la pressione, che genera la velocità in m , è propriamente un risultato di tre pressioni, due delle quali sono cospiranti all'ingiu, ed una è contraria. Imperocchè l'acqua presso il foro oltre la pressione, che sente dall'acqua, ch'è in ragione dell'altezza DB della stessa acqua, sente ancora la pressione dell'aria, che gravita in AB come un'acqua alta 32 piedi, o alquanto più. Dicendo quest'altezza A , al foro m abbiamo veramente una pressione all'ingiu eguale a quella di un'acqua dell'altezza $DB+A$. Ma questa non può impiegarsi tutta in produrre velocità al foro perchè impedita in parte da un'altra pressione, che fa pure l'aria contro il fondo, e contro il foro m con direzione contraria alle due prime, cioè all'insù, e ch'è eguale a quella dell'acqua di un'altezza H , ch'è maggiore dell'altezza A , benchè di poco, cioè quanto importa il peso dello strato dell'aria ambiente il vaso, e dell'altezza DB dell'acqua nel vaso. Se il peso di codesto strato d'aria farà $\frac{1}{900}$ del peso di un eguale strato di acqua, farà $H = A + \frac{DB}{900}$.

11. Questa pressione H al di sotto del foro dee eliderne altrettanta dalle due pressioni $A+DB$ superiori al foro, cosicchè di queste non rimane di libera, ed atta a produrre velocità al foro, che la porzione residua $DB+A-H$; la quale poi

le poi (per essere $H = A + \frac{DB}{900}$) si riduce ad essere

$\frac{899DB}{900}$; cioè quasi DB , cioè quasi quella sola pressione, che avremmo nel voto (10); e così si spiega bene, come un vaso pieno di acqua, e con un piccolo foro aperto nel fondo si sia votato in tempi sensibilmente eguali tanto nell'aria, che nella macchina pneumatica.

12. Per tutto questo converrà concludere, che la velocità dell'acqua ai fori, che pur dee dipendere da una pressione (9), sia da ripetersi dalle sole altezze prementi *residue*, e *libere* fatta che siane la detrazione delle pressioni opponentisi all'uscita dell'acqua; coticchè avendo dimostrato la speranza, che nei vasi semplici, come $ACDB$, possi nell'aria le velocità sono sensibilmente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, si dovrà stabilire che le dette velocità propriamente siano in ragione delle radici delle altezze prementi *libere* nel senso spiegato.

13. Quindi volendo fare l'ipotesi, che venga a mancare l'aria soltanto al di sotto del fondo CD , siccome allora l'altezza premente $DB + A$ sarà tutta libera, dovremo dire che la velocità al foro prima che mancasse l'aria sotto alla velocità dopo stia come le radici delle altezze prementi libere nei due casi, cioè :: $\sqrt{DB + A - H} : \sqrt{DB + A}$: E perciò se per esempio fosse $DB = 4$ piedi, ed $A = 32$ piedi, ed $H = 32$ piedi più una quantità trascurabile, le due velocità staranno :: $\sqrt{4} : \sqrt{4 + 32} :: 1 : 3$; il che fa vedere quanto recedano dal vero quei, che dicono indistintamente *poca* la resistenza, che fa l'aria ai getti d'acqua.

14. Poichè essendo il vaso nell'aria si può contare, che l'altezza premente libera sia DB (11), se il foro m farà in una lastra sottile, cui competa il parametro p , come al $n. 3$, l'acqua per m in 1" giusta il $n. 2$ farà $m\sqrt{p \cdot DB}$, e nel caso che mancasse l'aria solamente sotto il foro, nel quale l'altezza premente libera è $DB + A$, la velocità per m , o sia lo spazio da scorrersi in 1" colla velocità media pel foro m (1) farà $\sqrt{p \cdot (DB + A)}$, e l'acqua uscita per m in 1" farà $m\sqrt{p \cdot (DB + A)}$.

15. Premesse queste cose vengo al caso di un diaframma.

Tom. V.

Sss

Al vaso finora contemplato $ACDB$ col foro m sia unito un altro valo (EFD (f. 4) col foro n nel fondo, e così avremo un vaso $AEFB$ con un diaframma CD . Chiuso il foro n si empia tutto il vaso di acqua, e perchè l'aria esca tutta gioverà l'aprire un foro nella sponda appena sotto C da chiuderli empirò che farà tutto il vaso. Si apra indi il foro n , e la parte superiore $ACDB$ sia mantenuta sempre piena di acqua fino in AB . Verrò prima a un caso particolare. I fori m , n sieno eguali; e sieno ambi fatti in lastre egualmente sottili, e così, che competa loro lo stesso parametro. Sia $DB = 1$ piede, $DF = 100$ piedi, $A = 32$ piedi (10). Ciò posto: l'acqua presso il foro n non può a meno di sentire la pressione all'ingiù di tutta l'acqua $FD = 100$. Da questa pressione si levi la contraria sotto il foro $= A = 32$ piedi, e sopra n avremo un'altezza premente libera non minore di piedi 68. In m poi non possiamo avere una pressione maggiore di $DB + A$, ossia maggiore di 33 piedi. Dunque appena aperto il foro n avremo per n più velocità, che per m , giacchè essendo le altre circostanze pari abbiamo in n una pressione libera non minore di 68, ed in m una pressione non maggiore di 33. Dunque perchè i fori sono eguali, uscirà in egual tempo più acqua per n che per m . Dunque comincerà subito a formarsi un voto fra la superficie come QP dell'acqua inferiore, che si abbassa, e la parte inferiore del diaframma CD . Nè codesto voto $CQPD$ cesserà di crescere se non quando coll'altezza diminuita FP dell'acqua sopra il foro n si abbia per n una velocità minore di prima, e ridotta ad essere eguale alla velocità per m , com'è manifesto.

16 Vengo ai termini generali. Si dica m l'aja del foro m , ed n l'aja del foro n . Sia p il parametro competente al foro m , e q sia il parametro pel foro n . La pressione dell'aria in $AB = A$, e la pressione dell'aria al foro $n = H$. Per le cose dette all'aprirsi del foro n avremo sopra n un'altezza premente libera non minore di $DF - H$, ed una velocità non minore di $\sqrt{q.(DF-H)}$, e perciò passerà per n in 1" una quantità d'acqua non minore di $n\sqrt{q.(DF-H)}$. Ed in m avremo una pressione libera non maggiore di $DB + A$; e perciò una velocità non maggiore di $\sqrt{p.(DB+A)}$,

e passerà per m in 1" un' acqua non maggiore di $m\sqrt{p.(DB+A)}$. Quindi finchè si troverà $n\sqrt{q.(DF-H)} > m\sqrt{p.(DB+A)}$ sarà manifesto, ch' è per passare, aprendo il foro n . più acqua per n , che per m ; e che in conseguenza sotto m si formerà un voto.

17. Crescendo il voto, cala l' altezza dell' acqua sopra n , ed in conseguenza scema la velocità, e l' uscita dell' acqua per n . L' acqua siati abbassata fino in QP . Allora la pressione residua e libera in n sarà $PF-H$, e la velocità in n sarà $\sqrt{q.(PF-H)}$, e la quantità d' acqua per n in 1" sarà $n\sqrt{q.(PF-H)}$; ed intanto l' acqua per m continuerà ad essere in 1" $m\sqrt{p.(DB+A)}$ come prima. Quindi allora il voto cesserà di crescere quando si avrà $n\sqrt{q.(PF-H)} = m\sqrt{p.(DB+A)}$ perchè allora per n , e per m passeranno quantità eguali di acqua in tempi eguali.

18. Se sulle prime si avesse avuto appunto $n\sqrt{q.(DF-H)} = m\sqrt{p.(DB+A)}$, ciò avrebbe indicato che aprendo il foro n era per correre egual acqua per n , e per m , e che non vi sarebbe stato da aspettarsi voto veruno.

19. Ma se all' aprire il foro n si avesse $n\sqrt{q.(DF-H)} < m\sqrt{p.(DB+A)}$, cioè se la pressione $DF-H$ non fosse bastante per far uscire per n tant' acqua quanta nel medesimo tempo potrebbe sopravvenirne da m , in tal caso l' acqua inferiore al diaframma resta incalzata dalla superiore, e sforzata ad accrescere la sua velocità più di quello importi la sola pressione dell' altezza di acqua $DF-H$; ma nel tempo stesso la superiore avendo impiegata una parte della sua pressione $DB+A$ nello spingere al basso l' acqua inferiore, impiegherà soltanto il rimanente in produrre la velocità per m , e si ripartirà così, che tanto per m , che per n passi in un tempo copia eguale di acqua.

20. Per trovare quel tal grado di velocità pei fori m , n sia z quell' altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l' acqua superiore al diaframma unitamente alla pressione dell' aria in AB spinge l' inferiore: e si dica $b=DB$, $c=DF$. Pertanto la pressione sopra n sarà $DF+z=c+z$, dalla quale sottraendo la pressione contraria in n . cioè la pressione H , si avrà sopra n la pressione libera $c+z-H$. La pressione poi residua, e libera sopra m sarà $b+A-z$.

Quindi la velocità per n farà $\sqrt{q \cdot (c+z-H)}$, e la quantità d'acqua per n in 1" farà $n\sqrt{q \cdot (c+z-H)}$. Come pure la velocità per m farà $\sqrt{p \cdot (b+A-z)}$; e la quantità d'acqua per m in 1" farà $m\sqrt{p \cdot (b+A-z)}$; e dovendo essere eguali le dette due quantità di acqua, cioè dovendo essere $n\sqrt{q \cdot (c+z-H)} = m\sqrt{p \cdot (b+A-z)}$ si troverà

$$z = \frac{m^2 p \cdot (b+A) - n^2 q \cdot (c-H)}{m^2 p + n^2 q}, \text{ e la velocità pel foro } n, \text{ cioè}$$

$$\sqrt{q \cdot c+z-H} = \frac{m \sqrt{qp \cdot (b+c+A-H)}}{\sqrt{(m^2 p + n^2 q)}}, \text{ e la velocità pel foro } m,$$

$$\text{cioè } \sqrt{p \cdot (b+A-z)} = \frac{n \sqrt{pq \cdot (b+c+A-H)}}{\sqrt{(m^2 p + n^2 q)}}, \text{ e l'acqua tanto}$$

$$\text{per } m, \text{ che per } n \text{ in 1" farà } \frac{mn \cdot \sqrt{pq \cdot (b+c+A-H)}}{\sqrt{(m^2 p + n^2 q)}}. \text{ E}$$

qui è da notarfi, che farà z positiva quando $n^2 q \cdot (c-H) < m^2 p \cdot (b+A)$, oppure $n\sqrt{q \cdot (c-H)} < m\sqrt{p \cdot (b+A)}$, ossia (poichè $b=DB$, $c=DF$) $n\sqrt{q \cdot (DF-H)} < m\sqrt{p \cdot (DB+A)}$, che è il caso, che qui si contempla (19); e che in conseguenza farà $z=0$ quando $n\sqrt{q \cdot (DF-H)} = m\sqrt{p \cdot (DB+A)}$, ch'è il caso del $n. 18$; e che farà z negativa quando $n\sqrt{q \cdot (DF-H)} > m\sqrt{p \cdot (DB+A)}$, ch'è il caso del $n. 16$ cioè quello del voto sotto il diaframma.

21. Le suddette formole sono applicabili al caso, che invece dell'acqua, e dell'aria si avessero altri fluidi, come farebbe se invece di acqua dentro il vaso AF si avesse del mercurio; ed invece dell'aria fuori del vaso si avesse un'acqua stagnante colla superficie YZV . In questo caso siccome il mercurio pesa 14 volte quanto l'acqua, farebbe A un'al-

$$\text{tezza di mercurio} = \frac{ZB}{14}, \text{ ed } H \text{ un'altezza di mercurio}$$

$$= A + \frac{BF}{14} = \frac{ZF}{14}. \text{ Allora se l'altezza } BF \text{ del vaso non fosse}$$

affai piccola, la quantità $A-H = -\frac{BF}{14}$ non si potrebbe trascurare, come si può molte volte trascurare nel caso, che

trattiamo di acqua, e di aria, nel quale $A-H=-\frac{BF}{100}$.

22. Se i due fori faranno fatti in lastre egualmente grosse, o armati egualmente (6), cosicchè competa ad ambi uno stesso parametro p ; e se inoltre si vorrà trascurare la quan-

tità $A-H$, si avrà $z=\frac{m^2b-n^2c}{m^2+n^2}+A$ (20); e la velocità

pel foro $n=\frac{m\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ e la velocità pel foro $m=$

$\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; e l'acqua tanto per l'uno, che per l'altro foro

in $1''=\frac{mn\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

23. Al n. 20 abbiamo detto z quell'altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l'acqua superiore al diaframma unitamente all'aria premente in AB incalza, e spinge l'acqua inferiore al basso. Ora si osservi, che questa pressione z aggiunta all'altra dell'acqua sotto il diaframma, cioè la pressione $DF+z$, agisce non tanto al foro n , che sopra ogni parte del fondo EF egualmente; come pure anche contro le pareti interne del vaso, dove si uniscono al fondo; e che dal fondo andando in su la pressione dell'acqua contro le pareti scema in ragione della distanza dal fondo, cosicchè in qualunque punto R della sponda verticale la pressione interna dev'essere $DF+z-FR$; e che in conseguenza in D appena sotto il diaframma sarà $DF+z-FD=z$; e sarà anche quella, colla quale il diaframma è spinto dall'acqua inferiore all'insù; ed appunto quella, colla quale l'acqua inferiore si oppone alla discesa dell'acqua superiore pel foro m , com'è manifesto, e che viene equilibrata da quella parte di pressione, che già abbiamo detta z al n. 20, e che s'impiega dall'acqua superiore per incalzare l'acqua inferiore quelle volte che sia $n\sqrt{(q.(FD-H))}<m\sqrt{(p.(DB+A))}$ (19).

24. La pressione poi esteriore in R , che deriva dall'atmosfera, è maggiore della pressione A quanto importa il peso dello strato d'aria dell'altezza BR ; e supponendo questo

peso $\frac{1}{900}$ del peso di un eguale strato di acqua, dicendo N

la pressione dell' aria in R sarà $N = A + \frac{BR}{900}$. Se la pressione dell' acqua interna in R sarà eguale alla pressione dell' aria pure in R , cioè se sarà $DF + z - FR = N$, allora fatto un foro in R si avrà l' equilibrio fra la pressione dell' acqua, che tende ad uscire pel foro, e la pressione dell' aria, che tende ad entrare pel medesimo foro. E siccome dal punto R in giù la pressione interna cresce più di quello cresce la pressione esterna quanto l' acqua pesa più dell' aria, facendo un foro fra R ed F , l' acqua per questo foro uscirà: ed al contrario perchè da R insù la pressione interna scema più che l' esterna, fatto un foro fra R e D , l' aria prevalendo s' innuierà nel vaso.

25. Se si avrà un cannello comunicante $DHKT$, l' acqua in esso si fermerà in un tal punto K , dove la pressione dell' acqua in D sotto il diaframma $= z$ (23) unitamente alla pressione dell' acqua DI , o sia dell' altezza GK , sia eguale alla pressione dell' atmosfera sopra la superficie dell' acqua in K , la qual pressione in K è prossimamente $A + \frac{DB + GK}{900}$, che chiamerò L , onde sarà $z + GK = L$, e perciò $GK = L - z = L - \left(\frac{m^2 p \cdot (b + A) - n^2 q \cdot (c - H)}{m^2 p + n^2 q} \right)$ (20). Volendo considerare le A, H, L , cioè le pressioni dell' aria in AB , al foro n , ed in K (che differiscono di assai poco) come eguali fra di loro, avremo $GK = \frac{n^2 cq - m^2 bp}{m^2 p + n^2 q}$. Quindi se $n^2 qc > m^2 pb$ sarà GK positiva, e la superficie K sarà al di sotto della orizzontale DG ; e quando $n^2 cq = m^2 bp$, la superficie K si troverà in G ; e quando $n^2 qc < m^2 pb$, la GK sarà negativa, e ciò vorrà dire che la superficie dell' acqua nel cannello, che prima si trovava in K sotto l' orizzontale DG , ora si troverà in un punto K sopra la medesima orizzontale. Per esempio, si metta $p = q$, $n = 4m$, e $c = 4b$; sarà $CK = \frac{63b}{17} = 3\frac{1}{17}b$. Si metta invece $n = 2m$, e $c = \frac{1}{2}b$, e sarà $GK = 0$. Si metta infine $n = 2m$, e $c = \frac{1}{4}b$; e sarà $GK = -\frac{2}{7}b = GK$.

26. Sarà però sempre $GK < FD$, cioè $\frac{n^2qc - m^2bp}{n^2q + m^2p} < c$. Infatti $-m^2pb < m^2pc$, ed aggiungendo n^2qc , sarà $n^2qc - m^2pb < m^2pc + n^2qc$, e perciò $\frac{n^2qc - m^2pb}{m^2p + n^2q} < c$.

27. Al $n : 20$ abbiamo, che la velocità per n è $m\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}$ essendo il vaso mantenuto sempre

pieno fino in AB . Ora si cessi di aggiungere acqua nuova, e dopo un tempo t la superficie, ch'era in AB , siasi abbassata in LO , e nel susseguente tempicello dt sia passata in lo , e sia $DO = x$. Sarà $BO = b - x$, ed $Oo = -dx$. Per avere la velocità in n coll'acqua calata in LO basterà, che nella formola suddetta in luogo di $b (= BD)$ si sostituisca $x = DO$, e così la nuova velocità per n sarà $\frac{m\sqrt{(pq.(x+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p + n^2q)}}$

misura del viaggio, che scorrerebbe un corpo in $1''$ colla nuova velocità per n . Codesto viaggio facendo $\frac{m^2pq}{m^2p + n^2q} = \mathcal{Q}$, sarà $\sqrt{(\mathcal{Q}.(x+c+A-H))}$. Dicendo $1'' = K$ se faremo $K : dt :: \sqrt{(\mathcal{Q}.(c+x+A-H))}$ al quarto termine $\frac{dt\sqrt{(\mathcal{Q}.(c+x+A-H))}}{K}$,

questo sarà lo spazietto, che scorrerà nel tempo dt un velo d'acqua, che esca dal foro n . Ed il prodotto di questo spazietto nell'aja n del foro, cioè $ndt\sqrt{(\mathcal{Q}.(x+c+A-H))}$, sarà il volume d'acqua uscita dal vaso nel tempo dt , nel quale rimane vota d'acqua una eguale capacità $Lo = -fdx$ dicendo f la sezione del vase. Dunque avremo l'equazione $-fdx = ndt\sqrt{(\mathcal{Q}.(x+c+A-H))}$; ed integrando per modo, che quando $t = 0$ sia $x = b = DB$, avremo

$$t = \frac{nfK\sqrt{(m^2p + n^2q)}((\sqrt{b+c+A-H}) - \sqrt{(x+c+A-H)})}{mn\sqrt{(pq)}}$$

Questo fa vedere, che se varierò i fori in maniera che il superiore m diventi l'inferiore, mentre l'inferiore n diventa il superiore, i tempi delle deplezioni faranno eguali.

28. Se $q=p$, ed $H=A$, sarà $t = \frac{nfK\sqrt{(m^2+n^2)}}{mn\sqrt{p}}(\sqrt{(b+c)} - \sqrt{(x+c)})$.

29. Quest'ultima formola è stata da me trovata conforme alle molte sperienze da me fatte col vaso cilindrico AD (f. 5) del diametro di lin. 89 alto lin. 102, cui era annesso un tubo FG lungo lin. $436\frac{1}{2}$, e del diametro di lin. $17\frac{1}{2}$. Nel fondo CD , ch'è di latta, vi è un foro E , ed altri tre stanno in F tutti del diametro di lin. $3\frac{1}{2}$. Anche nell'estremo G chiuso con lastra di latta stanno tre altri fori del diametro dei primi. IKL è un galleggiante fatto con una tavoletta sottile IK , cui è annesso normalmente un regoletto KL segnato da K in L in pollici, e linee. Empito il vaso AC di acqua fino all'orlo, come pur anche tutto il tubo FG io applicava in AB il galleggiante, il cui regoletto KL avanzava tutto al disopra del vaso stando verticale. Aperto o il solo foro in E , o uno, o più fori in F con uno, o più fori in G , la superficie in AB si deprimeva insieme col galleggiante, ed il regoletto, che rimaneva sempre vicino alla sponda, mi dinotava i decrescimenti, il tempo de' quali veniva misurato colle oscillazioni di un pendolo di un orologio, delle quali 84 si compivano in un minuto primo. Tuttochè il tubo FG fosse di un'ampiezza tenue, le sperienze mi sono risultate sempre conformi alla formola.

30. Passerò a parlare di ciò, che dee accadere qualora la parte $CEFD$ (f. 4, e 6.) inferiore del vaso contenga in parte dell'aria. Essendo tutto il vaso $AEFB$ voto di acqua, ed il foro m aperto, ed il foro n chiuso, si versi acqua in AD , e si mantenga alta fino all'orlo AB . Dopo un qualche tempo l'acqua caduta da m abbia acquistato sopra il fondo EF l'altezza FO . L'aria, che prima occupava tutto lo spazio prismatico CF compressa come l'aria esterna perchè con essa equilibrata, ora ridotta ad un volume minore, e perciò più compressa, avrà una forza espansiva maggiore, e perciò farà tutt'all'intorno, ed anche al foro m all'insù una pressione maggiore di prima, cioè maggiore di una pressione di un'acqua dell'altezza A di 32 piedi; e questa pressione sarà maggiore di prima (giusta le sperienze fatte) in ragione inversa del volume, cioè faccndo $DO:DF::A$ al quarto termine $\frac{A \cdot DF}{DO}$, farà questa la pressione dell'aria CF ridotta al volume CO contro il foro m ; mentre che la pressione dell'acqua

dell'acqua in m all'ingiù è quella di un'acqua dell'altezza $DB + A$. Quindi qualora crescendo l'altezza FO la pressione in m dell'aria interna all'insù divenga eguale alla pressione dell'acqua superiore all'ingiù, cioè qualora divenga $\frac{A \cdot DF}{DO}$

$= DB + A$, cesserà la discesa dell'acqua per m , il che perciò accaderà quando $DO = \frac{A \cdot DF}{DB + A} = \frac{Ac}{b + A}$ (dicendo $DB = b$,

$DF = c$); onde in tal caso $FO (= DF - DO) = c - \frac{Ac}{b + A} = \frac{bc}{b + A}$.

Posto per esempio $b = 1$ piede, $c = \text{pi. } 2\frac{1}{2}$ essendo $A = \text{pi. } 32$, sarà $FO = \frac{1}{33}$ di piede.

31. Per potere allora empirie di acqua anche la parte CO del vaso si faccia un foro r nella sponda del vaso appena sotto il diaframma. Allora l'aria interna resa comunicante, e perciò equilibrata colla esterna non farà in m all'insù, che la pressione A , la quale cederà alla pressione contraria $DB + A$ dell'acqua superiore, e dell'atmosfera all'ingiù; e così l'acqua per m potrà discendere. Empita per tal modo la parte inferiore del vaso fino per esempio in GH si chiuda il foro r , ch'era stato aperto, e si apra il foro n . Poichè l'aria CH in quel momento è compressa come l'aria esterna (colla quale comunicava) non premerà tutt'all'intorno, cioè e contro il foro m , e sopra la superficie GH , che colla pressione A (qui metterò eguale la pressione dell'aria esterna da AB fino in n) onde la pressione libera al foro m sarà $DB + A - A = DB$; e la pressione residua, e libera dell'acqua al foro n sarà $A + HF - A = HF$; e dicendo p il parametro del foro n , l'acqua per m in 1" sarà $m\sqrt{p \cdot DB}$, e l'acqua per n sarà $n\sqrt{q \cdot HF}$.

32. Se, mantenendo la parte AD sempre piena di acqua fino all'orlo, l'acqua per m in questo caso sarà eguale all'acqua per n , cioè se sarà $m\sqrt{p \cdot DB} = n\sqrt{q \cdot HF}$, la superficie dell'acqua sotto il diaframma si manterrà in GH .

33. Che se sarà l'acqua per n maggiore che l'acqua per m , ossia se sarà $m^2 p \cdot DB < n^2 q \cdot HF$, la superficie GH si deprimerà. Questa sia calata fino in LM . L'aria stessa, che prima occupava lo spazio CH , ora ne occupa un maggiore

CM in ragione della DH alla DM, ed in conseguenza tanto minore sarà la sua forza espantiva, ossia la sua pressione al foro m , e sulla superficie dell'acqua abbassata in LM. Quindi se si farà $DM:DH::A$ al quarto termine $\frac{A \cdot DH}{DM}$, questo sarà la pressione dell'aria CM contro m , e sopra LM; e perciò la pressione residua dell'acqua sopra il foro m sarà $DB + A - \frac{A \cdot DH}{DM}$; e la pressione residua in n sarà $\frac{A \cdot DH}{DM} + MF - A$; e la superficie LM cesserà di abbassarsi quando l'acqua per m sarà eguale all'acqua per n , cioè quando sarà $m\sqrt{(p \cdot (DB + A - \frac{A \cdot DH}{DM}))} = n\sqrt{(q \cdot (\frac{A \cdot DH}{DM} + MF - A))}$

34. Perciò se oltre le denominazioni fatte si dica $FH=i$, $FM=x$, sarà $DH=c-xi$, $Dm=c-x$; e sostituendo si avrà

$m\sqrt{(p \cdot (b + A - \frac{A \cdot c - i}{c - x}))} = n\sqrt{(q \cdot (\frac{A \cdot (c - i)}{c - x} + x - A))}$, d'onde viene $x^2 - x \cdot (A + c + \frac{m^2 p \cdot (A + b)}{n^2 q}) = -Ai - \frac{m^2 p \cdot (bc + Ai)}{n^2 q} = x^2 - x \cdot f = -g^2$, cioè $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g^2)} = FM$ altezza, che in appresso sarà permanente; e sostituito questo valore della x in uno dei membri della equazione, si avrà la quantità di acqua per m , o per n in 1".

35. Ma se nel caso del n. 31 l'acqua per n sarà minore dell'acqua per m , o sia se $m^2 p \cdot DB > n^2 q \cdot IIF$ (33), allora l'acqua GF dovrà crescere in altezza. Sia arrivata fino in IK. L'aria CH sarà ridotta allo spazio minore CK, e perciò facendo $DK:DH::A$ al quarto termine $\frac{A \cdot DH}{DK}$, questo sarà la pressione dell'aria CK al foro m , e sulla superficie IK, onde la pressione residua, e libera in m sarà $DB + A - \frac{A \cdot DH}{DK}$; e la pressione residua in n sarà $\frac{A \cdot DH}{DK} + KF - A$. Quindi

l'acqua per m farà $m\sqrt{(p.(DB + A - \frac{A.DH}{DK}))}$, e l'acqua per

n farà $n\sqrt{(q.(\frac{A.DH}{DK} + KF - A))}$, cioè (posto $FK = x$)

$m\sqrt{(p.(b + A - \frac{A.(c-i)}{c-x}))} = n\sqrt{(q.(\frac{A.(c-i)}{c-x} + x - A))}$, equazio-

ne del n. 34, che somministra pure $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g^2)} = FK$.

36. Quindi perchè $FK > FM$ dovrà eilere $x = f - \sqrt{(f^2 - g^2)} = FM$; ed $x = f + \sqrt{(f^2 - g^2)} = FK$.

37. Fin qui ho parlato di vali con un diaframma. Ora vengo ai vali con due diaframmi. Sia pertanto il vaso $AGHB$ (f. 7) con due diaframmi CD , EF , ed i fori m, n, e . Chiuso il foro e si empia tutto il vaso di acqua. Indi aperto il foro e mentre l'acqua esce dal vaso se ne aggiunga tanta in AB , onde la superficie superiore si conservi sempre in AB . Sia $DB = b$, $DF = c$, $FH = d$. Le aje dei fori si dicano rispettivamente m, n, e . Il parametro competente al foro m sia p ; quello del foro n sia q ; e quello del foro e sia r . La pressione dell'aria in AB sia A ; e l'altra in e sia

$$H = A + \frac{BH}{900} (10).$$

38. Suppongo subito, che non vi sia voto veruno, e che anzi al foro m l'acqua superiore incalzi l'inferiore con una pressione z ; e che al foro n l'acqua superiore incalzi pure l'inferiore con una pressione t . L'acqua per m farà $m\sqrt{(p.(DB + A - z))} = m\sqrt{(p.(b + A - z))}$. E l'acqua per n farà $n\sqrt{(q.(FD + z - t))} = n\sqrt{(q.(c + z - t))}$. E l'acqua per e farà $e\sqrt{(r.(HF + t - H))} = e\sqrt{(r.(d + t - H))}$. Queste tre quantità d'acqua nello stato di permanenza devono esser eguali. Dunque $m\sqrt{(p.(b + A - z))} = n\sqrt{(q.(c + z - A))} = e\sqrt{(r.(d + t - H))}$, d'onde si ricava $z = \frac{(m^2 n^2 p q + e^2 m^2 p r).(b + A) - e^2 n^2 q r.(c + d - H)}{e^2 m^2 p r + e^2 n^2 q r + m^2 n^2 p q}$,

$$t = \frac{m^2 n^2 p q.(b + c + A) - e^2 r.(m^2 p + n^2 q).(d - H)}{e^2 m^2 p r + e^2 n^2 q r + m^2 n^2 p q}.$$

39. Se farà z quantità positiva sostituendo il suo valore nella formola $m\sqrt{(p.b + A - z)}$ si troverà questa

T t t ij

$$\frac{emn\sqrt{(pqr.(b+c+d+A-H))}}{\sqrt{(e^2m^2pr + e^2n^2qr + m^2n^2pq)}} = emn\sqrt{(pqr.(BH+A-H))} \quad \text{che}$$

è la quantità d'acqua, che uscirà per m in $1''$, ed in conseguenza anche per n , e per e contemporaneamente; e questa formola divisa per l'aja del foro m , cioè divisa per m darà la velocità pel foro m ; e divisa per n darà la velocità pel foro n ; e divisa per e darà la velocità pel foro e .

40. Crescendo la c ($=DF$), o la d ($=FH$), o tutte e due, a segno che si abbia $z=0$, ciò vorrà dire, che l'acqua sopra m non incalza più la inferiore, e che la pressione $b+A$ è tutta libera per accelerare l'acqua al foro m ; e l'acqua scorrente per m (ed in conseguenza anche per gli altri fori n, e) a ogni $1''$ farà $m\sqrt{(p.(b+A))}$.

41. Crescendo anche più la quantità $c+d$ il trovato valore della z farà negativo, il che indicherà inoltre, che sotto m si avrà un voto, e tuttavia per ogni foro scorrerà la stessa quantità di acqua $m\sqrt{(p.(b+A))}$ in ogni $1''$.

42. Così se si troverà il valore della $t=0$, sapremo che al foro n non esiste il supposto incalzamento dell'acqua superiore sulla inferiore; e se anzi farà t negativa, sapremo di più che sotto n si avrà un voto.

43. Se essendo il valore succennato t o zero, o negativo farà quello della z o zero, o negativo, la quantità dell'acqua per ciaschedun foro sarà sempre l'anzidetta $m\sqrt{(p.(b+A))}$, la quale divisa per m , o per n , o per e darà la velocità o pel foro m , o pel foro n , o pel foro e .

44. Ma se farà $t=0$, oppure t negativa, ma insieme z positiva, avremo in m la pressione libera $DB+A-z=b+A-z$, ed in n la pressione libera $FD+z=c+z$, e l'acqua per m in ogni $1''$ farà $m\sqrt{(p.(b+A-z))}$, e l'acqua per n farà $n\sqrt{(q.(c+z))}$, e nello stato di permanenza farà $m\sqrt{(p.(b+A-z))} = n\sqrt{(q.(c+z))}$; e così si avrà il valore della z non più dipendentemente dalle quantità d, e, r, H , come prima (38),

e farà $z = \frac{m^2p.(A+b) - n^2qc}{m^2p + n^2q}$; e la quantità d'acqua pei due

fori m, n (ed in conseguenza anche pel foro e) farà $\frac{mn\sqrt{(pq.(b+c+A))}}{\sqrt{(m^2p + n^2q)}}$, la quale divisa per uno dei tre fori dà

la velocità per quel tal foro.

45. Dalle cose dette fin qui si può vedere, che pel caso di tre diaframmi CD ($f. 8$), EF , GH coi fori f, g, h, i , ai quali competano i parametri p, q, r, s , essendo $DB=b$, $DF=c$, $FH=d$, $HK=e$, nel caso di niun voto dicendo z, t, u gl'incalzamenti ai fori f, g, h , avrà luogo l'equazione $f\sqrt{(p.(b+A-z))}=g\sqrt{(q.(c+z-t))}=h\sqrt{(r.(d+t-u))}=i\sqrt{(s.(e+u-H))}$, dalla quale stando sulle tracce esposte si potranno ricavare e la quantità d'acqua per ogni foro in 1" nello stato di permanenza, e le velocità per ciaschedun foro non tanto nel supposto caso di niun voto, che in qualunque combinazione di uno o più voti.

46. E lo stesso io dirò del caso di quanti diaframmi venissero proposti.

47. Passerò ai vasi, che hanno un tubo annesso a un foro fattovi nel fondo. I primi cinque vasi espressi colla fig. 9. sieno mantenuti sempre pieni di acqua fino all'orlo. Le altezze A, B, C, D, E sieno tutte $=b$. I fori F, G, H, I, K, L sieno eguali fra di loro. Le altezze eguali GL, HM, IN, KO si dicano ognuna $=c$. Ai fori F, G, L, I, N competa lo stesso parametro p . Il tubo HM sia cilindrico. Del foro I sia maggiore il foro N , ed a questo sia eguale la bocca inferiore O del tubo divergente KO .

48. Se GL ($=c$) sarà maggiore di A ($=b$), la velocità per G sarà maggiore della velocità per F . La velocità per H è maggiore anche della velocità per G . La velocità per I è maggiore della velocità per G , e può esser anche maggiore della velocità per H secondo che N è più, o meno grande di I . E la velocità per K è maggiore della velocità per I . Così mostra la sperienza. D'onde nasce tanta varietà di velocità pei fori F, G, H, I, K , che sono tutti eguali, e con altezze eguali d'acqua sopra ognuno d'essi?

49. Giusta il $n. 2$ la velocità per F è $\sqrt{(p.b)}$. E giusta il $n. 20$ la velocità per G è $\frac{n\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}=($ per essere qui $q=p$, $n=m$, ed $A-H$ quantità trascurabile) $\frac{\sqrt{(p.(b+c))}}{2}$. E tutte le volte, che sia $c>b$, come qui si sup-

pone, si trova $\sqrt{(p.\frac{(b+c)}{2})}>\sqrt{(p.b)}$. Ecco adunque una ra-

gione, onde la velocità per G è maggiore della velocità per F .

50. La velocità per H dev'esser maggiore che per G perchè l'acqua uscita da G si dilata per riunirsi in L , e per soffrire in L il ritardo dei filamenti contrarj iL , oL , che dee renderli sensibile anche in G . Ma l'acqua uscita da H arriva unita fino in M , dove non soffre il conflitto dei filamenti contrarj. Dunque si vede ancora, che per H l'acqua farà più libera, e più veloce, che per G .

51. Nel caso dei fori I , N la formola del n. 20 applicata al caso del foro I dà (fatta $q=p$, e trascurando $A-H$) $\frac{n\sqrt{p.(b+c)}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, velocità per I . Ed abbiamo la velocità per

$G = \sqrt{p. \frac{(b+c)}{2}}$. E essendo $n > m$ per essere $N > I$, si trova

$\frac{n\sqrt{p.(b+c)}}{\sqrt{m^2+n^2}} > \sqrt{p. \frac{(b+c)}{2}}$. Dunque egli è pure manifesta

una ragione, onde l'acqua per I sia più veloce, che per G .

52. Anche in O manca quel contrasto dei filamenti, che si ha in N , con che si vede ancora, che la velocità per K dev'esser maggiore, che per I .

53. Il *Mariotte* nel Discorso secondo della parte terza del moto delle acque disse, che la velocità in H essendovi il cannello è media proporzionale tra la velocità in H senza il cannello, e la velocità, che si avrebbe al foro $\mathcal{Q}$ eguale alla bocca M fatto nel fondo del vaso $P\mathcal{Q}$ alto come il vaso CM .

54. Lo *s' Gravesand* (lib. 3. cap. 9) vedendo, che per H la velocità è maggiore col cannello, che senza, non pensando punto alla pressione dell'aria, ricorse alla coesione dell'acqua del cannello in H coll' acqua del vaso: e disse di aver trovato colla sperienza, che la velocità per M (ed in conseguenza anche per H) è quasi la stessa, che per $\mathcal{Q}$, essendo i vasi mantenuti sempre pieni. Quindi converrebbe dire, che la colonna acqua MH colla sua coesione tira a sè l'acqua del vaso C con una forza proporzionale al suo peso, cioèchè la pressione dell'acqua del vaso dell'altezza C , e la coesione dell'acqua in H eguale al peso della colon-

na HM unite insieme in H equivagliano alla pressione di un' acqua dell' altezza $MH + C$, ed eccitino in H una velocità eguale alla velocità prodotta in $\mathcal{Q}$ dall' acqua dell' altezza $P\mathcal{Q}$ eguale all' altezza $MH + C$.

55. Anche *Daniello Bernoulli* pensa a tutt' altro, che al peso dell' atmosfera. La sua teoria (§ 23, 24 della Sez. 3 dell' Idrodinamica) importa, che la velocità per M eguagli la velocità per $\mathcal{Q}$ come ammette s' *Gravesand*, e che la velocità per $\mathcal{Q}$ sia quella di un grave caduto dall' altezza $P\mathcal{Q}$. Sarebbe per ventura scusabile se avesse riposato in questo sulla speriienza asserita dallo s' *Gravesand*, ch' era conforme alla sua teoria. Ma avendola egli ripetuta trovò, che la velocità per H non era altrimenti eguale alla velocità per $\mathcal{Q}$, ma quasi media (pag. 56.) fra la velocità per F , e la velocità per $\mathcal{Q}$ (53): e qui senz' altro ne attribuisce il divario agl' impedimenti. Viene egli pure ad adottare la coesione dell' acqua. Infatti considerando un tubo inclinato, irregolare $AFGD$ annesso a una vasca $N\mathcal{Q}$ (f. 10) mantenuta sempre piena di acqua mentre questa scorrendo pel tubo va ad uscire pel foro H , cerca la pressione dell' acqua contro le pareti del tubo in un qualunque ito F . Stando alla sua teoria, la velocità per H è quella dell' altezza SD , o sia quella di un grave caduto per SD . E supponendo il tubo troncato in FG la velocità per FG sarebbe quella dell' altezza $RF = a$. E l' altezza della velocità attuale per la sezione FG del tubo non troncato sia b . Il *Bernoulli* vuole, che la ricercata pressione dell' acqua in FG sia quella di un' acqua stagnante dell' altezza $a - b$ (§ 10. Sez. XII).

56 Volendo applicare questa formola a un' altra sezione fg , sarà a l' altezza della velocità per fg supposto il tubo troncato in fg , cioè sarà $a = Cg$; e sarà b l' altezza della velocità attuale per la sezione fg del tubo non troncato; e la pressione ricercata in fg sarà qui pure $a - b$. Ma si può dare, che sia $b > a$, come se la sezione fg fosse eguale al foro H ; perchè in questo caso la velocità attuale per fg eguaglia la velocità per H . Ma questa è maggiore della velocità supposta in fg col tubo troncato in fg . Dunque anche la attuale in fg è maggiore della supposta in fg ; e perciò $b > a$. A maggior ragione si trova $b > a$ quando la se-

zione fg fosse minore del foro H . Pertanto nei casi di $b > a$ la formola $a - b$ è negativa *atque sic* (dice il Bernoulli §. 11 Lez. XII.) *pressio in suctionem mutatur, idest latera canalis introrsum premuntur*. E se a un foro in f starà appeso un cannello fr pieno d'acqua fino al punto t a livello del foro H , l'acqua ft non discenderà impedita (dice l'Autore) *ab attractione aquae praterfluentis*: ed ecco un'attrazione dell'acqua in f analoga alla coesione dello s' *Gravesand* dell'acqua in H (f. 9) (54).

57 Questo al certo è un attribuir una forza eccessivamente troppa alla coesione, all'attrazione dell'acqua. Si tuffi un dito nell'acqua, e poi si ritiri fuori tenendolo rivolto in giù, e si vedrà che al suo estremo si forma una goccia, che cresce; e quando questa arriva ad esser lunga tre linee circa, si stacca. Dunque al più si potrà accordare all'acqua una coesione, od un'attrazione eguale al peso di un'acqua alta tre linee; ma non mai a quello di un'acqua dell'altezza HM (f. 9), o dell'altezza ft (f. 10), che può essere di piedi.

58 Quindi è, che quantunque le formole Bernoulliane intorno ai diaframmi, e nel caso di $n\sqrt{(q.(DF - H))} < m\sqrt{(p.(DB + A))}$ (19) s'accostino talvolta al vero (cioè quando i parametri sieno uguali, ed in oltre sia $A - H$ quantità trascurabile), altre volte però se ne discostano notabilmente, appunto quando non si può trascurare la quantità $A - H$, come si è veduto al n. 21, perchè i principj, d'onde esse formole discendono, non sono i giusti (57).

59 Di molto ancora recedono dal vero le formole Bernoulliane trattandosi dei tubi divergenti contemplati qui sopra. Se al vaso DN (fig. 9) si adatterà un cannello comunicante $YXoZ$, l'acqua in questo si fermerà in un punto Z , dove la pressione dell'atmosfera uguaglia le due pressioni contrarie, una della colonna XY , e l'altra, ch'è la pressione laterale dell'acqua in Y ; e si è mostrato al n. 26 che questo punto Z sarà sempre più alto del foro N . Ma adattando un simile cannello al vaso E , che porti il tubo divergente KO , l'acqua in questo cannello si ferma in un punto T più basso della bocca O . Una ragione di questo è, che l'acqua per K è più libera, che per I , perchè in I
sente

sente la remora, che nasce dal conflitto dei filamenti in N , e per questo la pressione laterale dell'acqua sotto K è minore, che sotto I , cioè in Y . Quindi per far equilibrio coll'atmosfera premente in T vi vuole una colonna d'acqua KV maggiore della colonna YX , acciocchè colla pressione laterale sotto K minore, che sotto I , faccia equilibrio colla pressione dell'atmosfera in T , che si può dire eguale alla pressione dell'atmosfera in Z .

60 Di quanto T nei casi diversi stia più basso di O finora non saprei determinarlo, che con una serie di sperimenti. Ne ho fatto alcuni pochi, e qui ne dirò uno.

61 Era $aK = \text{lin. } 102$; $Kx = \text{lin. } 15$; $xO = \text{lin. } 663$; il diametro in $K = \text{lin. } 5$, ed il diametro in O di $\text{lin. } 10 \frac{1}{2}$. la porzione TR del cannello era di vetro. Chiusa la bocca O , ed empito tutto di acqua fu riaperta la bocca O ; e quando l'acqua del vaso si fu abbassata tre pollici, e fu arrivata in c , l'acqua nel cannello ebbe la superficie in T $\text{lin. } 1079$ più bassa del punto x , cioè p. 7. 5. 11.

62 Chiuso il cannello xeR , ed empito di nuovo il tubo divergente, ed il vaso, e riaperta la bocca O , l'acqua si è abbassata tre pollici, cioè da a in c , in 12 oscillazioni di un orologio, delle quali 144 fanno un minuto primo; ed in altre quattro oscillazioni si è abbassata un altro pollice; con che si trova, che l'acqua del vaso mentre arrivò in c avea prossimamente una velocità da scorrere $\frac{1}{2}$ di pollice per ogni $1''$. E perchè il diametro del vaso è di $\text{lin. } 89$ essendo il diametro in x di $\text{lin. } 5$, la velocità per x riesce di $\text{poll. } 190$ per ogni $1''$; alla qual velocità compete l'altezza $\frac{(190)^2}{724}$ (essendo $\text{poll. } 724$ il noto parametro pei gravi cadenti) $= \text{poll. } 50$, poco meno.

63 E perchè la sezione in x alla sezione in $O :: 5 : (10\frac{1}{2})^2 :: 100 : 441$, la velocità per O era di scorrere $\text{poll. } 43$ per ogni $1''$.

64 Troncato in x il tubo xO , la velocità dell'acqua abbassata da a in c era di scorrere $\text{poll. } \frac{16}{115}$ per ogni $1''$, ed in conseguenza la velocità in x col tubo troncato fu di scorrere $\text{poll. } 44$ per ogni $1''$.

Tem. 17.

V V V

65 Vediamo quanto questo corrisponda alla teoria, ed ai precetti del *Bernoulli*. La sua teoria importa, che la velocità per O , e l'altra per x del tubo troncato in x fossero quelle di un grave caduto dalle altezze cO , e cx : poichè $cO = \text{lin. } 744 = \text{pol. } 62$; e $cx = \text{lin. } 81 = \text{pol. } 6.9$, le velocità delle due cadute saranno $\sqrt{(724.62)}$, $\sqrt{(724.6\frac{1}{4})}$, cioè pol. 211, e poll. 69 ben diverse dalle osservate, che furono di pol. 43, e di pol. 44 ed è osservabile, che queste velocità avutesi si scostano ancora dalla ragion sud-duplicata delle altezze, e che se ne discostano così, che all'altezza maggiore corrisponde una velocità minore.

66 L'Autore al §. 12 della sez. XII. dà la formola $\frac{mm}{nn} a - c$ per l'altezza di x sopra la superficie dell'acqua in T , essendo $a = cO$, $c = cx$; m la sezione O , ed n la sezione x . Dal n. 61 si ricava $a = \text{pol. } 62$, $c = \text{pol. } 6.9$, ed $m : n :: 441 : 100$. Quindi sostituendo risulta T più basso di x piedi 100 meno un pollice; dovechè nella speranza T fu più basso di x soli pi. 7. 5. 11: divario esorbitante.

67 S'era accorto il *Bernoulli*, che la sua teoria si scostava troppo dal fatto; ma non per questo sospettò della teoria, e soltanto incolpò gl'impedimenti, che ritardano la velocità per O ; e per la pratica disse, che in luogo di $\frac{mm}{nn} a$ della formola bastava mettere l'altezza della velocità attuale in x da trovarsi colla speranza.

68 Quest'altezza dedotta dalla velocità attuale è di pol. 50 (62). Dunque dovrebbe essere $xT = \text{pol. } 50 - c = \text{pol. } 43.3$ (65) = pi. 3. 7. 3., dovechè nella speranza ebbi pi. 7. 5. 11; ed è ben rimarcabile, che coi pi. 3. 7. 3 la superficie T dell'acqua nel cannello si sarebbe trovata più alta della bocca O contro ogni speranza di questo genere fatta con tubo divergente.

69 Non recheranno meraviglia le esposte discrepanze se si consideri che l'Autore ha dimenticata affatto quell'azione dell'aria, che in questo genere di sperienze ha una gran parte. Nel voto il risultato sarebbe stato affatto diverso.

70 Ecco com' io spiego il mio sperimento. Ammetto col *Bernoulli*, e col Sig. Ab. *Bassut* (Hydr. §. 689), che la pressione laterale dell' acqua alle pareti in Kx sia la pressione atta a produrre in K quella velocità libera, che si avrebbe senza impedimenti da K in giù meno la pressione atta a produrre la velocità attuale per Cx ritardata dagli impedimenti inferiori.

71 Se il tubo KO troncato in x come al n. 64, l' avessi fatto sboccare colla bocca x nel voto, allora la velocità per x sarebbe stata affatto libera, e sarebbe stata prodotta in K da tutta la pressione dell' acqua Kc unita alla pressione A in c dell' aria. Onde la prima delle due pressioni del n°. precedente farà $A + cK$.

72 Per avere l'altra pressione convien trovare il parametro conveniente al foro K armato del tubo Kx (6). Poichè troncato il tubo in x ebbi per x la velocità di pol. 45, 9 (64), dividendone il quadrato per l' altezza Kc dell' acqua sopra il foro, ch' era di pol. 5 $\frac{1}{2}$, il quoziente 383 farà il parametro ricercato.

73 E perchè col tubo KO intiero ebbi per x la velocità di pollici 198 (62), dividendone il quadrato pel parametro si avrà per quoziente pol. 102. 4 = pi. 8. 6. 4 altezza premente di acqua atta a produrre in K , e perciò anche per x la velocità avuta per x col tubo KO non troncato.

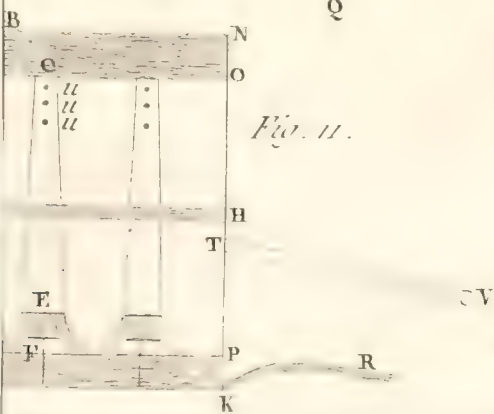
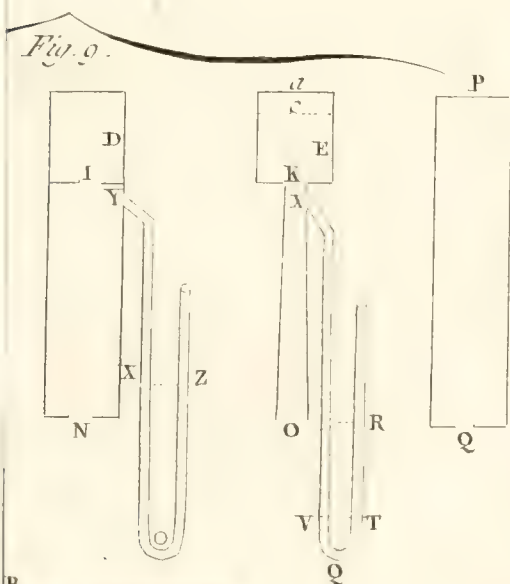
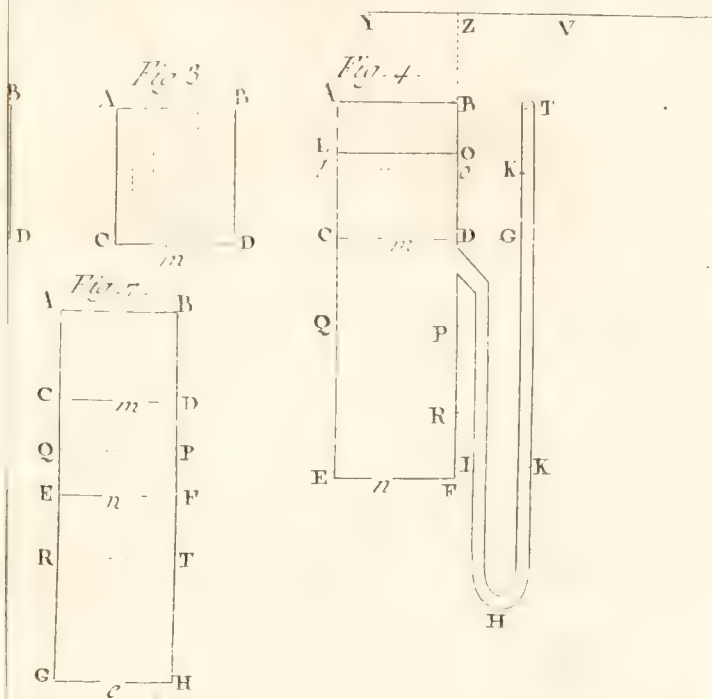
74 Dunque la pressione laterale dell' acqua in x col tubo KO intiero farà quella di un' acqua stagnante dell' altezza $A + cK - \text{pi. 8. 6. 4.}$ (70, 71, 72). Questa pressione laterale dell' acqua in x unita alla pressione dell' acqua dell' altezza xT dev' esser eguale alla pressione A dell' aria in T . Dunque l' altezza $xT = \text{pi. 8. 6. 4} - cK = \text{pi. 8. 6. 4} - \text{pi. 0. 5. 6}$ (61) = pi. 8. 0. 10; ch' è maggiore dei pi. 7. 5. 11 avuti nella sferienza di soli pol. 6. 11. La cosa meriterebbe d' esser confermata con altri sperimenti.

75 Intanto essendosi trovato qui sopra, che l' acqua in x preme le pareti con una pressione $A + cK - \text{pi. 8. 6. 4} = \text{pi. 32} + \text{pi. 0. 5. 6} - \text{pi. 8. 6. 4} = \text{pi. 23. 11. 2}$; e tolto il cannello xR l' aria si presenterebbe tosto al foro x con la pressione $A = \text{pi. 32}$, prevalendo questa a quella dell' acqua l' aria entrerà pel foro x , e mescolata coll'

acqua verrà da questa rapita al basso, ed in un con essa uscirà per la bocca O .

76 Si conosce quindi in che consista l'artificio, ond' eccitano con gran profitto in alcune Ferriere un soffio violento, ed equabile per mantenere accesa la fornace per fondere la vena del ferro. Per un condotto AB (fig. 11) va l'acqua in una vasca $LNOM$, d'onde scende per più canali CE di tavole, divergenti, ed all'incontro dei sottoposti piani F spiccia tutt' all'intorno, empie la camera GK fino in IP , ed esce per un emissario KR . Pei fori u, u, u fatti in un lato d'ogni canale (detto perciò *haut*) entra l'aria per la ragione spiegata, e trascinata dall'acqua che discende, esce per le bocche E , ed all'urto coi piani F si separa dall'acqua: e trovandosi in una camera $GQKH$ tutta ben chiusa a riserva di due fori K, T , nè potendo uscire pel foro K sempre occupato dall'acqua, esce per l'altro T , e pel tubo TV va a soffiare con violenza, ed equabilmente nella fornace.





OSSE RV AZIONI

SOPRA VARJ EFFETTI DELLA PRESSIONE DE' FLUIDI.

Del Sig. SIMONE STRATICO.

1 *Boyle* diede il nome di paradossi idrostatici alle leggi fondamentali dell'equilibrio e pressione de' fluidi, perchè riescono esse affatto fuori dell'aspettazione e del prevedimento che se ne ha, volendo dipendere dal ragionamento, e non dall'esperienza. E non pertanto è certissimo, che quelle leggi non sono diverse dalle leggi statiche de' corpi solidi, delle quali non altro esser possono, se non che una modificazione.

2 La gravità opera ne' fluidi, come ne' solidi, ma a prima giunta, e forse anche dopo qualche meditazione non si comprende bene come una massa di diaccio che riempie un vaso cubico di fondo orizzontale, preme soltanto il fondo con tutto il suo peso, e non eserciti veruna pressione nelle pareti verticali dello stesso vaso: e questa medesima massa ridotta fluida preme la base del vaso appunto, come da prima con tutto il suo peso, ed insieme preme le pareti dello stesso vaso, e la pressione che esercita in ciascheduna parete sia la metà di quella ch'esercita sulla base; per modo che la stessa mole d'acqua, la quale nello stato di solidità preme come uno, nello stato di liquidezza preme effettivamente nel fondo e pareti del vaso come tre, pesando in amendue questi stati come uno. E se la medesima mole d'acqua liquida si contenga in un vaso parallelepipedo, la di cui base sia doppia, o la metà di quella del vaso cubico poc' anzi considerato, la pressione nella base orizzontale sarà sempre come il peso di tutta la mole d'acqua, e la pressione nelle pareti

farà come due volte e mezza, o come sei volte il peso della stessa mole.

Fig. I

3 La forza di gravità, che sollecita le pareti de' fluidi ad allontanarsi dalla massa e scorrere verso i lati, se non siano sostenute, non può operare altrimenti, se non che facendole discendere per piani inclinati, e la pressione che esercitano allorchè sono quiete deve ridursi alla legge di pressione de' corpi solidi posti in equilibrio sopra piani inclinati. Supponga il corpo C sul piano inclinato AE . La sua forza di gravità rappresentata da CB si risolve nelle due CA , AB , con la prima delle quali preme il piano AE , coll' altra AB è sollecitato a discendere: sicchè, se vi sia un piano verticale FG , il quale trattenga la discesa di C , esso sarà premuto con la forza AB . Queste tre forze sono rappresentate dai tre lati del triangolo BDE , simile a CAB , onde BE mostra la forza totale di gravità, DE la pressione sul piano inclinato, DB la pressione nell'appoggio verticale GF . E poichè le due BD , DE prese insieme sono maggiori di BE , è manifesto che generalmente i corpi gravi possono esercitare per la loro gravità delle pressioni, la somma delle quali sia maggiore del loro peso.

4 Ma se il corpo C fosse collocato in D sul piano orizzontale DE , tutta la sua pressione si eserciterebbe sullo stesso piano, e non affatto sul piano verticale FG contiguo al detto corpo. E se fossero collocati verticalmente sopra D molti corpi, la pressione sarebbe come la somma de' pesi loro, ma esercitata solamente nel piano orizzontale, e non mai nel verticale. Ed ancora, se BD rappresenti una serie verticale di corpi, DE una serie orizzontale di corpi eguali, non si troverà mai, che il punto E d'un piano ivi sollevato verticalmente sia premuto da questi; nè in verun altro modo si potrà intendere l'effetto della pressione esercitata nel parete verticale, se non che ritornando alla posizione del corpo C sopra il piano inclinato. Quindi poichè non si considera mai una serie di sole particelle fluide nella verticale e nell'orizzontale d'un vaso, ma sempre una massa che ne occupi la capacità, perciò la pressione ch'esercita una mole di fluido contenuta da fondo orizzontale e pareti verticali dovrà essere dedotta dalla legge statica del piano inclinato.

5 Con la stessa altezza AD si possono fare de' piani diver- Fig. II
famente inclinati, come AF ad angolo semiretto aF , αF
ad angoli maggiore, e minore del semiretto. Ciò posto s'of-
servi, che la gravità totale dello stesso corpo collocato sopra
qualivoglia de' suddetti piani si risolverà nel caso d'equilibrio
in modo, che la pressione esercitata nel piano verticale BF sia
costantemente rappresentata dalla linea AD eguale a DF , e
la pressione sul piano inclinato sia rappresentata dalle linee
 DF , dF , δF . Lo che essendo vero per ogni punto q della
 BF relativamente alla serie verticale di parti fluide insistenti
sopra t , o , p , si dedurrà che la somma delle pressioni in
 BF sarà rappresentata dalla somma delle linee DA , nA , cioè
dall'area del triangolo isoscele rettangolo ADF , e la pressio-
ne sul piano inclinato sarà rappresentata dalla somma delle
linee αB , pq : AB oq : αB , tq , cioè dall'area de' triangoli
 aBF , ABF , αBF . Laonde supposto che si contenga un flui-
do ne' vasi la sezione verticale de' quali sia $\alpha\delta FB$, $ADFB$,
 $adFB$, la pressione nella parete BF sarà sempre come il tri-
angolo rettangolo isoscele ADF , e la pressione sulla base sa-
rà come la somma de' due triangoli αBF , $\alpha\delta F$ uno espri-
mente la pressione sul piano inclinato, l'altro esprimente la
pressione sulla base: e così dicasi di $ADF + ABF$, e di adF ,
 aBF : al che corrisponde l'esperienza.

6 Ma inoltre se sopra una tavola OP si dispongano due Fig. III
piani inclinati FA , FS , i quali per mezzo di pesi attaccati
a due fili avvolti a due carrucole pendenti da due stanti
 BR , br restino equilibrati e formino angolo retto tra di lo-
ro, e semiretto con la tavola, indi si collochi un globo G
sopra entrambi, è certo che per mantenere i piani nel-
la rispettiva loro posizione, converrà aumentare i pesi at-
taccati ai fili, ed è certo insieme che la tavola OP sosterrà
la pressione di tutto il peso G : giacchè se tutto questo ap-
parecchio si metta in equilibrio ad una bilancia, indi si le-
vi dal medesimo il peso G , converrà scemare dal contrappe-
so egual misura per mantener l'equilibrio. Parimente suppo-
nendo che i piani inclinati siano tre o più, i quali formino
un angolo solido, ed il corpo G posi sopra tutti, premerà esso
tutti i piani con forza eguale, e premerà sulla base di tutti
questi piani con forza eguale al suo peso. Così ne' fluidi la

legge di pressione nella base e ne' pareti va del pari con la legge statica di pressione de' solidi ne' piani inclinati ad angolo semiretto.

7 Le parti dell'acqua sconnesse tra di loro per la fluidità non solamente pesano ed aggravano le pareti ed il fondo de' recipienti, ma anche gli strati di fluido sottoposti. Quindi è manifesto che l'acqua pesa nell'acqua. Per altro, siccome la volgare speriienza insegna che un vaso pieno d'acqua immerso nell'acqua s'alza si abbassa e si trasporta lateralmente con forza minima, e da non paragonarsi con quella che si deve impiegare per produrre gli stessi movimenti nell'aria; così i Peripatetici dedussero che l'acqua non gravita nell'acqua, e generalmente che i fluidi non gravitano nel proprio elemento.

8 *Boyle* dimostrò il contrario con la nota esperienza, cioè che esplorando il peso d'una boccetta vuota chiusa immersa nell'acqua, e resa così pesante sicchè di fatto s'immerga, indi aperta la boccetta così immersa sicchè v'entri dell'acqua, essa pesa appunto tanto di più quanto è il peso dell'acqua che è entrata. Di questa esperienza si servono generalmente i Fisici per dimostrare che l'acqua nell'acqua pesa per l'appunto come nell'aria. Dall'altra parte, essendo certo che il vaso pieno d'acqua immerso nell'acqua si move con forza minima, e che una nave affondata, se si prescinde dall'aderenza al fondo fangoso, si solleva con forza di gran lunga minore del peso dell'acqua ch'essa contiene, bisogna sviluppare l'equivoco, che nasce da questi confronti.

9 Un vaso chiuso e vuoto appeso ad una bilancia, immerso sott'acqua e messo all'equilibrio, da qualsivoglia forame aperto nelle sue faccie laterali, o nel fondo, o nel coperchio si riempie d'acqua, ed anche se sia affatto senza fondo aggrava la bilancia nello stesso modo, e per restituire l'equilibrio conviene aggiungere tanto contrappeso, quanto è il peso dell'acqua che occupa la capacità del vaso. Ora siccome, quando si giudica del peso d'un corpo posto sulla bilancia, vi si connette necessariamente l'idea della pressione ch'esso esercita nella lance, ed in questo senso suol sembrare dimostrativa l'esperienza di *Boyle*; così può recar confusione l'osservare nell'esperienza modificata col vaso senza fondo,

fondo, che l'acqua occupa bensì la capacità del vaso, ma non esercita sopra d'esso alcuna pressione, e non pertanto l'aumento del peso sia il medesimo, come se il vaso avesse un fondo. Quindi sebbene sia vero che l'acqua pesa nell'acqua, l'esperienza di *Boyle* non lo prova direttamente, siccome suol sembrare.

10 L'acqua introdotta nella boccetta immersa preme col suo peso nelle pareti e nel fondo di essa, ma non turba l'equilibrio per questa pressione, giacchè quanto preme al di dentro la contenuta, altrettanto preme al di fuori con direzione contraria l'acqua che la circonda, e tenta d'entrare e d'occupare il luogo occupato dalla boccetta. Il volume del vaso chiuso ed immerso nell'acqua è composto dal volume delle sue pareti, e dal volume o spazio vuoto d'acqua che le pareti stesse racchiudono: quindi la forza che fa l'acqua posta d'intorno al vaso pareggia il peso d'un volume d'acqua eguale ai due indicati volumi. Aperto il vaso da qualsivoglia parte ed occupato d'acqua lo spazio, che per l'innanzi n'era vuoto, la forza che fa l'acqua posta d'intorno per entrare e sostenere lo stesso vaso diventa minore appunto di tanto quanto è il peso dell'acqua introdotta, e perciò a mantenere l'equilibrio richiedesi tanto peso di più dall'altra parte della bilancia, quanto è il peso dell'acqua che entrò nella boccetta, o nel vaso aperto da qualunque delle sue faccie.

11 Il peso dell'acqua nell'acqua si manifesta con la pressione che esercitano gli strati superiori negl'inferiori, la quale è tanto maggiore quant'è maggiore l'altezza del fluido, e produce effetti corrispondenti ne' corpi immersi e cedevoli, o compressibili. Per dimostrare coll'esperienza questa verità, ho intrapreso di confrontare il peso d'alcuni corpi immersi appena sotto la superficie dell'acqua, col peso loro, mentre erano immersi alla profondità di sei piedi sotto la stessa superficie. Questo confronto fu da me fatto con un pesce, un pezzo di carne di bue, un pezzo di lardo, un pomo, una vescica piena d'aria, ed un tubo di vetro chiuso dalla parte superiore, ed immerso coll'estremo inferiore aperto nell'acqua. A tutti ho attaccato un pezzo di piombo, onde nell'acqua fossero preponderanti. Il peso che ebbero calati a sei piedi

fu in tutti maggiore di quello, che mostravano immersi poco sotto la superficie del fluido, ond'è palese che i loro volumi si sono scemati, e quindi, che essendo minore il volume d'acqua scacciato dal suo luogo scemavasi meno il peso totale del corpo immerso.

12 Quindi si può asserire con certezza, che il corpo d'un pesce o d'un animale qualsivoglia secondo la varia profondità, alla quale è immerso nell'acqua, essendo più o meno premuto, è anche più o meno diminuito di volume nelle sue parti cedevoli, come sono le carni ed il grasso; e che se esso sia pesante poco più dell'acqua, quando è immerso appena sotto la superficie del fluido, diviene relativamente sempre più pesante secondo che più s'affonda. Diminuito così il volume non s'altera, nè si difforma sensibilmente la sua figura, ma apparisce simile a quella che ha nell'aria, sebbene effettivamente si alteri, atteso che il volume del capo e del torace, che sono ossei, non cede, e la diminuzione si fa soltanto nelle parti molli e capaci di condensazione.

Fig. IV

13 Calando nell'acqua per mezzo d'un filo, e tenendo sospesa una vescica chiusa e piena di mercurio, essa prende quella figura che compete al suo peso ed alla cedenza delle sue pareti, e la mantiene a qualunque profondità sia calata. Se s'introduca un cannello di vetro nella vescica, e questa vi si legghi d'intorno strettamente, il mercurio si solleva nel cannello all'altezza che corrisponde alla profondità dell'immersione. In questa facile esperienza è da notarsi, che l'acqua esercita nella vescica una pressione indicata dall'altezza del mercurio nel cannello: sicchè AB di mercurio s'equilibra con DB d'acqua: e se degli altri cannelli sorgessero da b , B , il mercurio s'alzerebbe in a , α allo stesso livello di A , e diminuirebbero il volume della vescica similmente, attese le compressioni eguali in tutti i punti. Nè per quanto si moltiplicassero i cannelli si varierebbe AB , posto che la superficie dell'acqua restasse in CD , e che la capacità della vescica fosse maggiore di quella de' cannelli presi insieme. E perciò sebbene la colonna d'acqua che preme in c sia maggiore di quella che preme in b , e la corrispondente colonna di mercurio $a b c$ sia maggiore della AB , sono però egualmente premuti i punti $B C$, perchè essendo equilibrato il mercurio tra $B b$, la pressione in c è eguale

ad $ab = AB$. Per la qual cosa mi sembra meno esatta l'osservazione di *Gravesande* (Elem. Phys. § 1469), che quando un solido è immerso in un fluido a grande profondità, la pressione nella parte superiore appena differisce dalla pressione nella parte inferiore; sicchè i corpi immersi profondamente nell'acqua sian premuti da ogni parte quasi egualmente. Si deve dire invece che sono da ogni parte premuti con esatta eguaglianza, mentre a ciò che manca, per la disuguaglianza d'altezza delle colonne di fluido esterno prementi, supplisce la mole del corpo immerso o per la sua continuità, o per la sua resistenza nascente dalla coerenza delle sue parti e dalla sua figura, e fa lo stesso effetto delle colonne di mercurio equilibrate in Bb .

14 Consideriamo in fatti il caso d'un corpo molle, o d'un corpo vuoto e tenue compresso dall'acqua. Riposti in una vescica piena d'acqua un guscio d'uovo vuotato per un piccolo buco, otturato poi con cera, un globo di vetro vuoto e di tenui pareti, un pezzo di cera molle di qualsivoglia figura, un pesce, un girino, indi chiusa con forte legame la vescica si metta in un vaso cilindrico proporzionato, e di robuste pareti. Sopra la vescica s'aggiunga quanto peso piace che preme sulla sezione orizzontale del cilindro. La pressione di 200 libbre e più ancora non danneggia punto nè schiaccia gli animali, nè il guscio d'uovo, nè il globo di vetro, che dentro si contiene, nè altera la figura del pezzo di cera molle. Se il corpo immerso vuoto e fragile come il vetro sia della figura di un cilindro a base piana e bastantemente ampia, è certo che la pressione a certo grado accresciuta cederà e si romperà; come appunto accade, se alla macchina pneumatica s'applichi un recipiente cilindrico con base piana e non conformata a campana, mentre quello dopo poche estrazioni d'aria si rompe: la campana resiste per quanto si continuino l'estrazioni. Quando la superficie premuta è piana, le parti vicine al mezzo cedono più di quelle vicine alla circonferenza, e trovando sotto di sè spazio non resistente cedono: ma quando la superficie è convessa e di sostanza rigida, essa non può cedere in un punto senza che il punto vicino s'innalzi, ed il vicino egualmente premuto dal primo non può innalzarsi. Non può avvicinarsi

una parete del guscio d'uovo alla sua opposta, senza che la figura del guscio si dilati, ed a questa dilatazione resiste la pressione che s'esercita in que' punti che dovrebbero discostarsi. Realmente però non è eguale la pressione che il guscio d'uovo soffre in tutti i punti dall'acqua che lo circonda: giacchè in *c* soffre maggior pressione di quello che in *m* o in *B*. Qualora dunque la forza di coerenza del guscio basti a sostenere la differenza nascente da *bc*, lo schiacciamento non può accadere per quanto s'accresca la forza dell'acqua premente. Quanto poi al pezzo di cera molle che non muta figura o agli animali immersi che non soffrono danno dalla pressione dell'acqua, se queste masse si considerino come composte di materia a un dipresso uniforme, e siano atte a diminuirsi di volume per la compressione, esse si diminuiranno senza cambiamento della loro figura, poichè sono precisamente al caso della vescica di mercurio, nella quale il punto *B* è premuto come il punto *c*, quello dalla colonna *AB*, questo dalla colonna *ab*, mentre per la differenza *bc* essa è equilibrata dalla contrapressione di *Bc*. La figura del corpo, che s'immerge nell'acqua, o si muta perchè le di lui parti non avendo alcuna coerenza tra di loro, per la gravità loro non sostenute cadono, o se le sue parti sono coerenti, punto non s'altera dalla cresciuta uniforme esterna pressione. Quando si getta un fluido nell'acqua, con la quale non sia mesabile, prende esso una figura dissimile da quella che aveva cadendo, secondo che richiede la gravità delle sue parti, e la tenacità o viscosità loro. Se nel cadere s'addensì, come farebbe del sago liquido che si versasse nell'acqua fredda, conserva la forma che prende, e la continuità della massa prodotta equilibra le differenze *bc* tra le pressioni in *B* ed in *c*.

15 Per la ragione che abbiamo sopra indicata § 3 e seg. non bisogna confondere l'effetto della pressione de' fluidi col peso de' medesimi esplorato con la bilancia. Si fa dai Fisici questa sperienza. Appeso ad una bilancia per mezzo d'un manico abbastanza lungo un bicchiere non affatto pieno d'acqua si mette in equilibrio con un contrappeso. Dall'alto d'uno stante fisso sulla tavola sporge orizzontalmente un braccio di legno fissato allo stante, e dall'estremo del brac-

cio discende un cilindro di legno, immobile. Si dispone la bilancia per modo, che il cilindro si possa immergere nell'acqua contenuta nel bicchiere, l'equilibrio si turba e prepondera il bicchiere, nel quale l'acqua s'innalza. Per restituire l'equilibrio bisogna aggiungere alla bilancia tanto contrappeso, quanto è il peso dell'acqua, che si dovrà versare nel bicchiere, onde s'innalzi allo stesso segno, a cui è innalzata per l'immersione del cilindro. Ma se il cilindro, invece d'essere annesso al braccio fisso orizzontale, sia attaccato al manico del bicchiere, in questo caso l'equilibrio resta il medesimo e senza alterazione di contrappesi, o che il cilindro sia fuori, o che sia immerso nell'acqua. In questo secondo caso senza veruna alterazione di peso, la pressione nel fondo del bicchiere s'accresce coll'immersione del cilindro, ma questo accrescimento non si manifesta sulla bilancia. Ed è appunto lo stesso, come accade se un uomo stando sul suolo preme una delle due lancie della bilancia posta in equilibrio, oppure preme la stessa lancia, mentr'egli è sulla medesima collocato. Quindi, se il cilindro fissato al braccio orizzontale s'immerga alla stessa misura in un vaso di grande o piccola capacità messo in equilibrio alla bilancia, farà sempre eguale l'aumento del peso per restituire l'equilibrio dopo l'immersione, ma la pressione nel fondo sarà molto diversa e relativa all'altezza a cui sarà asceso il fluido per l'immersione del cilindro.

16 Corrisponde a questa l'altra esperienza, che se sullo stesso fondo circolare sieno eretti successivamente tre vasi d'eguale altezza, uno cilindrico, uno conico divergente, l'altro conico convergente, ed il fondo sia mobile, sicchè possa abbassarsi ed alzarsi scorrendo con moto parallelo a sè stesso senza lasciar fortire l'acqua di cui si riempiano, la pressione sul fondo sarà in tutti eguale, ancorchè i pesi dell'acqua contenuta ne' vasi sieno molto diversi tra di loro. Nel cilindrico la pressione è eguale al peso di tutta l'acqua: nel vaso conico divergente all'insù, tutto il volume d'acqua che eccede la misura del cilindro è sostenuto dai lati del vaso inclinati all'infuori, nel vaso conico convergente all'insù, ogni punto dei lati del cono fatti di materia resistente opera come il cilindro di legno affisso al manico del bic-

chiere, e senza accrescere il peso accresce la pressione sul fondo, per quanto l'acqua s'innalza. E che di fatto non accresca il peso scorgesi ad evidenza, mentre istituendo questa esperienza, il vaso conico divergente all'insù ed il cilindrico resistono al contrappeso, che equilibra la pressione sul fondo; ma il vaso conico convergente non resiste ed è sollevato dal contrappeso, sicchè bisogna ritenerlo con una forza fisso alla tavola, sulla quale si fa l'esperienza.

17 Da queste osservazioni facilmente s'intende come una nave di qualsivoglia peso galleggiante sul mare, non accresca la pressione sul fondo del mare ad essa sottoposto, più che l'acqua che v'era da prima nel luogo della nave. Perchè la nave occupa nell'acqua un luogo eguale al volume d'acqua, che pesa quanto essa, e che discaccia dal luogo suo. E poichè l'acqua scacciata non aumenta l'altezza del mare in tutta la sua estensione comunicante, non vi sarà pressione maggiore nel fondo sottoposto alla nave stessa.

18 Così ancora le nuvole sospese nell'atmosfera e galleggianti per la loro gravità relativa minore di quella dell'aria non pesano affatto nelle regioni inferiori: perciocchè sono sostenute ed equilibrate dalle colonne d'aria poste d'intorno, e l'altezza dell'atmosfera troppo insensibilmente si può innalzare per l'aggiunta de' volumi delle nuvole, attesa la libera comunicazione in tutta la sua estensione.

19 *Leibnizio* per ispiegare le variazioni del barometro prima che cada la pioggia e mentre cade, pensò che le nubi ed i vapori rendessero più pesante l'atmosfera prima di cadere, e nell'atto di cadere, non esercitando più il proprio peso sull'aria, questa premesse meno il barometro.

20 Sul primo alluato non si è mossa alcuna difficoltà, ancorchè si potesse per quello che abbiamo poc'anzi notato. Sul secondo produsse egli un'ingegnosa esperienza, la quale appartiene alle presenti nostre osservazioni, e che non ho per anche veduto compiutamente spiegata. Abbiasi un tubo del diametro di tre pollici, e lungo circa piedi quattro, ripieno d'acqua. e s'appenda all'estremo dell'asta d'una bilancia. Dal manico del tubo, o dall'estremo dell'asta penda per un filo un globo di piombo, il quale sia appena immerso sotto la superficie dell'acqua del tubo. Facciasi l'equili-

brio: indi si tagli o s'abbruci il filo dal quale pende il globo: nel tempo della discesa del globo si turba l'equilibrio, e prepondera il contrappeso, e giunto il globo al fondo, l'equilibrio si restituisce. L'illazione è, che il globo nell'atto di discendere non pesa sulla bilancia, e che perciò lo stesso dee dirsi de' vapori, quando raccolti in gocce discendono nell'atmosfera, che perciò non premono, ond'essa gravita meno nel mercurio del barometro.

21. Ora considerando l'esperienza stessa, indipendentemente dall'applicazione, che ne fece l'Inventore, s'offervi essere verissimo che mentre un corpo discende non può esercitare veruna forza per la sua gravità sopra un altro corpo, col quale non abbia alcuna connessione. Se l'esperimento s'istituisse nel tubo occupato soltanto dall'aria, non vi sarebbe alcuna meraviglia per la preponderanza del contrappeso, perchè il globo non avendo alcuna connessione col tubo, o con la bilancia, allorchè è rotto il filo, non può ne' medesimi esercitare alcuna azione.

22. Ma il caso è diverso, quando nel tubo v'è l'acqua, per cui il globo deve aprirsi la strada discendendo ed esercitando una pressione. Se si faccia forgere dall'ima parte del tubo un cannello di vetro più alto del tubo stesso, nel quale l'acqua si metterà allo stesso livello, esso serve d'indice per vedere, come l'acqua sia premuta nell'atto della discesa del globo. In fatti essa s'innalza notabilmente sopra il livello, che aveva nello stato di quiete.

23. Se il filo da cui pende il globo non sia annesso al manico del tubo o all'estremo dell'asta della bilancia, ma ad un braccio fisso, onde la bilancia non sia punto gravata dal peso del globo nello stato d'equilibrio, allora tagliato o bruciato il filo, nell'atto che cade il globo per l'acqua, il tubo prepondera, e molto più quando il globo è giunto al fondo. Che se il tubo sia occupato soltanto dall'aria, allora mentre il globo cade l'equilibrio non si turba, ma bensì propondera il tubo, quando il globo è giunto al fondo.

24. Per ispiegare questi fatti bisogna distinguere la pressione dal peso. Quando il globo pende dal manico del tubo esso aggrava la bilancia con tutto il suo peso, e l'aggrava nello stesso modo se sia o non sia immerso nell'acqua.

Allorchè discende per l'acqua, ciò succede per l'eccesso del suo peso sopra quello d'un pari volume d'acqua, che ascende mentre il globo cade. Non grava dunque con tutto il suo peso la bilancia, e perciò prepondera il contrappeso. Quando il globo pende dal braccio fisso, non accresce peso alla bilancia o immerso o no che sia nell'acqua del tubo. Tagliato o bruciato il filo s' aumenta il peso del tubo di tanto quanto è il peso d'un volume di acqua pari al volume del globo: ed inoltre s' aggrava la bilancia di quella parte di peso, che preme sulla bilancia stessa discendendo, onde prepondera il tubo.

25 Per vedere poi, come il peso cadente non aggravi di tutta la sua quantità la bilancia, si osservi il seguente fatto di Statica. Se ad un filo avvolto ad una carrucola s' appendano due pesi disuguali, e la carrucola col filo e pesi s' appenda ad una bilancia, e si faccia equilibrio, indi sollevato il peso maggiore sino alla carrucola si lasci cadere, sicchè sollevi il minore, nel tempo della discesa l'equilibrio si turba e prepondera il contrappeso. In questa esperienza non preme sull'asse della carrucola e per conseguenza nella bilancia la parte di peso che cade, e preme quella che non cade. Se i due pesi siano p, q , la parte, che non cade e preme è $\frac{4pq}{p+q}$, e la parte che cade e non preme è $\frac{(q-p)^2}{p+q}$ (Vedasi *Desaguliers Cours de Physique Not. sur la Leç. III. pag. 171*) Lo stesso accade al globo che discende per l'acqua, una porzione del quale cadendo non preme, l'altra preme nella bilancia.

Se $q = 11$ peso del globo di piombo, $p = 1$ peso d'un pari volume d'acqua, la parte di peso che non cade e preme farà eguale a $3\frac{2}{7}$, e la parte che cade e non preme farà eguale a $8\frac{2}{7}$.

26 E perciò quando il globo pende dal manico, e tagliato il filo cade, lo sbilanciamento deve farsi per quella parte che cadendo non preme, cioè il tubo deve riuscire più leggero di $8\frac{2}{7}$, quindi deve preponderare il contrappeso, e re-stituirsi l'equilibrio, allorchè il globo è giunto al fondo. Quando poi il globo pende dal braccio fisso, e tagliato il filo cade, primieramente deve renderli preponderante il tubo, perchè vi si aggiunge un volume equivalente nel peso
ad

ad un pari volume d'acqua. In fatti se il globo fosse della stessa gravità specifica dell'acqua, tagliato il filo, esso non discenderebbe, ma la bilancia ne sentirebbe il peso, ed il tubo si renderebbe preponderante. Nell'atto poi di cadere la parte premente la bilancia è, come nell'altro caso, $3\frac{2}{7}$, e la non premente è $8\frac{1}{7}$. Ma la premente non avendo contrappeso che la equilibri fa preponderare dalla stessa parte la bilancia. E ritornando alla speriienza della carrucola, questo secondo caso sarebbe come se il peso maggiore annesso al filo non avesse contrappeso nella bilancia, mentre allora sicuramente la bilancia stessa prepondererebbe nell'atto della discesa dalla parte della carrucola.

27 L'indice, nel quale s'alza l'acqua nell'atto della caduta del globo, dimostra la pressione, che s'esercita dall'acqua nel fondo del tubo, la quale non si deve confondere coll'effetto del peso nel produrre lo sbilanciamento. Il globo pendente dal braccio fisso immerso nell'acqua innalza la superficie dell'acqua, accresce la pressione sul fondo, e non turba punto l'equilibrio a cui siasi messo il tubo ripieno d'acqua senza il globo immerso. Se il fondo del tubo fosse mobile, e potesse scorrere parallelo a sè stesso, dimostrerebbe con la sua discesa, o con la forza occorrente per impedirla, la pressione che s'esercita sul suo fondo, per l'acqua innalzata coll'immersione del globo. Così ancora dimostrerebbe l'effetto della pressione nascente dal globo cadente, e che si fa strada per l'acqua: ma sì l'uno che l'altro effetto niente turbano la legge d'equilibrio del tubo col suo contrappeso. Lo stesso deve dirsi dell'innalzamento dell'acqua che si osserva nel cannello, il quale è un effetto della pressione sul fondo del tubo, che niente altera la legge del suo equilibrio col contrappeso. Così se un uomo con una tromba ed uno stantuffo fosse posto in equilibrio sopra una bilancia, ed agitando lo stantuffo facesse ascendere l'acqua in un tubo comunicante con la tromba, l'equilibrio punto non si turberebbe.

28 La varia altezza a cui forge l'acqua nel cannello è un effetto della proporzione che passa tra la sezione del tubo e quella del cannello tanto nella sua origine, quanto nel suo progresso. La forza premente del globo che discende è

Tot. 17

Yyy

la stessa, quando le due sezioni del tubo e del cannello nella sua origine siano le medesime. Ma se il cannello dalla stessa sezione o forame aperto nel fondo del tubo sorgerà cilindrico, o conico divergente o convergente, riuscirà diversa l'altezza a cui l'acqua s'innalzerà nel cannello sopra il suo primo livello: perchè la stessa quantità d'acqua cacciata fuori dovendosi conformare in figure così diverse sulla stessa base, produrrà altezze differenti. Laonde l'altezza a cui si solleva l'acqua nel cannello non è misura della pressione che soffre il fondo, ma soltanto un indizio, il quale però dimostra perchè la bilancia non ne risenta alcuna alterazione, mentre all'azione del grave premente all'ingiù corrisponde eguale azione in senso opposto dell'acqua spinta all'insù.

29 Inoltre questa pressione sul fondo sarà diversa a misura che il globo sarà maggiore, o minore rispetto alla sezione del tubo, o che invece della figura sferica si darà al corpo che discende una figura conica cilindrica o altra che sia, e l'osservazione dell'altezze a cui s'alza l'acqua nel cannello, difficile per altro da farsi con esattezza, potrebbe mostrare le varie resistenze che soffrono i corpi discendenti per l'acqua, dipendentemente dalla loro figura. Finalmente se ritenendo il medesimo tubo e globo facciassi che il cannello abbia il medesimo diametro del tubo, l'innalzamento dell'acqua nel cannello stesso sarebbe insensibile, eppure la forza esercitata dallo stesso globo cadente nel fluido, da cui nasce la pressione, sarebbe la stessa.

30 Induce questa osservazione a pensare quanto importi la proporzione de' forami al fondo de' vasi, per regolare la velocità dell'acqua che dai medesimi esce, e l'altezza a cui può salire. In fatti quando ad un vaso ripieno d'acqua si toglie d'un tratto il fondo, la pressione dell'acqua contenuta nel vaso è nulla sopra quella che esce, e tutte le parti del fluido discendono col moto nascente dalla gravità liberamente esercitata, e perciò eguale. Ma quando invece di togliere il fondo s'apre in esso un forame, la pressione dell'acqua superiore sull'inferiore non è della colonna d'acqua insistente sopra il forame, ma di tutta quella che è contenuta nell'ampiezza del vaso, come ne fa certa prova l'abbassamento uniforme di tutta la superficie del fluido. La re-

cente teoria di M. *Bernard* (*Nouveaux Principes d'hydraulique*) è la più soddisfacente ch'io trovi sino ad ora a spiegare i fenomeni di questa classe , sopra i quali si fonda gran parte dell'Idraulica. Il fluido contenuto nel vaso opera premendo con la sua gravità , mentre è aperto il forame , nello stesso modo come un grave posto sopra un piano inclinato , la di cui altezza alla base abbia la proporzione dell'ampiezza del forame alla proporzione di fondo che rimane non occupata dal forame. Quando la base del piano inclinato è nulla , cioè che il forame occupa tutto il fondo , la pressione del grave cadente sul piano è nulla : e il fluido cade per la sola sua gravità , quando la base ha una proporzione insigne all'altezza , allora la pressione è grande . Si deduca a confronto lo spazio percorso in un dato tempo dal fluido in un vaso cilindrico in questa ipotesi de' piani inclinati , e la massa di fluido così discesa si trasformi in un cilindro la di cui base sia eguale all'area del forame , l'altezza che ne risulterà farà lo spazio percorso dal fluido nel dato tempo , cioè l'altezza a cui potrebbe ascendere . Se l'area del fondo sia 30 , quella del forame sia 1 , l'altezza del vaso sia 15 , si troverà l'altezza del getto , o lo spazio percorso dal fluido eguale a $29\frac{1}{2}$. Se l'area del fondo sia 30 , il forame 29 , l'altezza del vaso sia = 15 , si troverà lo spazio percorso $14\frac{1}{2}$.

31 Questa verità , che pure è di fatto , fu conosciuta per molto tempo , anzi *Gicard* (*Hist. Reg. Acad. Paris. lib. 1 Sect. 3 Cap. 4*) intraprese di dimostrare coll'esperienza che l'ampiezza del vaso e del fondo contribuiva poco o molto ad alterare la quantità d'acqua ch' esce da un forame aperto nel fondo stesso . *Daniele Bernoulli* (*Hydrodyn. Sect. 5. §. 4*) vide sagacemente , che non si poteva trascurare la proporzione dell'area del fondo a quella del forame , e de-

dusse dai suoi principj la formula $b = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$, nella quale

b esprime l'altezza corrispondente alla velocità con cui l'acqua esce dal forame , n l'area del forame , m l'area del fondo , a l'altezza dell'acqua nel vaso . In questa formula però supposto n infinitamente piccolo , diventa $b = a$. che corrisponde all'esperienza : ma supposto $m = n$, b diviene

Y y ij

infinita, che è una conseguenza troppo lontana dal vero, e dalla realtà, perciocchè la forza, per cui l'acqua discende, quando il fondo è distrutto, è realmente la forza di gravità, che non esercita veruna pressione sul fluido sottoposto.

32 Ho voluto riscontrare coll'esperienza, se corrisponda al fatto la teoria dedotta dalle varie pressioni del fluido contenuto in vasi di diverso fondo ed aperti con lo stesso forame. Si sono preparati due vasi parallelepipedici alti pollici 40, di base quadrata, una del lato di linee 102, l'altra del lato di linee 30. Il fondo di ciascheduno de' detti vasi è munito d'una grossa lastra d'ottone, nella quale è aperto un forame circolare del diametro di linee 18, il di cui contorno è solcato a vite. A questo forame s'applica una lastra circolare col contorno solcato a vite simile alla precedente. In questa lastra rotonda assottigliata nel mezzo è aperto un forame circolare del diametro di linee 6. Si ha inoltre un'altra simile lastra rotonda col contorno solcato a vite perforata nel mezzo con buco circolare del diametro di lin. 6, esternamente munito d'un tubo cilindrico dello stesso calibro lungo lin. 10, ed internamente munito d'un imbuto che dall'ampiezza del forame s'espande ad un cerchio del diametro di lin. 16. Ciascheduna di queste due lastre si può applicare a ciascheduno de' mentovati due vasi, onde il forame per cui esce l'acqua sia precisamente lo stesso nell'esperienze di confronto. La proporzione dell'area de' forami all'area del fondo nel vaso maggiore è di 200 : 1, nel minore di 17 : 1 prossimamente. Empiuti successivamente detti vasi, e mantenuti pieni, facendo versar l'acqua sempre dallo stesso uomo, con pari avvertenza, nascente da molta abitudine (il che equivale a qualsivoglia artificio, che immaginar si possa per l'uniformità del riempimento) si è raccolta e misurata l'acqua che in pari tempo uscì da ciaschedun vaso per lo stesso forame.

I. Dal vaso maggiore per il forame aperto nella lastra assottigliata nel tempo di 30 minuti secondi si sono raccolte d'acqua - - - - - lib. 32 $\frac{1}{4}$

II. Dallo stesso, per il forame munito di tubo e d'imbuto, nello stesso tempo, si sono raccolte d'acqua lib. 45.

III. Dal vaso minore, per il forame, come nell'Esp. I.,

nello stesso tempo, si sono raccolte d'acqua - - lib. 30 $\frac{1}{2}$

IV. Dallo stesso vaso, per il forame, come nell'Esp. II.,
nello stesso tempo, si sono raccolte d'acqua - - lib. 42 $\frac{1}{2}$

33 E' certo che la quantità d'acqua, la quale uscirebbe libera affatto dagli effetti della contrazione della vena, sarebbe maggiore di quella, che si è raccolta nell'esperienze suddette. Tolgono in gran parte gli effetti stessi, il cilindro esteriore, e l'imbuto interiore, di cui è munito il forame nell'esp. II. e IV., e quindi si scorge quanto notabile sia la differenza della quantità raccolta nello stesso tempo, a confronto di quella che si raccoglie nell'Esp. I. e III. Ma ciò, che importa all'oggetto nostro presente, è d'osservare, come costantemente dal vaso di base più ampia esca per lo stesso forame da pari altezza in pari tempo maggiore quantità d'acqua, di quello che dal vaso di base più ristretta. Differenza che ben si prevede, se si fondi un calcolo sull'assunto, che la gravità dell'acqua operi nel premere e sollecitare l'uscita per i forami aperti nel fondo del vaso non liberamente ma con forza diminuita in quella stessa proporzione in cui si diminuisce la sollecitazione d'un grave posto sopra un piano inclinato, la base del quale all'altezza abbia la proporzione dell'area del fondo non occupata dal forame all'area del forame. Onde si raccoglie che la pressione idrostatica non cessa giammai, ma soltanto si modifica con certe leggi, nel produrre l'uscita e la velocità de' fluidi che escono dai forami discendendo, o zampilliando, o elevandosi in tubi aggiunti: e queste leggi dipendono dalla proporzione tra l'aria del fondo e quella del forame, posta l'altezza pari.

34 *Danielle Bernoulli* (*Hydrodyn. Sect. XII*) esaminò con particolare studio le leggi di pressione, ch'esercitano i fluidi nelle pareti de' vasi o tubi, per i quali scorrono, e chiamò idraulico-statica questa considerazione, che a dir vero sembra sublime e nuova. Se per un tubo il quale derivi da un vaso mantenuto pieno d'acqua, e sia d'un tratto spezzato, esca l'acqua con la velocità corrispondente all'altezza a , e prima che fosse spezzato l'acqua esca da un'apertura minima fatta nel tubo stesso con velocità corrispondente all'altezza b , la pressione dell'acqua nelle pareti del tubo farà $a-b$. Sicchè, se per qualche combinazione avvenga

che b sia maggiore di a , la pressione del fluido nelle pareti del tubo farà negativa, cioè non farà dal fluido nelle pareti, ma da queste in quello, e si cangierà in succhiamento. Una tale combinazione si ha nel caso seguente. Abbiassi un vaso $ABFG$, dal fondo del quale discenda il tubo DE conico divergente; si mantenga pieno, e la pressione dell'acqua nel punto D , per la teoria dell'Autore, sarà espressa dalla formula $c - \frac{m^2 a}{n^2}$: nella quale l'area del forame $E = m$, la

sezione del tubo in $D = n$, l'altezza dell'acqua sopra $E = a$, e l'altezza sopra $D = c$. E' manifesto, che la suddetta formula in questo caso esprime una quantità negativa. Quindi deduce egli, che se dal punto D discenda un tubo DL , e s'immerga nell'acqua, mentre quella del vaso discenderà per E , ne ascenderà dell'altra da L in D e caderà per E , atteso che la pressione negativa diventa succhiamento. L'esperienza corrisponde, mentre fatto il tubo conico DE lungo 4 pollici, il forame E di 5 linee di diametro, D di 4, l'altezza BA di pollici 18, BD di 19, DL di 10, e mantenuto il vaso pieno d'acqua, mentre essa discende per E , se n'alza per LD , e discende per DE .

35 Questa teoria e questa sperienza sembrano confermarli a vicenda, sicchè non si possa negarvi l'assenso, e non pertanto lasciano nella mente una certa dubbiezza, che non si può vincere, principalmente per la strana frase di pressione negativa, e perchè non si scorge quale connessione aver possa una forza, che per qualsivoglia direzione s'eserciti sulla parete d'un tubo conico rigido, col movimento d'ascesa dell'acqua per il tubo laterale LD . Ommettendo di riferire gli studj fatti da molti, per rischiarare questo argomento, addurrò soltanto le mie osservazioni e pensieri. Primieramente la formula sopradotta porta in conseguenza, che mantenendo le altezze medesime c a , s'avrà sempre pressione negativa e succhiamento qualunque sia la proporzione di m ad n , purchè m sia maggiore di n . Ma ciò non combina affatto all'esperienza. In secondo luogo lasciando n c come sono, ed allungando soltanto il tubo conico, sicchè s'accresca a ed m . dovrebbe il succhiamento farsi da maggiore altezza, cioè con forza maggiore: il che parimente non com-

bina coll'esperienza. In terzo luogo, se il tubo conico non fosse piantato verticalmente, ma uscisse dal vaso con direzione orizzontale del suo lato inferiore, non dovrebbe farsi la pressione negativa o fucchiamento, perchè in questo caso a sarebbe eguale a c , e per quanto m fosse maggiore di n , non vi sarebbe accelerazione più in m che in n , atteso che l'altezza da cui dipende la velocità è la medesima: eppure col fatto succede il fucchiamento.

36 Io non mi tratterrò qui a considerare gli elementi della teoria Bernulliana, dai quali è dedotta la suddetta formula, lo che troppo mi allontanerebbe dall'intenzione d'esaminare e d'investigare la cagione d'un fatto, il quale non combinando in tutte le sue modificazioni con la formula, avvisa già non essere gli elementi stessi conformi alla verità fisica. Ad oggetto pertanto di sviluppare il meccanismo di questo fenomeno, ho istituito la seguente breve serie d'esperienze.

37 *ABFG* è un vaso di vetro cilindrico dell'altezza di poll. 18 del diametro di poll. $3\frac{1}{2}$. Esso è circondato a ciascun estremo d'una fascia di lastra d'ottone, nel bordo della quale è scolpita una vite. Una serve per adattarvi un fondo d'ottone: l'altra per adattarvi un cilindro di vetro simile al primo, onde avere doppia altezza di vaso. Nel mezzo del fondo d'ottone è aperto un forame circolare del diametro di lin. 4. Intorno a questo forame è aderente alla superficie esterna del fondo un anello schiacciato d'ottone del diametro di dieci linee, concentrico al forame, col contorno interiore scolpito a vite, onde adattarvi i cannelli, de' quali si dirà. Un altro anello simile è aderente all'interna superficie del fondo. Il vaso di poll. 18 è mantenuto pieno d'acqua, e si nota con un cronometro a minuti primi, secondi, e terzi il tempo nel quale si riempie un vaso della capacità di lib. 20. Sebbene alcune dell'esperienze qui registrate non servano immediatamente all'oggetto, pure siccome erano nella serie e possono servire ad altre considerazioni, si riportarono.

I. Dal forame nudo aperto nel fondo Tempo. 0.50".20

II. Dal forame munito esternamente d'un tubo cilindrico d'ottone, calibrato alla sezione del fo-

rame, lungo pollici 4. Questo tubo, come i seguenti, s'adatta al fondo del vaso con base fatta a vite, che s'unisce all'anello. - - - - - 0.39".19

III. Dal forame munito del tubo precedente, allungato coll'aggiunta d'un altro eguale in lunghezza e calibro - - - - - 0.41.26

IV. Dal forame munito esternamente del cilindro, come al n. 2, ed internamente d'un imbuto o cono tronco, la base minore del quale è eguale al forame, la maggiore è del diametro d'un pollice, l'altezza d'un pollice - - - - - 0.35.59

V. Dal forame munito del tubo come al n. 2, ed internamente d'un imbuto d'altezza doppia, e doppia espansione della sua base maggiore - - - 0.35.56

VI. Dal forame munito di tubo cilindrico esteriore, dal quale all'altezza *DR* di linee 10 discende un tubo *DL* lungo poll. 12, del diametro di una linea e mezza aperto nell'aria - - - - - 0.39.24

chiuso il tubo laterale con cera in *L* - - - - - 0.39.22

immerso il tubo laterale in un vaso d'acqua alla profondità di 6. pollici - - - - - 0.39.23

In questa sperienza l'acqua non esce per il tubo laterale, nè entra mai ascendendo, nè la vena d'acqua si altera punto chiudendo, o lasciando aperto nell'aria l'estremo *L*. Se mentre l'acqua discende per *E* si chiuda il forame *E*, essa discende per *L*, e lasciando libero *E* continua a discendere per *L*. Ma vuotato il vaso interamente, e di nuovo riempito per ripetere l'esperienza, l'acqua esce per *E* e non per *L*. Se questo tubo cilindrico si allunghi a quadrupla lunghezza, l'acqua nel discendere esce spontaneamente dal tubo laterale.

VII. Dal forame munito di tubo esterno conico tronco, la di cui sezione minore è del diametro di lin. 4, precisamente eguale al forame, e la sezione maggiore è del diametro di linee 5. Il tubo è lungo pollici 4. - - - - - 0.28.31

Dal punto *D* di questo tubo lontano lin. 10 dal punto

punto *R* parte un tubo tenue del diametro di poco più d'una linea, il quale discende per 12 pollici sino a *L*. Questo tubo laterale nell'Esper. presente era chiuso con cera all'estremo suo inferiore.

VIII. Dallo stesso forame munito dello stesso tubo esterno, e dell'imbuto interno, come al n°. IV, col laterale chiuso come nella Sper. prec. - - o. 21".4

IX. Dallo stesso forame munito dello stesso tubo esterno, e dell'imbuto interno, ma col laterale aperto nell'aria - - - - - o. 28.32

X. Dallo stesso forame munito, come nell'Esper. preced., ma col tubo laterale immerso nell'acqua o. 20.47

L'acqua è ascesa per il tubo laterale all'altezza di poll. 14 da *L* in *D*. Il tubo *DL* è immerso in un vaso del diametro di due pollici ripieno d'acqua, il livello della quale va abbassandosi a misura che essa è alzata e trasfusa in *DE*. Convenne perciò aggiungere a *DL* un tubo di vetro per allungarlo, giacchè l'altezza *LD* riuscì di poll. 14, nè l'acqua si potè innalzare da maggiore profondità.

Quando il tubo laterale si lascia aperto nell'aria, mentre l'acqua esce per il conico verticale, scorge si la vena mescolata con molte bolle d'aria, rumorosa nel cadere, e gorgogliante. Chiudendo col dito il tubo laterale, o immergendolo nell'acqua, la vena comparisce unita e liscia.

XI. Dal forame munito di tubo conico simile al precedente e tre tubi laterali *DZ* chiusi con cera all'estremità inferiori, e l'imbuto interno o. 24. 32

XII. Dallo stesso con i laterali immersi nell'acqua o. 24. 3
l'acqua è ascesa per tutti tre i laterali all'altezza di circa pollici 14.

XIII. Dallo stesso con i laterali aperti nell'aria o. 28. o

XIV. Il vaso *ABFG* si è fatto d'altezza doppia cioè di pollici 36. Dal forame nudo come al n. I. o. 38. 35

XV. Dal forame munito come al n. VI. di tubo cilindrico - - - - - o. 29. 13

XVI. Dal forame munito di tubo esterno conico

Tom. V.

Zzz

come al n. VII., col laterale chiuso di cera - - o. 19". 34

XVII. Dal forame munito come nella precedente
col tubo laterale immerso nell' acqua - - - o. 19. 29
l' acqua è ascesa dalla profondità *LD* di poll. 20.

XVIII. Dallo stesso aggiungendo l' imbuto interno o. 16. 32
l' acqua è ascesa per il laterale dalla profondità
DL di poll. 24

Se si mantenga sempre pieno allo stesso modo il vaso in cui s' immerge il tubo laterale, la solita quantità d' acqua si raccoglie in tempo eguale a quello, che si osserva se il tubo laterale sia chiuso.

XIX. Allo stesso vaso si applicò orizzontalmente lo stesso tubo conico dell' esperienze precedenti, ed internamente vi si è apposto il solito imbuto. Per far ciò, e per l' esperienze relative all' uscita dell' acqua dai forami aperti nei lati dei vasi, si ha un vaso di metallo alto 5 pollici, il quale si può adattare al vaso di vetro in luogo del solito fondo. Nella parete di questo vaso di metallo è aperto il forame di lin. 4 di diametro, e sono applicati alla sua superficie esteriore ed interiore gli anelli sopra descritti, per apporvi i tubi e gl' imbuti soliti. Servono anche questi anelli per adattarvi delle piccole lastre col contorno a vite, e traforate con buchi di varia grandezza per le sperienze di questo genere. S' inclinò il vaso per modo, che il lato inferiore del tubo conico aggiunto riuscisse orizzontale. All' estremo del tubo laterale, che in questa esperienza riusciva pressochè orizzontale, s' adattò un cannello di vetro verticale, che si è immerso nell' acqua. Per questo l' acqua è ascesa dalla profondità di poll. 20.

XX. Al solito forame del fondo s' applicò un tubo conico lungo poll. 4, ma tale, che la sua sezione maggiore è del diametro di linee 10: e perciò la proporzione tra le aree del forame e dell' estremità del cono era di 16: 100. Parte da questo tubo il laterale *DL*, per il quale non ascende mai acqua, mentre discende per *DE* da qualsivoglia altezza di vaso. La quantità d' acqua che si raccoglie è poco maggiore di quella che in pari tempo esce dal forame nudo.

XXI. Si è allungato con un tubo aggiunto di 4 pollici il tubo conico adoperato al n. VII., sicchè formava un tronco

conico lungo pollici otto; non si osservò, nè differenza nel tempo per raccogliere la data quantità d' acqua, nè che l'acqua s'innalzasse da profondità maggiore di quella a cui s'innalzava adoperando il solo tubo conico lungo poll. 4.

XXII. Se il tubo laterale del conico n. VII. sia di vetro, e s'immerga nel mercurio, questo s'alza nel laterale più o meno secondo la velocità e quantità dell' acqua che esce dal conico.

XXIII. Se il tubo laterale di vetro si faccia assai lungo e si immerga nell'acqua, questa s'innalza fino a certo segno, e resta sospesa, ma non passa nel tubo *DE*, se *DL* non sia di lunghezza minore dell' altezza a cui si sostiene per la velocità e quantità di quella che esce per *DE*.

XXIV. Se il tubo laterale di vetro si faccia passare per un turaccio di sughero, col quale sia chiusa una bottiglia piena d'acqua, sicchè sia impedita ogni pressione dell'aria esterna nell'acqua della bottiglia, questa non passa mai da *LD* in *DE*, qualunque sia la velocità e quantità di quella che passa per *DE*.

XXV. Se il tubo apposto al forame sia conico convergente all'ingiu, ed abbia un laterale, l'acqua esce sempre per ambedue i tubi.

38 Se si considerino queste sperienze, si rende manifesto che il fenomeno di cui si tratta non altro esprime, che un vuoto relativo, o una rarefazione dell'aria mescolata coll'acqua nel tubo verticale conico, la quale dà occasione all'aria esterna di preponderare premendo sull'acqua, in cui è immerso il tubo laterale, e di farla per esso salire. Come poi succeda questa rarefazione, mi pare che si spieghi soddisfacentemente in questo modo. Quando l'acqua esce per il forame nudo, viene in minor copia in pari tempo di quello che per il forame munito del tubo cilindrico esterno, e per questo in minor copia di quello che per lo stesso munito dell'imbuto interno. Dipende ciò dall'aderenza dell'acqua alle pareti del tubo cilindrico, la quale distrugge in parte l'effetto delle direzioni oblique con cui uscendo l'acqua dal forame nudo diminuisce e contrae la sezione della vena. Quando poi s'aggiunga l'imbuto interiore, non si distrugge soltanto, ma si previene e s'impedisce che le parti

dell'acqua nell'uscire vengano con direzioni tanto oblique, e perciò in pari tempo se ne raccoglie quantità maggiore. Quando s' appone il tubo esterno conico divergente, i di cui lati divergano con certa proporzione, o ritenendo l'imbuto interno, o no, si raccoglie dallo stesso forame in pari tempo quantità maggiore di quello che dal tubo cilindrico, come facilmente si rileva dal confronto dell'Esp. II e VII, IV e VIII. E' questo un indizio, che l'uniformità di sezione nel tubo cilindrico, per la sua aderenza alle pareti, produce qualche resistenza all'acqua che cade, resistenza che, per l'allontanamento successivo de' lati del conico, in questo non incontra. Di fatto scorgeti al n. III che il tubo cilindrico allungato dà la solita quantità d'acqua in tempo più lungo di quello che il tubo più corto. Questa resistenza è la cagione del fenomeno notato al n. VI. L'acqua forzata ad uscire per il laterale del tubo cilindrico, continua a vuotarsi per esso, anche se si schiuda *E*, e dimostra ch' esercita verso l'origine del tubo laterale una pressione, che di per sè non bastava a determinare l'uscita del fluido, ma che determinata coll' aver chiuso il tubo *E* continua poi per l'aderenza delle parti dell'acqua tra di loro e con le pareti del tubo laterale. Quindi se il tubo cilindrico sia assai lungo, mentre l'acqua per esso discende, passa anche nel laterale, come si notò al n. VI, appunto come fa quando il tubo è conico convergente all'ingiu, e si notò al n. XXV.

39 La stessa quantità d'acqua che passa per l'area del forame, passa altresì per qualsivoglia sezione orizzontale del tubo cilindrico. Così ancora la stessa quantità che passa per l'area del forame passa per ogni sezione orizzontale del tubo conico divergente all'ingiu, sebbene in questo secondo caso sia maggiore che nel primo. Nel tubo cilindrico la quantità di fluido occupa similmente le sezioni successive del tubo, che sono eguali: non così nel cono, dove le particelle dell'acqua in ciascheduna sezione che si dilata debbono essere più discoste tra di loro, di quello che nella precedente più ristretta. Si formano dunque tra le dette particelle degl' intervalli, i quali faranno occupati dall'aria mescolata già coll'acqua, e per tale dilatazione ed espansione del luogo, dove prima si conteneva, resta più rara. Quindi l'aria esterna pre-

Fig. 1.

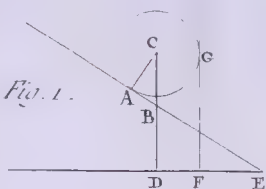


Fig. 2.

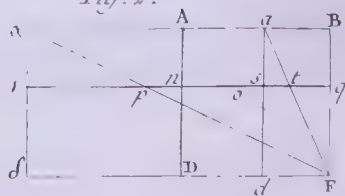


Fig. 3.

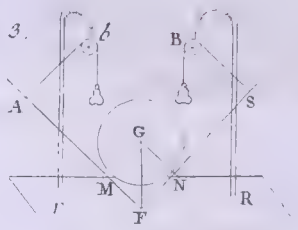


Fig. 4.

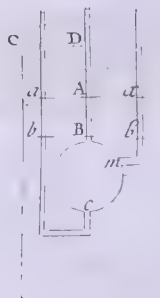
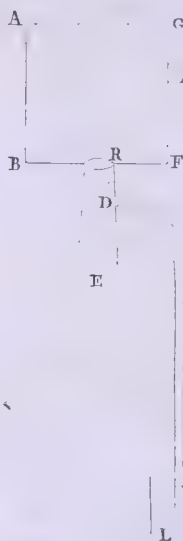


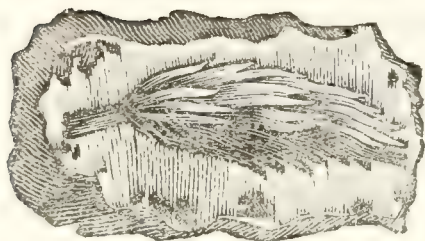
Fig. 5.



mente sulla superficie dell'acqua, nella quale è immerso il tubo laterale, non trovandosi all'equilibrio con quella che si contiene ne' mentovati intervalli, fa ascendere l'acqua nel tubo laterale a tanto maggiore altezza, quant'è maggiore lo sbilanciamento. E se il tubo laterale è aperto nell'aria, la medesima entra ed ascende, fa gorgogliare la vena mescolandovi le sue bolle, e ritarda la velocità del fluido che esce per *E*, come si osserva al n°. IX.

40 Generalmente quando le due pareti d'un mantice si discostano tra di loro, tanto è più forte l'irruzione dell'aria nello spazio compreso tra le due pareti, quant'è più diligentemente chiusa d'intorno la cassa del mantice. Del pari quanto più esattamente è adattato ad una tromba lo stantuffo, tanto maggiore è la sua efficacia a sollevare l'acqua. Nel caso nostro ciò, che può diminuire il grado di rarefazione dell'aria negl'intervalli mentovati, è l'introduzione della medesima per la base inferiore del tubo conico, qualora essa sia troppo ampia, e l'aderenza delle parti dell'acqua tra di loro non basti a tenerle unite in tanta distanza; il che appunto succede, se il tubo conico sia troppo divergente, come si osservò al n°. XX. Ma inoltre, se la cassa del mantice non sia perfettamente chiusa, o se lo stantuffo non sia adattato con somma esattezza ed esquilito contatto alla tromba, la rarefazione d'aria che si produce con queste macchine è comparativamente tanto maggiore, quant'è maggiore la velocità con cui esse s'agitano. Così nel caso nostro quanto più veloce è l'uscita dell'acqua, o per l'altezza del vaso, o per l'aggiunta dell'imbuto e del tubo, o per tutte queste combinazioni prese insieme, tanto è maggiore in ogni istante la rarefazione dell'aria negl'intervalli considerati, tanto minore l'effetto di quella che cerca sempre d'introdurli e d'insinuarli per di sotto nella vena di fluido, tanto maggiore lo sbilanciamento dell'aria atmosferica preponderante, e tanto maggiore l'altezza a cui l'acqua s'innalza da *L* a *D*. Corrispondono a questo meccanismo i fenomeni XIX, XXII, XXIII, XXIV, e se mal non m'appongo si rende ragione in questo modo d'ognuna delle osservate particolarità. Quindi si rinunzia volentieri alla frase di pressione negativa, la quale non reca un'idea chiara, nè come

da principio si diceva, dà alcuna connessione tra l'effetto dell'acqua che discende per un tubo rigido verticale, e di quella che ascende per il laterale. E perciò il fenomeno invece d'essere idraulico statico è realmente idraulico pneumatico. (*)



(*) Nota del Sig. Cavalier Lorgna. Mi compiaccio moltissimo di vedere avvalorata da quella del reputatissimo Sig. Co. Stratico l'opinione, che ho sostenuta vent'anni fa intorno a questo curiosissimo sperimento Bernoulliano. Sin dal 1769 in una Dissertazione coronata dall'Ac. A di Mantova, e pubblicata in quella Città sopra la pressione dell'acqua, ho non senza fondamento considerato il fenomeno come idraulico-pneu-

matico (pag. 18, 19), ed ho attribuito l'ascesa del liquore alla preponderanza dell'aria esterna sull'acqua in cui è immerso il cannello laterale. In fatto non sembra che a forze ipotetiche e negative convenga dar luogo per spiegarlo, come sapientemente il riflette il Sig. Co. Stratico, mentre l'effetto è naturale, se ben si estimi, e si riduce a quello dei sifoni.

DELLA MANIERA

DI FAR SERVIRE L' ELETTROMETRO ATMOSFERICO
PORTATILE (*) ALL' USO DI UN IGROMETRO
SENSIBILISSIMO.

MEMORIA

In cui si rischiarano molte cose intorno al trascorrimiento
del fluido elettrico ne' Conduttori imperfetti

Del Sig. DON ALESSANDRO VOLTA.

§ I.

*C*ome dal poco vigore dell'elettricità eccitata colle ordinarie macchine, e meglio dalla più pronta dissipazione della medesima può giudicarsi dell'umidità dell'ambiente.

Non v'è alcuno, il quale si sia qualche poco familiarizzato colle sperienze elettriche, che non conosca la grandissima influenza, che hanno l'umido e il secco sulla forza e sulla durata dell'elettricità eccitata colle ordinarie macchine; e che non giudichi più o meno così all'ingrosso al primo porvi mano della maggiore o minore umidità dell'ambiente. Con quale stento, se il tempo e il luogo, ove si sperimenta, sono molto umidi, si perviene ad eccitare una forte elettricità, comunque sia in buon ordine la macchina? E come presto la smarriscono i conduttori, per quanto sembrano

(*) Questo elettrometro sensibilissimo, e comodissimo inventato già da *Tiberio Cavallo*, e migliorato in appello da *Saussure*, da *Bennett* e da noi pure, è omai reso comune, consiste in due mobilissimi pendolini sospesi entro una boccetta di cristallo ad un cappellet-

to metallico, sopra del quale si adatta all'uopo una picciol'asta o verghetta parimenti metallica. Vegg. le *Trans. Fil.*, e le mie *lettere sulla meteorologia elettrica* interite nel Giornale di Pavia intitolato *Biblioteca fisica d'Europa*, Lett. 1. 2. e 3.

bene isolati? Essa se ne va via e per l'aria vaporosa, e per l'umido velo che ricopre i sostegni isolanti, siano questi di vetro nudo, o intonacato di buona lacca, o d'altra vernice resinosa.

Questa dissipazione dell'elettricità ci porge, a ben riflettere, un indizio meno equivoco dell'umido che regna, di quello ce l'offra il giuoco stesso della macchina più o meno indebolito; conciossiachè il buono o cattivo stato e adattamento de' cuscini, dell'amalgama, ed altre circostanze influiscono troppo considerabilmente sulla forza dell'elettricità che si eccita; laddove riguardo alla durata della medesima in un dato conduttore isolato in una data maniera (es. gr. in una sfera, o cilindro di ottone sospesi a un cordoncino di seta, o sorretti da una colonnetta di vetro, o di cera-spagna) non v'è d'ordinario che l'umido dell'ambiente, e quello contratto dal sostegno isolante, che scemar possa tale durata dell'elettricità, ossia accelerarne la dissipazione.

Ecco dunque la prima e la più ovvia maniera di fare delle sperienze igrometriche col mezzo dell'elettricità. Abbiasi un conduttore metallico di discreta mole montato sopra un candeliere isolante, e munito ad una sua estremità di un buon elettrometro di *Henley* ossia *Quadrante-elettrometro*, e posto tal conduttore isolato in luogo discosto da altri conduttori, e infusavi una determinata dose di elettricità non molto grande, come sarebbe di 20 o 25 gradi del detto elettrometro, notisi quanto tempo passa prima che il pendolino suo sia caduto intieramente, o che è meglio, abbassato siasi fino a un dato punto, es. gr. a 5 gradi. Se l'aria è secca molto, lo si vedrà sostenersi per più minuti, ed anche qualche ora; all'incontro se è molto umida, alcuni secondi solamente: anzi ove l'isolamento sia di vetro nudo, e per forte non della migliore specie di vetro, avverrà ne' tempi e luoghi estremamente umidi, che si abbatta il pendolino del tutto in uno o due secondi, ed anche meno. Però è che truovo molto meglio, siccome per tutte le altre sperienze elettriche, così particolarmente per quelle di cui ora si tratta, d'impiegare un qualche migliore isolamento, servendomi a tal uopo di bastoni di vetro coperti di più mani di buona vernice d'ambra, o incrostati di ottima ceralacca:

ho allora il vantaggio, che anche nell'estrema umidità riman teso ossia sollevato di alcuni gradi l'elettrometro, annesso al conduttore in tal guisa isolato, per più secondi dopo ricevuta l'elettricità; ma ho da un'altra parte l'incomodo, che di troppo lunga durata è poi questa elettricità infusavi, ogniquale volta l'aria non è gran fatto umida, e molto più nel gran secco, sostenendosi allora dei quarti d'ora, e delle ore intiere.

Il tempo pertanto compreso tra alcuni secondi, ed una o più ore, forma in queste sperienze la *scala igrometrica*: la quale, come si vede, è di una grandissima estensione; tale anzi, che diventa sommamente incomoda e impraticabile, niuno per avventura ritrovandosi, che volesse condannarsi per una semplice prova igrometrica di questo genere ad un'osservazione sì lunga e noiosa. In oltre è d'uopo dell'arredo di una macchina elettrica, o di un buon elettroforo per ogni volta, e dovunque voglia instituirsi una simile sperienza; ciò che la rende oltre modo imbarazzante: sicchè, anche per questo, chi mai vorrebbe intraprenderne una serie? Sperienze di questa sorte, che non sono (lo confesso io medesimo) di una grandissima importanza, si tralascian piuttosto che eseguirle a costo di tanto tempo e di tanti preparativi.

E' vero, riguardo al tempo, che esso può accorciarsi di molto, promovendo e sollecitando la dissipazione dell'elettricità, mercè di toccare il conduttore, che la contiene, con un altro cattivo conduttore, ma pur conduttore, cioè con un corpo mezzo tra deferente e coibente (es. gr. con una sottil canna bene stagionata, con un bastoncino di legno secco, con una striscia di cuojo, o di cartone, con una funicella o semplice filo di refe, con una corda di minugia ec.) mercè, dico, di toccare quel conduttore elettrizzato con siffatti corpi, e tenervi applicato un capo di essi mentre la mano impugna l'altro capo. Con ciò facendosi strada all'elettricità nel conduttore per trasferirsi nel suolo, comunque strada ella sia più o men difficile, se ne accelera di molto il decadimento e la dissipazione; e v'è anzi pericolo di un acceleramento troppo grande, a segno di fare svanire total elettricità a un tratto, se l'ambiente, e quindi i cor-

pi semi-coibenti sopra menzionati espositivi, trovinsi più che mediocrementemente umidi.

Ad evitare pertanto siffatta perdita troppo precipitosa dell'elettricità, egli è molto spediente di tener unita al conduttore isolato una boccia di Leyden carica, sicchè abbia a scaricarsi essa pure mercè l'indicato tocco fatto col bastoncino di legno, colla striscia di cuojo, o di cartone ecc.: scarica, la quale, attesa la grande capacità di tali boccie, anche picciole, non può compiersi così ad un tratto; ma esige un tempo discreto di alcuni minuti cioè primi o secondi, giusta la natura di tali imperfetti conduttori, la loro mole sì in lunghezza che in larghezza o grossezza, e la quantità d'umido che contengono.

§ II.

In che modo scaricandosi il fluido elettrico per la via di conduttori imperfetti trascorra per essi; e quanto influisca alla maggiore o minore difficoltà e lentezza del tragitto la lunghezza, e la larghezza de' medesimi.

L'umidità è tra tutte una condizione, che moltissimo influisce alla celere o tarda trasmissione dell'elettricità; ed è quella che ci siam proposti di più diligentemente esaminare, per farne l'utile applicazione già accennata, Comechè però la maggiore o minore facilità e prontezza di un corpo non perfettamente deferente a portar via l'elettricità, onde son carichi sia un semplice conduttore metallico, sia una boccia di Leyden, in ragione del maggiore o minor grado di umidità di esso imperfetto deferente, e quindi dell'ambiente cui è stato ed è attualmente esposto, costituisca l'oggetto principale delle presenti nostre ricerche, non vogliam tralasciare di osservare qualche cosa anche intorno all'altra condizione sopra indicata della lunghezza e grossezza di quel qualunque deferente imperfetto, che vien impiegato a dissipare gradatamente la carica elettrica.

Cominciando dunque dalla lunghezza, facilmente s'intende che quanto essa sarà maggiore, maggiore ancora, cioè più continuata riuscendo la resistenza, che incontra il flu-

do elettrico nello trascorrere questo più lungo tratto di strada non del tutto libera, nel penetrare da un capo all'altro un tal corpo difficilmente permeabile (che è ciò che vuol dire cattivo conduttore, deferente imperfetto), dovrà del pari essere più lungo il tempo impiegato a vincere siffatta resistenza, a superare tali maggiori ostacoli. Non per questo però dobbiam conchiudere con troppa fretta, che una lista di cartone, di cuojo, d'avorio, una funicella di canape, una verghetta di legno ecc. di doppia e di tripla lunghezza, ci mettano appunto un tempo doppio e triplo a sottrarre e disperdere col lor tocco l'elettricità, di cui sia carico un conduttore, od una boccia di Leyden: l'esperienza, che sola può decidere anche qui, come in tante altre cose, mi ha fatto vedere che non ha luogo tal giusta proporzione; cioè che la lunghezza del tempo resta indietro dal calcolo, non però moltissimo. Così se una striscia di cuojo es. gr. lunga un piede porti via la carica di una boccetta di Leyden, a segno di farla cadere da 25 gradi del quadrante elettrometro a 5 gradi, in tempo di 30 secondi; un'altra simile striscia lunga il doppio, cioè due piedi, impiegherà a fare lo stesso non già il doppio di tempo, che farebbe un minuto primo, ma notabilmente meno, cioè da 45 in 50 secondi solamente.

Molte sperienze in vero si richiederebbero, e fatte colla maggiore circospezione e accuratezza, per determinare di quanto precisamente cresca il tempo che vi vuole, acciò una data quantità e forza di elettricità venga rapita ad un conduttore, o boccia, mediante il tenervi applicata l'estremità di un dato cattivo conduttore, che tieni per l'altra estremità in mano; per determinare, dico, di quanto precisamente cresca il tempo all'uopo richiesto, secondochè, tutte le altre cose pari, codesto imperfetto conduttore ti tiene più lungo: e siccome i risultati verosimilmente varierebbero per le differenti specie di essi imperfetti conduttori, quali sono i crini e le penne (sebbene questi più alla classe de' coibenti, che a quella dei deferenti appartengano), ogni fatta di pietre, tranne le preziose (che trovansi anch'esse per lo più veri coibenti), tutti i legni, gli ossi, i cuoj, e la carta, e i fili di lino, di canape, di cotone, e l'acqua indurata in

ghiaccio, e infine, eccetto solo i metalli, tutti i corpi che non sono molto inzuppati d'umido; siccome, dico, per ciascuno di questi imperfetti deferenti varierebbero probabilmente i risultati riguardo alla proporzione, onde colla rispettiva lunghezza cresce il ritardo portato alla trasmissione dell'elettricità; così richiederebbesi niente meno che una serie di sperienze per ciascheduno. Or quelle, che fino ad ora ho fatto, sebben molte sian, è ben lungi che bastino. Posso dunque dire soltanto ciò che ho raccolto in generale e all'ingrosso; ed è: che una doppia lunghezza porta un ritardo di tempo maggiore di un terzo, e sovente più (come nell'esempio sopra recato si prolungano i 30 secondi a 45, o 50); ed una lunghezza tripla un ritardo prossimamente doppio, e piuttosto maggiore.

Venendo ora alle altre dimensioni, non così tosto per avventura giudicherassi, che una maggiore grossezza della verghetta di legno, della funicella di canape, della corda di minugia, oppure una maggiore larghezza della lista di cartone, di cuojo, d'avorio ecc. influisca cotanto a promuovere ed accelerare la dissipazione della carica elettrica, che fanno cotesti corpi col loro toccamento; e più d'uno sarà sorpreso dicendogli io (ciò che coll'esperienza può facilmente verificare) che se una listerella di balena, di cartone, od altra simile, di una data lunghezza, abbia tale grossezza e larghezza, es. gr. di un pollice, sicchè impieghi, mediante il sopra indicato contatto, 45 secondi a distruggere una data carica elettrica; adoperandosi un'altra simile listerella e dell'eguale lunghezza, ma larga il doppio, cioè due pollici, impiegherà circa un terzo meno di tempo, val a dire da 30 secondi, a fare lo stesso; e la metà solamente, ed anche meno, cioè 20 secondi all'incirca, se sia di larghezza tripla.

Anche qui è ben lungi che si possa ancora determinare con precisione la differenza, che induce la maggiore o minore grossezza e larghezza dei cattivi conduttori nel tempo che impiegano a portar via, mercè il loro toccamento, una certa dose di elettricità; e nulla ancora sono in istato di aggiugnere a ciò che ho esposto all'ingrosso: solamente farò osservare, che più assai della grossezza contribuisce al celere

trascorrimiento del fluido elettrico la larghezza del deferente imperfetto che si porta al contatto della boccia o d'altro corpo elettrizzato; talchè, dove una striscia di cuojo o di carta di tre pollici es. gr. in larghezza impiegherà solo la metà di tempo d'un'altra simile larga un pollice, e quindi di massa tre volte minore; una carta tripla in grossezza, ed un cuojo similmente triplo, ma dell'istessa larghezza, cioè di un sol pollice, accelereranno sibbene anch'essi la dissipazione dell'elettricità, ma non già tanto quanto la carta e il cuojo tripli in larghezza, anzi pochissimo in confronto: e così pure un cilindretto di legno, ed una cordicella a budello, oppure di canape, di doppio diametro, e quindi di massa quadrupla, non porteranno tanta differenza, che arrivi a doppio men tempo impiegato nella esauritione della data quantità di elettricità; quando parrebbe che dovessero portarla anzi maggiore tale differenza, ed affrettare la cosa di più, sendochè per una doppia celerità basta, come si è qui sopra veduto, un aumento solamente triplo di massa, se questo sia in larghezza.

La cosa, che veniamo di osservare, parmi degna di molta considerazione: poichè sebbene già si sappia, e le sperienze tutto di ci comprovino, che la capacità di contenere l'elettricità vuolì misurare non dalla massa de' conduttori, buoni o cattivi che siano, ma dalla loro superficie, e sì dalla *superficie libera*; qui nel caso nostro non si tratta di elettricità contenuta, e diciam così stagnante, la quale appunto nella sola superficie de' corpi vien confinata, ma di quella ch'è in attual moto, e trascorre realmente da un capo all'altro penetrando tutto l'interno de' corpi. Adunque pare che dividendosi, come le allegate sperienze evidentemente dimostrano, in molti rivi il fluido elettrico, che per tai cattivi conduttori tragitta, investendo tutte, diciam così, le fibre di essi, come altrettanti canaletti; dovrebbe la facilità sua di scorrere, e la celerità di questo suo tragitto essere in proporzione del numero di tai canaletti, e però in ragione della massa del corpo deferente. Or come va, che l'evento non corrisponde, osservando noi che viene assai più facilitata ed accelerata la trasmissione dell'elettricità per l'accrescimento di superficie, massime estesa in largo, che per quello

della massa, assai più per la larghezza che per la grossezza? Convien dunque dire, che quel fluido elettrico, che tragitta pel cattivo conduttore, scorra più volentieri lungo essa superficie, che per l'interiore del corpo; sebbene anche per questa interna via non poco se ne trasmetta, il che è indubitato.

E', dissi, indubitato che del fluido elettrico, il quale si scarica pe' deferenti massime imperfetti, sebbene il più scorra sulla superficie di essi, pur ne trapassa anche per l'interno: in prova di che, lasciando da parte infinite altre sperienze, basta la sopra indicata delle tre listerelle di carta, le quali sovrapposte l'una all'altra e strette insieme, se non abbreviano di metà il tempo entro cui, mediante il lor tocco, si traduce e si dissipa una data carica elettrica, come lo abbreviano di metà, ed anche più, quando si uniscano esse lateralmente filo a filo, o che è lo stesso, si prenda una sola lista della stessa carta egualmente lunga, e tre volte larga; ie, dico, le tre listerelle sovrapposte e strette insieme non abbreviano fino a ridurlo a metà il tempo, che s'impiega da una sola e semplice a trasmettere una data quantità di elettricità, lo abbreviano ad ogni modo notabilmente.

Del resto le due proposizioni poco sopra avanzate, cioè che più agevolmente scorra il fluido elettrico sulla faccia de' conduttori imperfetti, che non per entro a' medesimi, e che la porzione che pur tragitta per l'interno e si divide e si dirami in quanti rivi più può, sono l'una e l'altra già da molto tempo note e dimostrate, ove si tratti di una scarica repentina e copiosa di tal fluido; e sì la seconda comprovata singolarmente dal non potersi effettuare la scarica istantanea di una boccia di Leyden, e quindi produrre la commozione, per una sottile striscia o filo d'acqua, la qual acqua si ha pure per un conduttore, se non perfetto come i metalli, passabilmente buono, e nè anche per un cilindretto della medesima grosso alcune linee, per poco che sia lungo: laddove una scarica più o men istantanea, più o meno completa, eccitatrice della solita commozione, si ottiene dandole passaggio per una più grossa, o meglio più larga lamina d'acqua, per un più grosso cilindro, insomma per un'ampia mole della medesima. Dal che manifestamente si vede, come una grossa piena di fluido elettrico, la

quale però tragitterebbe facilissimamente e senza alcun sensibile ritardo per un filo metallico sottilissimo, trovasi invece come in angusto alveo impedita e ritardata in una lamina o cilindro d'acqua largo più linee; ma che poi scorre bastantemente libera e quasi senza ritardo per un canale assai più grosso della stessa acqua. Diciamo dunque che questo fluido elettrico allorchè è in copia non tragitta per l'acqua unito e ristretto in un sol filo; ma in più fili o rivi si divide e scomparte, quanti gliene offre l'acqua, che è sul suo passaggio. Che se ciò fa nell'acqua, la quale, dopo i metalli e certi carboni, è il miglior conduttore, quanto più lo dee fare per gli altri corpi, che sono deferenti molto più imperfetti? Abbiain già veduto che in questi si divide anche una non tanto copiosa dose di tal fluido; e vedremo ben tosto che lo fa eziandio una picciolissima.

Riguardo allo scorrere il fluido elettrico provocato alla scarica più agevolmente sulla superficie che per l'interno degli stessi imperfetti conduttori, e fin dell'acqua stessa, ciò pure si manifesta, riguardo alle grandi piene di esso fluido, dalla viva e fragorosa scintilla, che compare nelle grosse scariche, e solca la faccia de' medesimi; formata tal scintilla, come si vede, dalla maggior quantità di esso fluido (non però da tutta), che schiva di penetrare que' corpi, ancorchè deferenti discretamente buoni, come per es. le membrane fresche e succose, i legni ancor verdi, e l'acqua medesima. Ma ciò, come si è già detto, non succede che nelle grandi scariche, quando il grosso torrente di fluido elettrico, perciò appunto che è troppo grosso, trova minore ostacolo e difficoltà a scorrere rasente la superficie del corpo, smovendo e spezzando l'aria contigua, di quello ne incontri a tragittare per l'interno dello stesso corpo, il quale, in qualità di non perfetto conduttore, gli oppone una resistenza tanto appunto maggiore, quanto più copioso è esso fluido, che incalza per passare tutto ad un tratto. Quando dunque la scarica non è così grande e poderosa, o quando pure essendolo, l'imperfetto conduttore che la provoca (o forma una parte dell'arco scaricatore) eccede una competente lunghezza, non iscorgesi allora cotesto salto della scintilla sulla di lui faccia; e la scarica nulla di meno con, o senza com-

mozione, che vuol dire più o meno pronta, si effettua, secondo cioè che quel tal corpo è più o meno deferente. Diremo pertanto che in questo caso tutto il fluido elettrico passi per l'interno del corpo, e niente sulla superficie? Non già: una buona dose anzi ne scorre sopra questa, ma diffusa e ripartita in modo, che non ispezza punto l'aria, nè la smove, ciò che al scintillare è richiesto; mentre il resto parimenti ripartito permea l'interno corpo.

Così dunque avviene nelle mie sperienze, con cui provo- co la scarica non molto forte di una boccia di Leyden, o di un semplice conduttore, mercè il toccar questo o quella con un capo di una verghetta di legno, di una riga d'avorio, di una striscia di cuojo, di cartone ecc. più o meno lunghe e larghe, e più o meno umide, delle quali tengo in mano l'altro capo: avviene cioè, che tale scarica si faccia trascorrendo il fluido elettrico in gran parte comechè invisibile sulla superficie di tali corpi, e in parte sotto e per entro; e dividendosi qui e là, quanto più può, in molti rivi: e che essa scarica si compia non già in uno o pochi impercettibili istanti, bensì in un tempo notabile di più secondi, ed eziandio di alcuni minuti primi; per essere quei corpi, qualora non trovinsi molto umidi, assai poco deferenti.

Intorno alle quali sperienze opportuno mi sembra di osservare, che se si concepisce pur facilmente con un poco di riflessione, come dovendo tragittare una copia considerabile di fluido elettrico per un corpo non molto permeabile, quali sono i conduttori imperfetti, si divide esso e scomparte, per incontrare nel totale una minore resistenza, in molti rivi; non si sarebbe per avventura creduto, nè forse io medesimo immaginato avrei e creduto, se l'esperienza non mel mostrava, che l'istesso succedesse anche ad una picciolissima quantità di questo fluido. Ma pure è così: allorquando la carica, o di un conduttore semplice, o di uno unito a qualche boccia di Leyden, è così debole, che non se ne può ottenere scintilla sensibile, bastando essa appena a vibrare di 10, o 12 gradi l'elettrometro sensibilissimo di *Cavallo*, cioè a far divergere i pendolini di 5, o 6 linee; anche allora una lista di carta, di cuojo, di balena ecc. che sia più larga, o assai più grossa, ma singolarmente più larga, offre più facile

le e più sollecito passaggio a questa cotanto debole elettricità sicchè giunge a dissiparla in più breve tempo, di quello faccia un'altra lista in tutto il resto eguale, ma più stretta, o molto più sottile. Il che mostra ad evidenza, come anche la scartissima dose di fluido elettrico, che se ne va via in ciascuno dei molti istanti, pe' quali dura il disfacimento di così picciola elettricità, che se ne va via, dico, condotta da quell'imperfetto deferente, vi s'incammina e scorre non già ristretta ed unita in un sol filo, ma bene diffondendosi a tutta la larghezza di tal corpo, e investendone tutti quanti i fili; non altrimenti che a gran larghezza di acqua si diffonde (come abbiain veduto, e già si sapeva) un grosso torrente dello stesso fluido elettrico, per procacciarsi un più libero e pronto tragitto. Se però questo scomparto di una gran piena di fluido elettrico non cagiona punto di meraviglia, e si concepisce pur bene che così debbe avvenire; non può per lo contrario non cagionarne il vedere, come una quasi infinitamente picciola quantità dello stesso fluido, con una forza di espandersi che è appena sensibile, pur cerca anch'essa un'ampia via per tragittare, prendendo quanto più può il largo nello scorrere pe' conduttori imperfetti: la qual cosa non che essersi prima d'ora dimostrata, non si farebbe, torno a dire, per avventura creduta.

§ 3.

Sostituzione del semplice elettrometro atmosferico portatile agli altri apparati composti e voluminosi per le sperienze igrometriche indicate nel § 1 : e come debbasi procedere per farle nella nuova maniera.

Ritornando ora dopo questa lunga, ma non inutile digressione, all'influenza, che ha lo stato più o men umido de' corpi imperfettamente deferenti, perchè più presto o più tardi si portin via, mediante il lor toccamento, l'elettricità di qualsiasi conduttore o boccia; e ripigliando il discorso della facile applicazione, che può farsene all'igrometria, nel modo indicato nel § 1 ; mi giova richiamare quello che ivi ho proposto, essere cioè se non necessario, più che spediente di far intervenire una boccia di Leyden, almen piccio-

la; senza di che l'elettricità di un semplice conduttore, anche discretamente grande, si toglie mercè il contatto di quel qualunque imperfetto conduttore, che a tal uopo si adopera, in troppo brevi istanti, in un tempo quasi non misurabile, ove tal corpo (es. gr. legno, osso, carta, cuojo, od altro) trovinsi considerabilmente umido, e molto più se, come accade talvolta, lo sia all'eccesso. Ma se per questa parte è utile che s'unisca la boccia di Leyden al conduttore isolato, il qual comunica coll'elettrometro, acciò vi si sostenga per un tempo misurabile, cioè alcuni secondi almeno, l'elettricità provocata a scaricarsi col toccoamento d'uno o dell'altro di tai deferenti anche molto umidi; divengono per un'altra parte imbarazzanti tali prove a cagione degli apparati e preparativi necessarj, mentre appunto richiedesi oltre il resto anche una boccia di Leyden.

Ho dunque pensato a far senza di tutti questi apparati, cioè di macchina elettrica o di elettroforo, di conduttore, d'isolatore, di boccia; e ad eseguire le stesse prove elettricigrometriche col semplice elettrometro di *Cavallo* tascabile, con quel sì comodo e prezioso strumento, di cui facciam in oggi sì grand'uso, tanto per le osservazioni giornaliere intorno all'elettricità atmosferica, quanto per molte altre esperienze di elettricità artificiale. Quest'elettrometro, per poco che sia ben costruito, riceve prontamente l'elettricità da un bastone di ceralacca, il quale altronde si eccita con somma facilità mercè di stropicciarlo colla mano, con carta, contro le vesti non umide, ecc. riceve, dico, il nostro elettrometro di leggieri tanta elettricità quanta è necessaria a far divergere i suoi pendolini (sian questi semplici paglie alla mia maniera, sian listerelle di foglia d'oro alla maniera di *Bennet*, sian fili metallici terminanti in pallottoline di midollo di sambuco all'antica foggia di *Cavallo* e di *Saussure*) il più che diverger possono, cioè 6 8 10 linee, che segnano secondo la mia scala 12 16 20 gradi, e ad innalzarli anche di più, se il permette la capacità della boccetta in cui son chiusi: ricevuta la quale elettricità la conserva ell' elettrometro così bene, che trovati di non averla perduta ancor tutta a capo di parecchi minuti secondi, ancorchè stato sia lungamente, e continui a star esposto ad un'aria

sommamente umida, sol che non venga visibilmente bagnato. Or se l'elettricità sostienti, e i pendolini non giungono a cadere del tutto per più minuti secondi in un ambiente estremamente umido, che faranno in uno men umido, in uno anzi secco? E' facile l'immaginare che v'impiglierebbono uno, due, tre, quattro minuti primi, un quarto d'ora, ed anche una o più ore, se l'aria è secchissima, e secchissime quindi anche le pareti esterne della boccetta; e ciò è, che infatti succede.

Ma ecco di nuovo l'incomodo e il tedio di dovere star ad osservare troppo lungo tempo, per giudicare del grado di umidità dell'ambiente. Sebbene potrebbe abbreviarsi di molto questo tempo, tenendo conto di quel solo che impiegano i pendolini a discendere da uno ad un altro dato grado di elettricità, per esempio dai 12 ai 10 o agli 8 gradi. Ma che? facendoli così diverrebbe poi troppo breve il tempo, e quasi impercettibile qualunque volta l'ambiente si trovasse molto umido, abbassandosi allora i pendolini da 12 a 10 gradi in meno di un secondo.

In vista di ciò mi son rivolto anche pel nostro elettrometro allo spediente già spiegato ne' precedenti §§. del toccamento cioè da farsi con un conduttore imperfetto. onde affrettare l'uscita e l'estinzione dell'elettricità; mi son, dico, rivolto di nuovo a questo spediente; ma qui con miglior esito: giacchè col medesimo, anzi maggiore risparmio di tempo, ho ottenuto di lasciare una sufficiente elettricità tra i due estremi di grand'umido e di gran secco, e di facilitare sommamente le osservazioni di paragone. Ho dunque provato a sollecitare la dissipazione dell'elettricità indotta nell'elettrometro, mercè di toccare il suo cappelletto o la picciola asta metallica di cui è sormontato, con un corpo il quale non fosse nè coibente nè buon conduttore, e con varj di questi cioè di legno, carta, pergamena, cuojo, avorio, penne, larbe di balena, rese, serole, corni, corde di minugia, ed altri; ed ho veduto che la debbole elettricità dell'elettrometro (la quale in vero altro che debbole non può essere, e in niun modo scintillante) non veniva per tai toccamenti involata tutta, se non a capo di alcuni secondi; quand'anche l'ambiente, cui que' corpi stavano

esposti, era umidissimo; e a capo solo di molti secondi, e d' uno, due, tre minuti primi, quand'era l'ambiente molto secco; e corrispondentemente nelle mezzane umidità: con una differenza cioè molto notevole per ogni picciola varietà ne' gradi d'umido; nel che, come si dichiarerà meglio in appresso, consiste il merito principale di queste sperienze igrometriche.

Dapprima avea provato a tener applicato al cappelletto dell'elettrometro l'uncino di una boccetta di Leyden carica quanto basta per far tendere di 10 12 o 15 gradi i pendolini, cioè debolissimamente; e mi serviva allora per dissipare libbene poco a poco tal piccola carica, ma non tanto lentamente, che noiosa divenisse la sperienza, mi serviva o dei conduttori men cattivi tra li qui sopra accennati, od anche degli altri, ma ridotti in verghe o lamine di discreta grossezza e larghezza, e invece assai corte: la quale grossezza e larghezza massimamente fa sì che più presto trasmettano l'elettricità, ciò che fa ancora la minore lunghezza, come abbiamo mostrato nel §. 2. Avendo però trovato, che bastava armare l'elettrometro della sua asta metallica lunga due piedi o poco più, per formarne un conduttore di sufficiente capacità, e che bastava ridurre a listerelle sottili e molto strette la carta, la pergamena, la balena, la parte cornea di una penna da scrivere ecc. perchè col loro tocco non involassero troppo presto l'elettricità di tal elettrometro armato; fui ben contento d'aver così semplificate al maggior segno queste sperienze: per le quali si vede, che altro più non si ricerca che l'elettrometro tascabile colla sua verghetta metallica, un bastoncino di cera-spagna, ed una di cotali listerelle, lunga soltanto uno, due, o tre pollici, e larga da una a due linee.

Or acciò per ogni prova resti sempre la lunghezza medesima della listerella semicoibente che ho scelta, senza di che non potrebbero essere comparabili le sperienze, adatto a ciascuna estremità di essa listerella una sottil'unghia metallica (come mostra la qui annessa figura); delle quali unghie una, che fa ufficio di manichino, prendo tra due dita, e l'altra la porto a toccare il cappelletto o l'astina dell'elettrometro, e va la tengo applicata il tempo che bisogna.

Questa disposizione è anche vantaggiosa per ciò, che toglie che si tocchi colla mano il corpo medesimo semicoibente, sia penna, sia balena, sia carta, od altra materia; e che si cambj con ciò lo stato di umidità della medesima, pel calore di essa mano, per la traspirazione, ecc.

Ecco pertanto la maniera precisa, con cui fo l'esperienza. Assicuratomi che il mio elettrometro mantenga bene l'elettricità, cioè più d'un quarto d'ora dimorando in luogo discretamente asciutto, e un minuto almeno trasportato da questo luogo, o tirato fuori da tasca, ed esposto ad un ambiente il più umido che dar si possa (salvandolo solo da una pioggia che tutto lo bagna), lo elettrizzo col solito bastoncino di cera-spagna a segno, che i suoi pendolini di paglia (preferisco uno de' miei elettrometri a semplici paglie a quello di *Bennett* con fogliette d'oro, primieramente perchè non è bene, per le esperienze di cui si tratta, che sia troppo delicato, e con ciò suscettibile soltanto di debolissima elettricità; in secondo luogo perchè le paglie, non pregandosi come le dette fogliette, marciano con maggior precisione i gradi) elettrizzo, dico, il mio elettrometro tanto che i pendolini segnino 12 in 14 gradi, cioè le punte delle paglie si scostino una dall'altra 6 in 7 linee. Ciò fatto aspetto fino a che sian cadute da sè a 10 gradi giusti: allora tocco il cappelletto dell'elettrometro, o la verga metallica da cui è formontato, col corpo semicoibente che ho scelto per queste prove, cioè colla listerella di cartone, d'osso di balena, di penna, o qual essa sia, armata delle due unghie metalliche nel modo che ho sopra descritto; o a dir più giusto fo toccare, e tengo applicata a detto cappelletto o verghetta non la listerella propriamente, ma l'unghia metallica che essi porta in cima; e sto a vedere quanti minuti secondi passano prima che i pendolini, i quali cominciarono sul momento a decadere visibilmente, sianti abbattuti dai già detti 10 gradi a cui li trovavano immediatamente prima di tal toccamento, fino ai 2. Non aspetto che giungano a zero, perchè ci va più tempo ad estinguerli questi ultimi due gradi che per tutto il resto: e altronde è inutile; bastando per istituire il paragone la decadenza dai 10 fino ai 2 gradi.

Può farsi l'esperienza anche col semplice elettrometro non armato della verghetta metallica; ma allora essendo pochissima l'elettricità contenuta ne' soli pendolini e cappelletto, se ne va via troppo presto.

Riducendo ora in un sol punto di vista l'espressione e la teoria di queste ultime sperienze, è facile comprendere dal fin qui detto che il numero de' minuti secondi, pe' quali si sostiene l'elettricità, malgrado l'indicato toccamento, debb'essere maggiore: 1°. secondo che il corpo impiegato a portar via cotesta elettricità è di sua natura meno deferente: 2°. quant'egli è maggiore in lunghezza: 3°. quanto è minore in larghezza e grossezza (giusta ciò che riguardo a tali dimensioni abbiamo mostrato nel § 2.): 4°. finalmente a misura che trovasi più secco. E però, quando si determini la specie del corpo, e le sue dimensioni, resta per elemento variabile la sola umidità; e puossi per conseguenza giudicare dei gradi di questa dalla durata dell'elettricità nell'elettrometro, che viene col dato corpo toccato.

Quanto alle varie specie di corpi, moltissimi sono quelli, che ho sperimentati a questo intento; e non pochi mi han promesso sulle prime buona riuscita. Ho posti dunque al cimento tagliuoli di legno, paglie, e foglie secche. fili, e stoffe di lino, di canapa, di cotone, di lana, carta comune da scrivere, carta sciugante, e d'ogni altra qualità; varie membrane, e cuoj, e pergamene; corde a budello, setole, crini; ossi, unghie, corni, avorio, testuggine, balena, penne: ma qual per uno, qual per altro inconveniente ho abbandonati quasi tutti questi corpi; e ristretto mi sono oramai a tre o quattro soli, cioè la pergamena sottile, l'osso di balena, l'avorio, e la parte cornea e lucida delle penne; tra' quali non sono ancor deciso a cui dare la preferenza. Varj, come i legni e le paglie, i fili di lino ecc. molte membrane e cuoj, quasi tutti gli ossi, la carta, li ho rifiutati, perchè divenivano troppo deferenti per un umido, che s'accostava al massimo, a segno che involavano tutta l'elettricità dell'elettrometro in meno d'un minuto secondo, quando l'igrometro a capello di *Saussure* mancava ancora di alcuni gradi dal giungere ai 100, che è il punto che indica l'umidità estrema, quella en. gr. della nebbia. Alcuni

ni altri, e sono le setole e i crini, li ho rigettati per un difetto tutto opposto, e voglio dire perchè divenivano quasi intieramente coibenti ad un secco di 25, 30 gradi, o poco più, dell'istesso igrometro, quando cioè discende a soli 75 70 o 68 gradi della sua scala: il qual secco, se ben avvega di raro naturalmente in luogo coperto dal sole (ove debbesi consultare ogni igrometro, per giudicare dell'umido dell'ambiente; non mai al sole, che riscaldando la sostanza igrometrica verrebbe a disseccarla allai più dell'aria, che la circonda), pure qualche volta si osserva, ed anche maggiore. Ve n'ha pure tra i summentovati corpi, che vanno soggetti all'uno e all'altro di questi opposti difetti, che sono cioè troppo buoni conduttori per un umido estremo o quasi, e troppo coibenti per un secco alquanto più che mediocre; di tal indole è la carta, la quale inoltre è soggetta a variare nel grado di conducibilità indipendentemente dall'umido, divenendo sudicia, o in altro modo alterandosi; nè va esente da siffatti incomodi la pergamena, che abbandonerò forse anch' essa, riducendomi da ultimo all' osso di balena, o alla parte cornea delle penne, e all' avorio: dei quali corpi, altronde più consistenti, e di natura durevolissimi, e che, quando occorra, lavare si possono per renderli netti e mondi, prendendo delle listerelle sottili larghe da una in due linee, e lunghe da uno a tre pollici, secondo che sperimentando trovai convenire; queste quand' anche si tengano esposte lungamente ad un'aria umida all'estremo, alla nebbia ecc. schivando soltanto di bagnarle, non avverrà che spoglino mai l'elettrometro di tutta l'elettricità, nè che ve la faccian cadere dai 10 ai 2 gradi, come vogliamo, più presto di un minuto secondo, o mezzo almeno, e d'altra parte esposte le stesse listerelle all'aria più secca, che naturalmente dar si possa (ben inteso all'ombra), a un secco, in cui l'igrometro di *Saussure* segna 60 gradi, ed anche meno, non si comporteranno già a guisa di assoluti coibenti, ma più deferenti ancora che coibenti verranno a capo di dissipare l'elettricità dell'elettrometro in due o tre minuti primi al più: durata sopportabile, e che non rende l'osservazione troppo noiosa.

L'avvertenza di non esporre al sole la listerella di balena

od altra qualunque di cui ci vogliam servire, che altrimenti riscaldandosi si asciugherebbe di soverchio, e diverrebbe molto più secca dell' ambiente, è, come si comprende, della massima importanza. Quando dunque vogliasi far prova dell' umidità non sol dell' aria chiusa di una stanza, ma anche dell' esterna, si esponga la listerella fuori della finestra, e vi si lasci per alcuni minuti, badando che non vi dia il sole, e non vi sia dato dianzi in modo, che il sasso, od altro su cui vien essa posata, siasi notabilmente riscaldato.

All' istesso modo, che vuol guardarsi la listerella dal sole, debbesi difendere anche dalla pioggia, ricercandosi che sia umida quanto l' aria, ma non bagnata ed inzuppata. Si copra essa dunque convenientemente fuori dell' itessa finestra quando il tempo è piovoso, in guisa cioè che abbia libero il contatto dell' aria, ma nè goccia, nè spruzzo alcuno vi cada sopra.

L' esperienza igrometrica poi può farsi o fuori della stessa finestra, o dentro nella stanza. Se dentro, convien perdere men tempo che sia possibile, acciò la listerella ritenga il grado d' umido contratto all' aperto. Se fuori, conviene ancora, qualora l' aria si trovi estremamente umida, far presto cioè non lasciare esposto l' elettrometro troppo lungamente, nè il bastone di cera-spagna a tal umidità estrema; poichè questo allora difficilmente si potrebbe con istropicciarlo elettrizzare quanto conviene, e quello pure difficilmente prenderebbe i 10 o 12 gradi richiesti di elettricità, e presi perderebbero in pochi istanti, anche senza il tocco della listerella; onde equivoca e mancante riuscirebbe l' esperienza. Da ciò si comprende, che neppure nelle stanze umidissime hanno a rimanere per giorni ed ore l' elettrometro e il bastone di cera-spagna, ma riposti devono tenersi in qualche altro luogo discretamente asciutto; e di là poi devon prenderli l' uno e l' altro, o cavare allora di tasca, qualunque volta occorre di esplorare l' umidità estrema o quasi di un' aria tanto libera, che chiusa.

Tralascio altre piccole avvertenze, che si presenteranno da sè a chiunque vorrà applicarsi a queste prove; le quali sembrar potranno cose da nulla ai poco intelligenti, ma a chi ama di internarsi nelle materie, non men dilettevoli che istruttive riusciranno.

§ 4.

Confronto delle nostre prove igrometriche cogli altri igrometri, singolarmente con quello di Saussure: estensione della scala di graduazione in cotali prove: e come, e fino a qual segno può anche il nostro divenire un igrometro comparabile.

Comechè le sperienze fin qui descritte, oltre all'essere curiose, abbiano la loro utilità; non pretendo io già che questa nuova maniera di esplorar l'umido di diversi luoghi e tempi debba generalmente preferirli alle osservazioni de' migliori igrometri, quali sono quelli di *Saussure* a di *de Luc*, molto sensibili, e che più importa, comparabili. Sosterrò solo, che possono non di rado supplire a questi; e che ci offrono a certi riguardi qualche considerabile vantaggio sopra di essi, quantunque rimangano soggette tali nostre prove ad altri svantaggi e imperfezioni. Di questi vantaggi e svantaggi vengo ora a ragionare, e a porli più che posso in chiaro.

Il vantaggio principale, e il pregio più grande che ottengono le nostre sperienze, in cui facciam servire da igrometro l'elettrometro tascabile nel modo descritto nel § precedente, consiste nella grandissima estensione che si viene a dare alla scala igrometrica; cioè nel gran numero di gradi facilmente marcabili tra il termine di umidità estrema e un secco, che, se non è il massimo a cui giunger può l'arte, e neppure il più grande che dar si possa naturalmente, è però tale che ben rare volte s'incontra all'aperto, e nelle stanze non mai, o quasi mai: parlo di quel secco, che fa discendere l'igrometro a capello di *Saussure* dai 100 gradi, termine dell'umidità estrema, circa 40 gradi, cioè fin verso i 60. Ora qual è l'estensione, che abbiamo nelle nostre prove coll'elettrometro per tale mutazione nell'umido di 40 gradi? Quale cioè la differenza del tempo, che s'impiega a far cadere l'elettricità di cotesto elettrometro, mediante il conveniente tocco della listerella semicoibente ecc. da 10 gradi a 2, siccome abbiamo prescritto? Grande oltre ogni credere; mentre va da un secondo, o mezzo secondo, a due o tre minuti primi, ed anche più. Se dunque contisi

Tom. V.

Cccc

anche un sol grado per minuto secondo, ecco 150, ecco 200 gradi corrispondenti a 40 dell'igrometro di *Saussure*, dal che si vede che tante minime mutazioni d'umido, le quali riescono insensibili, ovvero minori di un grado nel detto igrometro, divengono oltre a un grado e due sensibili alle nostre prove, in cui è sì facile distinguere, e noverare i secondi.

E' dico agevol cosa noverare e distinguere i secondi: ed anzi marcabilissimi riescono i mezzi e i quarti di secondo, ed altre più piccole frazioni; laddove non son molto distinguibili i quarti di grado nell'igrometro di *Saussure*. Ho provato molte volte, ed ognuno può provare, che in un minuto secondo si possono proferire distintamente, ove contisi con celerità, i numeri uno, due, tre, quattro, cinque, sei; e contando nè così presto, nè troppo adagio, si arriva commodamente al cinque; e al quattro solamente, se si conta con posatezza: le differenze, che nascer possono son picciola cosa, e possono in molti casi trascurarsi. Io poi ho fatto l'abito di contare da uno fino a dieci in due secondi esattamente: ciò che mi risparmia in molte osservazioni, e segnatamente in quelle di cui ora si tratta, di consultar sempre l'orologio a secondi.

Se pertanto anche ad un umido estremo, all'umido es. gr. della nebbia e dell'aria rugiadosa, a quello che fa andare l'igrometro di *Saussure* a 100 gradi, cui non oltrepassa mai, io ho ancora nelle mie prove un minuto secondo pel tempo che tarda a cadere l'elettricità dell'elettrometro tentato col solito tocco ecc. dai 10 gradi ai 2: ecco un altro vantaggio, che s'aggiunge a quello della grande estensione, che abbiamo dal termine di tal umidità di 100 gradi fin ai 60 della detta scala di *Saussure*: questo nuovo vantaggio consiste in ciò, che si fa luogo a dinotare qualche cosa più in su dell'umido estremo segnato in tal igrometro. Infatti ove la mia listerella d'avorio, di penna, o di balena divenga, non che umida all'estremo, ma alquanto bagnata, porterà via l'elettricità dell'elettrometro in meno di un secondo, ma pure mi lascerà il tempo di contare quando fino a quattro, quando fino a tre, e quando fino a due, secondo che sarà più bagnata; e solo ove sia bagnatissima farà cadere a un tratto i

pendolini in un tempo sì corto e indiscernibile (come un quarto, un sesto, un ottavo di secondo), che sembrerà un istante.

Ma che? Se anche allora che questi cadono, o sembran cadere all'istante, osservar possiamo qualche gradazione. A quest'effetto basta in luogo di applicare la listerella semicoibente al cappelletto, o alla picciol asta ond'è guernito l'elettrometro, farvela toccare soltanto di volo, e darvi con quella delle percosse, in guisa che piegandosi essa listerella, mentre colla punta solamente della sua unghia metallica colpisce detta asta, ne sfugga rapidamente il contatto. In questo modo avverrà, che si possano ripetere 8 10 15 di tali schiaffi ossia colpi celeremente vibrati prima che decada l'elettricità dell'elettrometro dai soliti 10 gradi ai 2, ancorchè la listerella, che s'adopera, per l'estremo umido dell'ambiente cui fu esposta, anzi per vera bagnatura, sia atta a distruggere tale elettricità in meno d'un mezzo secondo, se invece di percuotere con essa così alla sfuggita, si tiene al consueto modo applicata al cappello od asta dell'elettrometro.

Veduto come, e quanto le nostre prove igrometriche coll'elettrometro vanno più in là di ciò che segna l'igrometro a capello, per quel che riguarda l'umido estremo; giacchè indicano al di più varj gradi di *bagnato*, che tal igrometro non dimostra punto; passiamo ora a vedere fin dove arrivano riguardo al secco. Per verità qui restano molto addietro dal termine a cui giunge l'igrometro di *Saussure*, e di *de Luc*, vuo'dire da quel secco estremo procurato coll'arte, d'onde comincia la loro scala di umidità, e ch'è segnato zero. Ho indicato sopra, che le mie prove s'estendono molto comodamente, ed offrono una assai grande scala dalla umidità estrema fino a quella segnata 60 gradi circa nell'igrometro di *Saussure*: or dirò, che poco più sotto può prolungarsi tale scala, cioè fino a 50 o 45 al più; giacchè divenendo per un secco maggiore di questo coibente del tutto o quasi, la solita listerella di penna, d'avorio, o di balena, più non vale a portar via l'elettricità dall'elettrometro, onde ve la lascia sussistere e dieci, e venti minuti primi, e qualche ora, se occorre: anzi anche allora, che l'igrometro suddetto segna soltanto 45 o 50 gradi divien noiosa di mol-

to l'esperienza coll' elettrometro , stantechè vi si sostiene l'elettricità malgrado il solito tocco 4 5 6 minuti primi : il che è troppo per chi appena può tollerarne 2,0 3.

Siccome però un sì gran secco, che faccia discendere l'igrometro a capello sotto i 45 gradi, ed anche solo sotto i 50, non si osserva mai, o quasi mai naturalmente, potendosi solo produrre coll'arte in vasi chiusi per mezzo della calce viva, dell'alcali vegetale, e di altri sali deliquescenti; così non dee considerarsi per un gran difetto che le nostre prove igrometriche coll' elettrometro arrivino a stento fino ai 45 o 40 gradi, di tal igrometro, e non passino più innanzi. Che poi, se con altro artificio potessimo giungere, servendoci sempre del nostro elettrometro, a misurare un secco ancor molto maggiore, come infatti il possiamo, e mostrarcello in appresso?

Intanto però, dirassi, gli elettrometri di *Saussure* e di *de Luc* hanno due punti fissi, su cui regolare la loro scala di graduazione, cioè l'umidità estrema che segnano 100 e il secco estremo, non già naturale, che impossibile sarebbe di determinare, ma artificiale, notato 0: con che ottengono un igrometro *comparabile*. Ma come regoleremo noi la nostra graduazione per le esperienze igrometriche coll' elettrometro, mancandoci uno di questi punti fissi, cioè quello del secco estremo, e solo determinar potendo l'altro dell'umidità estrema? E come otterremo la comparabilità?

Qui altro mezzo non ho trovato che di regolare le esperienze sopra uno di quelli igrometri che sono appunto comparabili. Adunque prendendo per campione l'igrometro a capello di *Saussure*, riduco la mia listerella semicoibente, di cui voglio servirmi per portar via l'elettricità dal mio elettrometro, la riduco a tali dimensioni, onde impieghi 30 secondi giusti a far cadere i pendolini dai 10 ai 2 gradi, quando e dove il detto igrometro segna 80 gradi, che è un'umidità mezzana. Da principio riduceva la listerella a tali dimensioni, che per quella temperatura umida di 80 gradi impiegasse sol 10,0 15 secondi a portar via dall'elettrometro quella tal dose di elettricità, e mi riusciva bene quand'era l'aria più secca, ed anche quand'era più umi-

da, ma non molto oltre i 90 gradi: allora però ch'è l'umido dell' ambiente passava i 93 o 94 gradi, era sì breve il tempo della speranza, che diveniva pressochè insensibile; giacchè non durava il solito toccamento un secondo, e neppure un mezzo secondo, e colla mia maniera già indicata di contare uno, due, tre, quattro, ecc. non arrivava a due o tre, che già eran caduti intieramente i pendolini dell'elettrometro. Vidi dunque, che conveniva servirsi di una listerella più lunga e più sottile, tanto che impiegasse un po più di tempo a spogliare l'elettrometro della data dose di elettricità; v' impiegasse cioè alcuni minuti secondi anche per un umido di 95, o 96 gradi, e per quello di 98 e 100 un secondo e mezzo almeno, il che appunto si ottiene qualora essa listerella sia tale, che per l'umido di 80 gradi impieghi poco più poco meno 30 secondi. Potrebbe anche scegliersi lunga e stretta tanto che impiegasse più d' un minuto secondo, e più di due nell'umido quasi estremo di 97, o 98 gradi; il che renderebbe molto più sensibili le piccole mutazioni verso questo estremo, ossia verso i 100 gradi: ma come durerebbe allora la speranza più di 30 secondi per la mediocre umidità di 80 gradi, e più di un minuto primo o di due quando l'igrometro segna solo 40 gradi, e più di tre, di quattro, per un secco di sei che lo fa discendere a 60 55 50 gradi; ed essendo che questa troppo lunga durata riesce di molta noja, torna meglio, per non incorrere in simile inconveniente, rinunciare ad una parte del sopra indicato vantaggio, e prendere un termine di mezzo. Questo termine dunque io ho preso scegliendo tra gli altri conduttori più o meno imperfetti l'avorio, l'osso di balena, la parte cornea delle penne, oppur anche la pergamena, per farne la listerella da adoprare nelle mie sperienze elettrico-igrometriche, e riducendola a tali dimensioni, che per l'umido di 80 gradi dell'igrometro di *Saussure*, che si può dire l'umidità mezzana, impieghi 30 secondi mercè di tenerla applicata all' asta dell'elettrometro, a farne cadere l'elettricità dai 10 gradi ai 2. Così disposte trovandosi le cose, le mie prove anche pel maggior secco naturale non durano mai più di 150 secondi, o al più 3 minuti primi: e d' altra parte per l'umido massimo durano ancora circa

un minuto secondo ; o almen tanto da poter contare alla mia maniera uno, due, tre.

Ma è egli poi facile di ridurre la listerella, che si è scelta, a tale stato, che faccia durare la prova 30 secondi giusti per quell' umido che tiene l' igrometro di *Saussure* a 80 gradi? Anzi facilissimo, sol che si proceda colla debita attenzione e pazienza nei reiterati tentativi, che convien fare. Cominciò dunque a tagliar fuori cotesta listerella d'avorio, di penna, o di balena larga due linee circa, e lunga tre o quattro pollici; e cogliendo il tempo, che l' anzidetto igrometro segni li prefissi 80 gradi, si faccia di tal listerella la prova: impiega ella a distruggere col suo toccamento l' elettricità di esso elettrometro dai 10 gradi ai 2 più tempo dei 30 secondi che vogliamo? Si accorci allora troncandone un pezzo, e si riprovi: se scorge si che metta ancor troppo tempo, si torni ad accorciare, e ciò a più riprese, finchè si trovi che vada bene. Che se avviene, per aver oltrepassato un poco il limite nell' accorciarla, il contrario cioè che in meno dei 30 secondi porti via quella listerella l' indicata dose d' elettricità dall' elettrometro, si ritagli in guisa che divenga più stretta: con che otterrassi (giusta quanto si è mostrato nel §. 2.) maggior ritardo nel trapasso dell' elettricità. Per tal modo ritagliando la nostra listerella or nella lunghezza, or nella larghezza, e poco per volta si arriva, mercè di molta pazienza, come avvisato già abbiamo, ad ottenere il giusto punto, cioè che per 80 gradi di umido dell' igrometro di *Saussure* faccia ella cadere l' elettricità dell' elettrometro, guernito del suo piccolo conduttore od asta metallica, da 10 gradi a 2 nel tempo di 30 secondi esattamente.

Or ecco come diventa anche il mio un igrometro fino ad un certo segno comparabile. Tosto che io l' ho ridotto a darmi giusto 30 secondi per 80 gradi dell' igrometro di *Saussure*; è pur forza che mi dia sempre un dato numero di secondi di più, e un dato numero di meno, per un dato numero di gradi al di sotto, e al di sopra di quelli 80. Invero è cosa molto penosa e difficile il determinare quanti secondi corrispondano a ciascun grado dell' igrometro di *Saussure* (che facciam servire per termine di paragone) dai

100 fino ai 60 e più basso ancora: cioè quanti secondi impieghi la nostra listerella a far cadere l'elettricità dell'elettrometro da essa toccato, per l'umido di 99 gradi, poi di 98, di 97 e via discorrendo. Ma fatto ciò una volta con accuratezza, e trovato con reiterare le sperienze, che si abbiano i medesimi riscontri, può formarsi una tavola di rapporto, in cui ciascuna delle nostre prove elettrico-igrometriche ci dia il grado corrispondente dell'igrometro di *Saussure*. Qualora poi non vogliasi che un presso a poco, potrà bastare di determinare coll'esperienza il numero de' minuti secondi per ogni 5 gradi di detto igrometro; e si potrebbe anche esser contenti di limitarsi tra i 100 e i 70 gradi, nell'intervallo de' quali sogliono accadere le mutazioni nell'umidità dell'aria; rarissimo essendo il secco che faccia discendere più abbasso l'igrometro medesimo.

Mi si domanderà s'io ho già fatte queste prove, e costrutta l'indicata tavola. Al che risponderò, che delle prove ne ho fatte moltissime; ma con diversi semicoibenti o conduttori più o meno imperfetti, ad oggetto di scegliere il migliore, e con dare alle listerelle formatene maggiore o minore lunghezza, maggiore o minore sottigliezza, onde vedere quanto più lentamente o meno involassero l'elettricità all'elettrometro: variando nel qual modo le sperienze poco ancora mi son fermato alle listerelle d'avorio, di balena, e di penna, ridotte giusto a tali dimensioni, che facciano cadere l'elettricità del mio elettrometro a paglie dai 10 gradi ai 2 in 30 secondi precisi per quell'umidità, che è segnata 80 gradi nell'igrometro a capello di *Saussure*: tanto solo cioè mi ci son fermato, quanto vi voleva per assicurarmi che cotal disposizione della listerella lasciando luogo alle prove dei gradi estremi d'umido, non rende quelle di un gran secco, ed anche del massimo naturale, soverchiamente lunghe e noiose, come ho sopra mostrato. Ho intanto confrontati varj termini intermedi; ma non già tutti i gradi tra i 100 e i 70 o 60 dell'igrometro di *Saussure*: anzi non l'ho fatto neppure di cinque in cinque compitamente. A questo travaglio, ch'esige maggior comodo e tempo, mi propongo d'applicarmi quanto prima: esso è tale del resto, che ora che son posti i fondamenti, ognuno può farlo da sè.

Resta però a vedere, se prendendo diverse listerelle e riducendo ciascuna a tal lunghezza e sottigliezza, che all'umido di 80 gradi abbian tutte bisogno di 30 secondi giusti per portar via col lor toccamento tanta elettricità all'elettrometro, da farne cadere i pendolini da' 10 gradi a' 2 come ho fissato, resta, dico, a vedere, se tutte poi cammineranno di paro per tutti gli altri gradi di maggiore o minore umidità; se impiegando una es. gr. 4 secondi per l'umido di 95 gradi, e 50 secondi per quello di 75 gradi, tutte le altre faranno lo stesso, e si corrisponderanno esattamente; oppure se discorderanno, impiegando chi 3 chi 4 chi 5 secondi per lo stesso umido di 95 gradi; chi 40, chi 50, chi 60 secondi ecc. per quello di 75 gradi. Se questa o simil altra discordanza avesse luogo, è facile comprendere che, comunque riuscissero comparabili coll'igrometro di *Saussure* le prove elettrico-igrometriche fatte con questa o con quella determinata listerella, già non sarebbero comparabili fra di loro le prove dell'una con quelle dell'altra; e che converrebbe far una tavola di rapporto per ciascuna: converrebbe che chiunque vuol seguire tali sperienze, facesse con quella listerella, ch'egli si è preparata, le prove confrontate a tutti i gradi uno per uno, o almen di 5 in 5 dell'igrometro che serve di campione, e sopra queste costrutta la sua tavola si servisse in seguito sempre dell'istessa listerella; poichè mutandola, ancorchè combinasse la nuova colla prima nel dare i 30 secondi richiesti per 80 gradi dell'igrometro di *Saussure*, come poi potrebbe accertarli dell'accordo per tutti gli altri gradi, se una non serve di norma certa per l'altra?

Ma quanto il dubbio di tali discordanze ed anomalie sembra fondato e sulla ragione e sull'esperienza pe'corpi di diversa indole e natura, altrettanto pare che debba escludersi pe'corpi della stessa specie. Se dunque ci atterremo o al solo avorio, o alla sola balena, non v'è ragione di credere che le piccole accidentali differenze tra avorio ed avorio, tra osso ed osso di balena indur ne debbano una così notevole, da progredire due di queste affatto discordemente nella conducibilità pe'varj gradi d'umido superiori ed inferiori agli 80, quando sono stati ridotti a coincidere esattamente per questo termine medio di naturale umidità. E' ben vero che l'esperien-

za mi ha fatto vedere, che due listerelle di balena, le quali pareano egualissime, e così due d'avorio affatto simili in apparenza, differivano notabilissimamente una dall'altra nella virtù di condurre l'elettricità, tal che conveniva dare a questa assai maggiore lunghezza o assai maggiore sottigliezza, che a quella, acciò impiegassero ambedue l'istesso tempo a portar via egual dose di elettricità: ma quando finalmente a questa differenza si è rimediato col compenso giusto delle rispettive dimensioni, quando son ridotte le due listerelle della stessa materia al segno, che sì l'una che l'altra, coll'istessa umidità di 80 gradi, fa cadere i pendolini dell'elettrometro da 10 gradi a 2 in un tempo eguale, cioè di 30 secondi, non si vede perchè non debbano anche per ogn'altro grado di umidità fare gli stessi passi ambedue, e mantenere un perfetto accordo. Del rimanente convenendo che son queste semplici conghietture, mi riservo a deciderne colla sperienza, che non ho ancora abbastanza consultata su tal punto.

Ma dato anche, che per niun modo potesse ottenersi un'esatta comparabilità nelle nostre prove elettrico-igrometriche, dovrà dirsi perciò che a nulla esse valgano? E non basta per accordar loro qualche pregio, che ci indichino chiaramente le più picciole differenze di umidità dell'ambiente, quelle fin anche, che non sono marcabili dal sensibilissimo igrometro a capello? Or egli è così in fatti: e basta richiamarci, che per un grado di questo, ed anche meno, le nostre prove ci presentano la differenza di più di un minuto secondo, divisibile facilmente in cinque o sei tempi: basta dire, che da una stanza all'altra, anzi da un angolo all'altro dell'istessa stanza, si nota da noi non di rado la differenza di più secondi: infine, che va la differenza da un secondo a più di 100 per non più di 25 o 30 gradi dell'igrometro di *Saussure*, dai 98 cioè o dai 100 ai 75 73 o 70. In una sì grande estensione pertanto della nostra scala può giudicarsi convenientemente delle differenze nell'umido dell'ambiente, ancorchè manchi quell'esatta comparabilità, che pur si desidererebbe.

E giacchè son venuto a parlare delle differenze d'umido nelle stanze, non voglio lasciar di dire, che in queste prove

ſingularmente rieſce bene il mio proceſſo , quantunque rieſca non male eziandio per eſplorar l'umido e il ſecco dell'aria aperta . La ragione è che nelle ſtanze non ſuol variare l'umido , che dai 95 ai 75 o al più 70 gradi dell'igrometro di *Sauſſure* ; entro ai quali limiti l'otto di balena , la penna , l'avorio (ſiccome ancora la pergamena , la carta , ed altri corpi , ſe di queſti uno voglia ſervirſi) non diventano nè troppo conduttori , nè troppo coibenti ; onde non è mai che la liſterella che ſi è ſcielta e preparata di conveniente lunghezza e larghezza impieghi nè meno di 2 o 3 ſecondi , nè più di 50 o 60 per far cadere i pendolini del mio elettrometro a paglie ſottili da 10 gradi a 2 . All'aria aperta all'incontro va non di rado l'igrometro a 98 ed anche 100 gradi , termine dell'umidità eſtrema ; nel qual caſo la noſtra liſterella ruba tutta l'elettricità dell'elettrometro in un ſecondo , o meno (ſuppoſto che rubi , come ſi richiede , in 30 ſecondi i ſoliti 8 gradi , da 10 cioè a 2) : il che non è sì facile a farſi con preciſione ; onde per meglio miſurare ſiſſatto umido è d'uopo ricorrere allo ſpediente più ſopra deſcritto , che è di toccar di fuga replicatamente con eſſa liſterella l'aſta dell'elettrometro , e noverarne i colpi .

In quella maniera che all'aria aperta l'igrometro va ſovente fino al termine dell'umidità eſtrema , ciò che non ſuol fare nelle ſtanze ; diſcende anche talvolta ſotto i 70 gradi , a 65 60 , e , ſebben rariffime volte , ſe pur non s'eſponga al ſole , anche a meno : pe' quali ſecchi la liſterella ſemicoibente qualunque ſia fa così male l'ufficio di conduttore , che laſcia paſſare più di 100 e di 200 ſecondi , prima d'involare all'elettrometro , col toccarne il cappello o l'aſta , e ſtarvi al modo ſolito applicata , l'elettricità dai 10 agli 8 gradi : il che rende , come più d'una volta ſi è accennato , troppo tedioſa l'oſſervazione .

§ 5.

Altra nuova maniera di prove igrometriche coll' iſteſſo elettrometro portatile , allorchè un gran ſecco rende o troppo incomode , o impraticabili quelle alla maniera già deſcritta .

Allorquando avviene che tutti o quali tutti que' corpi , i

quali nello stato ordinario ci si mostrano imperfetti conduttori, o mezzo tra deferenti e coibenti, e che perciò io chiamo semi-coibenti, diventino per un secco straordinario quasi coibenti del tutto; nel qual caso le sperienze igrometriche alla maniera sopra descritta riescono o troppo noiose e incommode, od anche affatto impraticabili; allora convien ricorrere ad altro spediente, per arrivar a conoscere e distinguere i gradi di questa secchezza: ed ecco quello che mi è suggerito, non dipartendomi dal caro mio elettrometro.

Prendo una riga d'avorio, o meglio una striscia di pergamena, larga da uno a due pollici, e lunga otto o dieci; (se è di più, tanto meglio); questa strofinata bene con due dita, o altrimenti, con che, per ritrovarsi appunto secca, facilmente si elettrizza, la presento al cappello o all'asta dell'elettrometro, senza farvela toccare; e sto osservando, e notando per quanto tempo dura in essa striscia l'eccitativa elettricità, e si fa sentire all'elettrometro; cioè per quanti secondi, presente quella, stanno aperti i di lui pendolini. Comunemente una buona pergamena monda e netta comincia a far dar segni all'elettrometro nostro, strofinata come s'è detto, ove l'ambiente cui è esposta segna 80 gradi all'igrometro di *Saussure*: ma questi segni si riducono ad un cenno di aprirsi e scostarsi, o ad una divergenza sibbene di più gradi dei pendolini, ma passeggera e istantanea; per aver anche la quale convien tenere la striscia di pergamena parallela all'asta dell'elettrometro, e distante sol due o tre pollici, nel tempo stesso che si scorre giù rapidamente colle due dita, con cui si stringe e strofina. Se si stropiccia tenendola più lontana, e si presenta dopo all'elettrometro, anche colla maggiore celerità possibile, non si han segni di elettricità, che già è svanita: essa, dico, è svanita, e non si han segni adoperando così, quando l'ambiente è troppo umido, o lo è anche sol mediocrementemente, e fin se comincia sotto dell'umidità mezzana a dominare il secco, quando cioè l'igrometro di *Saussure* segna 80 gradi, oppur solo 75 e 74. Più sotto verso i 72 o 70 gradi comincia l'elettricità della pergamena stropicciata a sostenerli; e quindi a fare star divergenti i pendolini dell'elettrometro qualche secondo; e infi-

ne molti secondi, e sempre più a misura che l'igrometro dinota maggiore secchezza.

Non debbo qui tralasciar di dire, che, invece della striscia di pergamena, serve pur anche bene una di carta comune da scrivere; col solo divario, che questa non comincia a dar segno neppure dell'elettricità *momentanea*, di quella intendendo, che fa alcun poco oscillare i pendolini all'atto stesso che si sfreghia la striscia davanti l'asta dell'elettrometro; non comincia, dico, a dar segno, se non per un secco, che porti l'igrometro di *Saussure* verso i 70 gradi; e non comincia poi a dare segni più o meno durevoli, tali cioè, che faccianfi sentire ai detti pendolini pel tempo di alcuni secondi, se non varj gradi più sotto, vale a dire per un secco assai più grande, e che mai o quasi mai accade naturalmente. Gli è perciò, e perchè la carta è più soggetta a rompersi e a guastarsi, che preferisco la pergamena: quale preferisco anche al feltro, al panno, e ad altre stoffe, che possono sibbene servire, ma che son soggette ad alterarsi in più maniere.

Ma sia la pergamena, o qualunque altro semicobente, che si prescelga per tali sperienze, ecco in queste un altro genere di prove elettrico-igrometriche, di cui valer ci possiamo ne' tempi e luoghi, in cui domina tale secchezza, che male riuscirebbero le prove, o il tedio ci apporterebbero di una lunghissima durata, tenendoci all'altro metodo, che abbiám sopra ampiamente descritto. Il nuovo che or qui proponiamo, e che è riservato ai secchi straordinarj, cominciando dai 70 gradi circa dell'igrometro di *Saussure*, non saprei dire ancora fino a qual segno di secchezza possa giungere: certo è però, che secco naturale non si dà, a cui non giunga e l'oltrepassi; sicchè può servire eziandio, se non pel massimo secco artificiale, per molti gradi che vi s'accostano, e che rendono non sol l'osso di balena, la penna, l'avorio, la pergamena, la carta, ma ogn'altro conduttore imperfetto, o semicobente, cobente perfetto.

Ciò basti per ora di questa nuova maniera; che abbiám fatto poco più che indicare; e che a miglior occasione forse spiegheremo più ampiamente, ed estenderemo ad altre applicazioni.

LETTERA

Del Sig. CAVALIERE FELICE FONTANA

Al Sig. de MORVEAU

Signore

NOn avendo ricevuto risposta di alcune mie lettere da qualche tempo speditele, molto temea che si fosse dimenticata di me; ma la gentil lettera, che ultimamente mi scrive, mi ha assicurato che ciò non sia. Le sue tre memorie, che si è compiaciuta farmi leggere anticipatamente, mi sono sembrate degne del loro Autore, che sempre eguale a se stesso non produce che cose eccellenti. I nuovj editori dell' Enciclopedia non avrebbero potuto ad altri meglio affidarsi che a lei per avere un lavoro il più completo e più perfetto in Chimica, per decorare questa grand' opera destinata a trasmettere alla posterità lo stato delle cognizioni umane nel presente secolo.

Io mi prendo la libertà di scriverle un estratto d' una memoria che ho fatto sopra la scomposizione dell' acqua: credo che dopo gli indizj, che vi troverà, potrà immaginare quant' io penso su quest' articolo. Credo dimostrato dopo i miei sperimenti, che 'l flogistico del ferro e l' acqua sieno i componenti, o gli elementi che costituiscono l' aria infiammabile, poichè i pesi dell' aria infiammabile, che si ottengono, corrispondono a quei dell' acqua consumata, e di quella parte di ferro che si cristallizza.

Mi resta a dimostrare in quale stato l' acqua si trovi in questa cristallizzazione di ferro, ciocchè non ho fatto a cagion dell' immenso e continuo travaglio, che mi costa la formazione del Gabinetto di Firenze, che contiene certa-

mente la Fisica, l' Astronomia, la Chimica, e finalmente la Storia naturale nella grand' estensione, se non che ciò che mi occupa ancora più, si è la gran raccolta d' anatomie in cera, che deggio fare per l' Imperatore, e quella che fo per Firenze. Esse saranno formate di più di 20 Statue per ciascuna, e di più di 4000 pezzi di particolarità. Non mi restano che due anni per terminarle interamente, farne fare i disegni, le spiegazioni, ecc. Giudichi qual tempo posso concedere alle mie sperienze.

Ella ha molta ragione di dire, che il *problema del secolo* è di saper ciò che diviene *l' acqua e 'l flogistico*. Non si ha fino ad ora che troppo negletto la necessaria precisione per questa sorte di delicate sperienze; ed ella vedrà dalla mia lettera, o per meglio dire, dall' estratto superiore, quante precauzioni fa mestieri di avere per ottener dei risultati certi. Si è mancato altresì di raccogliere i prodotti del mercurio per assicurarsi se vi fossero dei vapori assorbibili dall' acqua ed in qual quantità. Bisogna scomporre l' aria infiammabile, che ottiensì in queste sperienze con dell' aria tratta dal *precipitato per se*, e quest' è ciò ch' io farò subito che ne avrò il tempo. Procurerò di scomporre eziandio i cristalli, che si formano nei tubi di ferro, senza di che non son persuaso che si potrà giammai dire alcuna cosa di certo e concludente su questo soggetto.

I cristalli di quarzo che ella ha ottenuto mi sembravan essere una prova molto istruttiva ed un gran passo di fatto per l' intelligenza d' uno di quei processi, che la natura segue per formarli. Circa alla dissoluzione e sospensione del quarzo o della terra selciosa nelle acque d' Islanda credo essere in istato di poter dire alcuna cosa molto verisimile, poichè posso appoggiarmi sovra fatti, e sovra fatti presentatici dalla natura stessa molto in grande. Nei *Lagoni delle Maremme* di Siena, che non sono che sorgenti d' acque più o men calde dal calor naturale fino a quello dell' acqua bollente, e i di cui getti s' innalzano da tre piedi fino a sei, si osserva (nei luoghi ove l' acqua è più calda) che tutte le pietre, cominciando dalle più semplici fino alle più composte ed alle più dure, senza escluderne i quarzi, che sono scomposte dall' azion dell' acqua, si riducono in pasta; ed in

una polvere impalpabile, se sono esposte ai vapori umidi di queste acque calde, vapori che s'inalzan più di 100 piedi francesi ed in forma di nubi, e di colonne di fumo fino a 400 piedi d'altezza. Lo strepito è spaventevole, e tutte queste sorgenti, che sono per molte migliaia tra calde e fredde, esalano un' immensa quantità d' aria epatica frammischiata con molt' aria fissa. L' odor epatico fa sentirsi a sette od otto tese di distanza. Tutti i corpi, sui quali opera la cagione di questi fenomeni, si trovan più o men coperti di solfo, e questa cagione dee la sua origine ad alcune piriti che si scompongono successivamente. L'acido del solfo penetra tutte queste pietre quarzose, o selciose quasi interamente; e se s' infrangono trovansi umide nel loro interno, acide e sensibilmente cangiate alla lor superficie. Le vene di quarzo son divenute flessibili quasi come la cera, e possono esser piegate senza rompersi. Se tuttavia si lasciano all'azion dell' aria divengono friabili e cadono in polvere. Questa polvere è bianchissima, e s'attacca alla lingua come l'argilla; ne contiene in effetto, perchè se si unisce all'acido vitriolico, ottienti dell'allume. Questi due caratteri posson avere ingannati gli osservatori più attenti, come eglino avean a prima vista ingannato me.

Leggonfi due memorie su di questo soggetto negli Atti di Siena, e si era creduto che le sostanze non solamente selciose ma ancor calcari si cangiassero in totalità in terra argillosa. Il fatto è, che avendo contuttociò presa di questa farina bianca esterna da queste pietre selciose, ed avendola esaminata in paragone della stessa pietra selciosa interiore non alterata, ho ottenuto gli stessi risultati da tutte e due, con picciolissime differenze, ed i principj componenti di tutte e due eran di terra selciosa per la maggior parte, qualche quantità di terra argillosa, ed un pochetto di terra calcare, come trovasi quasi in tutte le pietre di questa forte (*).

(*) N. B. Queste sperienze sono state ripetute molte volte in appresso, e di diverse maniere, e contuttociò il successo, ed i risultati (che l'autore ha comunicato in seguito a molti suoi

amici, e tra gli altri al celebre Comendator de *Dolomieu*, e *Mascagni* di Siena, ch'è uno di quelli che hanno scritto sui lagoni di cui è questione) sono stati costantemente gli stessi.

Queste acque tengono come in dissoluzione queste tre differenti terre, e questa forse è la ragione per cui non formanti degli strati silicei ove quest'acqua cade, come se ne fanno in Islanda. Ma ciò che è certissimo si è, che la pietra scielosa essendo esposta ai vapori dell'acido sulfureo volatile e di aria epatica dei *Lagoni* divien molle, fragile, farinosa, e si tiene come in dissoluzione nell'acqua senza sopporvi un calor enorme, come s'è detto riguardo l'Islanda, poichè si veggono quivi parecchie alterazioni anche ove il calore è minor di quello dell'acqua bollente.

Se i nostri *Lagoni* non son vulcanici, la cagion si è che son poco estesi, e che le piriti sono in minor quantità del bisogno e poco profonde. Egli è tanto vero che la sorgente del calore è vicinissima alla superficie della terra, che le piriti non si trovano che alla superficie stessa, e che si veggono di tempo in tempo mancare e disseccare alcuni di questi *Lagoni* i più piccioli, e che pur davano dell'acqua calda, dei vapori sulfurei, dell'aria epatica, dell'aria fissa, del solfo.

Ho messo nell'acqua alcune piriti non ancora scomposte, ma per altro un poco alterate, ed umide, ed ho ottenuto dell'aria epatica, e dell'aria fissa, che si è naturalmente disimpegnata in questa circostanza. Queste piriti son ordinariamente ferrigne.

Egli è un fenomeno ben singolare che l'aria comune, in mezzo di tutte queste esalazioni, possa esser ottimamente respirabile, malgrado la quantità d'aria epatica e fissa prodotta dai *Lagoni*. Credo pertanto che non si possa attribuir ciò che ai vapori acquosi prodotti dal calore, i quali lavano, o purgano, per così dire, l'aria che si respira. Il mio eudiometro mi ha provato che quest'aria non era viziata che di $\frac{1}{6}$ al più. Io deggio, dunque, confermarmi sempre più con *Bergman* che noi non siamo ancora arrivati a provar con esperienze dirette che le terre primitive possan cangiarsi l'una nell'altra. E se si ha creduto trovare alcuni pezzi delle lave di Napoli ridotte totalmente in terra argillosa (di che molto dubito), ciò non prova altra cosa se non che le altre terre, e specialmente la selce è stata distrutta o dispersa dal continuo attacco dei più validi agenti della natura.

Pad

Può averfene una prova da ciò, che queſti ſteſſi pezzi peſan meno che le lave in iſtato naturale, o compatto ſiccome ſono, quantunque impregnate d'un acido vitriolico, che lor è foreſtiero ed accidentale.

Se ella crede che queſti penſieri ſien degni di riſleſſione, può preſentargli alla celebre Accademia di Dijon, come un atteſtato del mio riſpetto. Ad ogni modo mi farò ſempre un onore di ricever ſue nuove, nè mi farà giammai coſa più grata quanto d'eſſer meſſo a parte delle ſue ſcoperte, in attenzione delle quali ho l'onore di dichiararmi.

Fine delle Memorie Sociali.



I N D I C E

DI CIO' CHE SI CONTIENE

NEL PRESENTE VOLUME.

Catologo de' Membri della Società Italiana pag. iii

Elogio di Leonardo Ximenes.

Scritto dal Sig. LUIGI CACCIANEMICI PALCANI Professore Primario di Geografia, e di Nautica nell'Istituto, e di Filica nella Pontificia Univerità di Bologna. ix

SEZIONE PRIMA.

Osservazioni Meteorologiche fatte in Verona negli anni 1788, 1790.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI Astronomo, e Secretario perpetuo dell'Accad. di Agricoltura, Commercio ed Arti. i

Appendice alla Memoria intorno la dolcificazione dell' acqua del mare inserita nel III. Volume della Società Italiana.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazzaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari 8

Memoria intorno alle Mappe, e alla Sfera di riduzione per l' arte navigatoria.

Del medesimo 17

Dissertazione geometrico-analitica della Costruzione e della quadratura di alcune volte e lunule.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI 48

SEZIONE SECONDA.

Della longitudine di Verona, determinata con osservazioni astronomiche.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI 77

Osservazioni sopra il ritorno delle Serie

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Segretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze 88

Memoria sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi collocati nello stesso piano.

Del Sig. PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. 107

*Prodromo d' Osservazioni sopra il trattato di Calco-
Eeee ij*

lo integrale pubblicato in Parigi dal Sig. Marchese de Condorcet l' anno M. DCC. LXV.

Del Sig. PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. 130

Sulle rivoluzioni del globo terrestre provenienti dall' azione dell' acque Memoria Geologica.

Del P. ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale 163

SEZIONE TERZA.

Della latitudine e delle Refrazioni di Parigi e di Verona , e dell' obbliquità dell' eclittica .

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI. 259

Teoria generale del moto rotatorio spontaneo de' corpi naturali sopra piani inclinati

Del Sig. PAOLO DELANGES 278

Delle altezze barometriche Dissertazione geometrico-analitica .

Del P. D. FRANCESCO MARIA FRANCESCHINIS.

Presentata dal Sig. CAVALIERE LORGNA 294

Del misurare l' acqua che esce dalle cateratte con moto libero Memoria I.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA 313

Del misurare l' acqua che esce dalle cateratte con moto perturbato Memoria II.

Del medesimo 330

Descrizione dell' Osservatorio meteorologico eretto al fine dell' anno 1780 .

Del Sig. D. PIETRO MOSCATI Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano 356

Storia di un' egagropile ritrovata nel secondo ventricolo di un bue .

Del Sig. FRANCESCO TOGGIA.

Presentata dal Sig. CAVALIERE LORGNA 382

Sezione di un Cadavero .

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico 391

SEZIONE QUARTA.

Cateratta idrometrica proposta

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA 397

Continuazione delle Osservazioni anatomiche patologiche sugli organi uropoietici .

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Professore Primario di Istituzioni Ceruliche, e dell' Arte Ostetricia nella R. I. Università di Pavia, e Cerulico Pensionario di S. M. Sarda 408

Considerazioni sopra una maniera diversa da quella che segue l' Eulero, di trarre dal circolo le quantità trascendenti che allo stesso appartengono; e dimostrazione d' un Teorema analitico .

Del Sig. FRANCESCO PEZZI.

Presentata dal Sig. LEONARDO SALIMBENI 417

Saggio di un nuovo Corso di Elementi di Statica .

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari 426

Lettera dissertatoria relativa a due Rose prolifiche.

Del Sig. Ab. PAOLO SPADONI.

Presentata dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI. 488

SEZIONE QUINTA.

Della velocità dell' acqua per un foro nel fondo di un vaso che abbia uno o più diaframmi : e della velocità pure dell' acqua per un tubo verticale cilindrico o divergente annesso a un foro nel fondo di un vaso semplice : e del soffio che si procura nelle fornaci di alcune ferriere col mezzo dell' acqua.

Del Sig. TEODORO BONATI Professore d' Idrostatica nell' Università Pontificia di Ferrara, ed Inspettore dei fiumi del Ferrarese 501

Osservazioni sopra varj effetti della pressione dei fluidi.

Del Sig. SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova 525

Della maniera di far servire l' elettrometro atmosferico portatile all' uso di un Igrometro sensibilissimo, Memoria, in cui si rischiarano molte cose intorno al trascorrimento del fluido elettrico nei Conduttori imperfetti.

Del Sig. DON ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia . . . 551

Lettera al Sig. de Morveau.

Del Sig. FELICE FONTANA Cavaliere del Sacro Romano Impero, Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. P. il G. Duca di Toscana 581

Errori

Correzioni

pag.	x1	l.	1	ramo
	11	l.	10	Quatt'
	37	l.	20	truovi
	83	l.	23	ritrocede
	167	l.	21	a nella Lapponia
	183	l.	28	icorere
	216	nota		<i>Da la Peirouse</i>
	229	l.	32	fe
	253	l.	24	agisce
	295	l.	11	—g ⁿ
	387	l.	6	fe stesso
	542	l.	31	sopraddotta

<i>Ramo</i>
Quattr'
trovi
retrocede
e nella Lapponia
scorrere
<i>De la Peirouse</i>
fe
agisce
—gr ⁿ
fe stesso
sopraddetta

Il presente V. Volume contiene Fogli $77 \frac{1}{2}$, e Tavole 13 di varia grandezza, il cui prezzo, oltre le rispettive ipese di porto, è di lire venete 21 compresa la provvisione del dieci per cento al Librajo venditore.



